

ΜΑΘΗΜΑ 7.

1. Εξίσωση Εφαπτομένης Καμπύλης σε σημείο.

Γενικά, η εξίσωση ευθείας στο επίπεδο xOy είναι

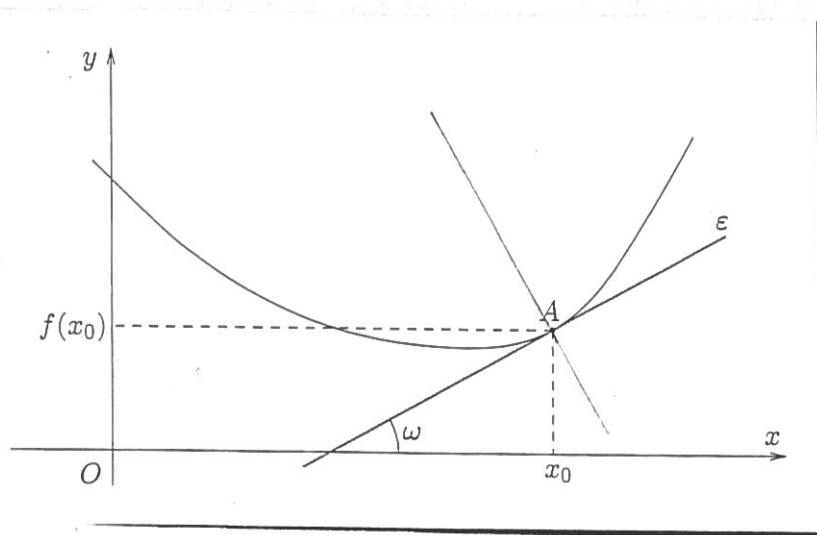
$$\boxed{Ax + By + \Gamma = 0}, \text{ όπου } A, B, \Gamma \in \mathbb{R}.$$

Η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από ένα σημείο (x_0, y_0) και έχει συντελεστή κατεύθυνσης λ , δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{y - y_0 = \lambda(x - x_0)},$$

όπου λ είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα Ox .

Ας είναι $y = f(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και (x_0, y_0) ένα σημείο της καμπύλης που ορίζει η συνάρτηση αυτή.



Η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο (x_0, y_0) είναι

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Η $f'(x_0)$ είναι ο συντελεστής κατεύθυνσης της εφαπτομένης και συχνά συμβολίζεται με λ , δηλ. $\lambda = f'(x_0)$.

Η εξίσωση της κάθετης ευθείας στην εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο (x_0, y_0) δίνεται από τη σχέση

$$y - y_0 = -\frac{1}{\lambda} (x - x_0), \quad \lambda \neq 0$$

Παρατηρήσεις

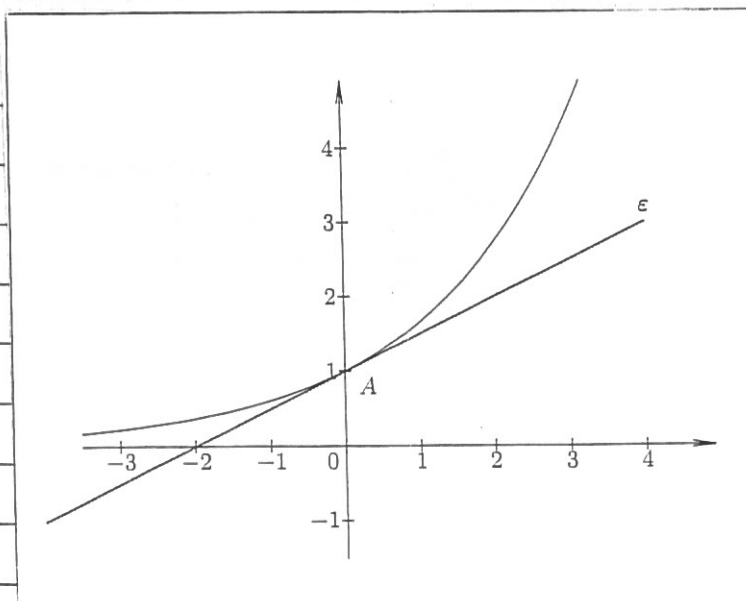
Από τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης μπορούμε να παρατηρήσουμε τα παρακάτω:

1. Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η εφαπτομένη της καμπύλης είναι η παράλληλη προς τον άξονα Ox ευθεία $y = f(x_0)$.
2. Αν σε κάποιο σημείο x_0 η παράγωγος $f'(x_0)$ είναι $\pm \infty$, τότε η εφαπτομένη δίνεται από την ευθεία $x = x_0$ που είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy .
3. Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε η καμπύλη της δεν έχει στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$ εφαπτομένη.

Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ στο σημείο $A = (x_0, f(x_0))$, όπου $x_0 = 0$.

Λύση



Θα Βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ στο σημείο $A = (x_0, f(x_0))$, όπου $x_0 = 0$. (Βλέπε Σχήμα)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με

$$f'(x_0) = \frac{1}{2} e^{\frac{x_0}{2}} = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2}$$

Επίσης έχουμε $f(x_0) = f(0) = e^0 = 1$.

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο A είναι,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{ή} \quad y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 0)$$

$$\text{ή} \quad y = \frac{1}{2}x + 1$$

Παράδειγμα 2.

Να Βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = \frac{2x-3}{x-4}$ στο σημείο με τεταγμένη $y_0 = \frac{1}{2}$.

Λύση

Αν x_0 είναι η τεταγμένη του αντίστοιχου σημείου είναι

$$f(x_0) = \frac{1}{2} = \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 4} \quad \text{άρα} \quad x_0 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Έχουμε} \quad f'(x) = \left(\frac{2x-3}{x-4} \right)' = \frac{-5}{(x-4)^2}$$

$$\text{άρα} \quad f'(x_0) = f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-5}{\left(\frac{2}{3}-4\right)^2} = -\frac{9}{20}$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \text{ είναι: } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{ή} \quad y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{20} \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \quad \text{ή} \quad y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{20}x + \frac{2}{5}$$

$$\text{ή} \quad y = -\frac{9}{20}x + \frac{2}{5}$$

Παράδειγμα 3.

Να βρεθούν οι εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης, της καμπύλης $y = x^3 - 3x + 2$ στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι για $x_0 = 2$ είναι $y_0 = 4$.

Βρίσκουμε την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο $x_0 = 2$.

Είναι $f'(x) = 3x^2 - 3$, άρα $f'(2) = 9$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται

$$y - 4 = 9 \cdot (x - 2) \text{ ή } y = 9x - 14$$

και της κάθετης

$$y - 4 = -\frac{1}{9}(x - 2) \text{ ή } y = -\frac{1}{9}x + \frac{38}{9}$$

Παράδειγμα 4.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$$y = x^4 + 3x^2 - 16$$

στο σημείο τομής με την παραβολή

$$y = 3x^2$$

Λύση

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} y = x^4 + 3x^2 - 16 \\ y = 3x^2 \end{cases}$$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των καμπυλών

$$x_1 = -2, x_2 = 2, y_1 = y_2 = 12$$

Βρίσκουμε τις παραγώγους στα σημεία $x = -2$ και $x = 2$

$$y' = 4x^3 + 6x$$

$$y'(-2) = -44, \quad y'(2) = 44$$

Οπότε οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία ταμής είναι

$$y - 12 = -44 \cdot (x + 2)$$

και $y - 12 = 44(x - 2)$

Οι εξισώσεις των καθετών είναι:

$$y - 12 = \frac{1}{44}(x + 2)$$

και $y - 12 = -\frac{1}{44}(x - 2)$

Παράδειγμα 5.

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, που είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Λύση

Έστω ε μια τέτοια εφαπτομένη και $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής με την καμπύλη C .

Επειδή $\varepsilon \parallel x'x$ έχουμε

$$f'(x_0) = 0$$

Είναι $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$, οπότε

$$f'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0 - 12, \text{ άρα } x_0 = 2 \text{ ή } x_0 = -1$$

Η εφαπτομένη στο $x_0 = 2$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$$

ή $y - (-15) = 0 \cdot (x - 2)$ ή $y = -15$

Η εφαπτομένη στο $x_0 = -1$ είναι:

$$y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1) \text{ ή } y = f(-1) = 12.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης $y = x^3 - 2x^2 + 4$ στο σημείο $(2, 4)$.

2. Να Βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$$y = x^4 + 3x^2 - 16$$

στο σημείο τομής με την παραβολή

$$y = 3x^2$$

3. Να Βρεθούν οι εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$$

στο σημείο $(-2, 5)$.

4. Να Βρεθούν οι εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$$y = \sqrt[3]{(x-1)}$$

στο σημείο $(1, 0)$.

2. Μονοτονία και Ακρότατα Συνάρτησης

Πρόταση 1,

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .

Πρόταση 2,

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .

Πρόταση 3,

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα (a, b) και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού. Αν η συνάρτηση

- i) είναι συνεχής στο σημείο x_0
- ii) είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$
- iii) είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, x_0)$ και $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (x_0, b)$,

τότε η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0 με τοπικό μέγιστο το $f(x_0)$.

Πρόταση 4,

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα (a, b) και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού. Αν η συνάρτηση

- i) είναι συνεχής στο σημείο x_0

- i) είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$
- ii) είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (a, x_0)$ και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_0, b)$

τότε η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0 , με τοπικό ελάχιστο το $f(x_0)$.

Πρόταση 5.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα (a, b) και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού. Αν η συνάρτηση

- i) είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) .
- ii) είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 .
- iii) είναι $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$

τότε η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0 με τοπικό ελάχιστο το $f(x_0)$.

Πρόταση 6.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα (a, b) και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού. Αν η συνάρτηση

- i) είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b)
- ii) είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_0
- iii) είναι $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$

τότε η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0 με τοπικό μέγιστο το $f(x_0)$.

Σχόλιο

Οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης αναζητούνται

- i) Στη ρίζα της πρώτης παραγώγου της $f(x)$, εφόσον ορίζεται.
- ii) Στα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη.
- iii) Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, εφόσον είναι αριθμοί που ανήκουν στο Π.Ο.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά της ακρότατα.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και είναι $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$f'(x) = 0$ όταν $x = \pm 1$.

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου καθώς και η μονοτονία της

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ						
x	$-\infty$		-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	0	-	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο -1 με τοπικά μέγιστη τιμή το $f(-1) = 4$.

Επίσης η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο 1 με τοπικά ελάχιστη τιμή το $f(1) = 0$.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, με $x \in \mathbb{R}$.

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά της ακρότατα.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και είναι

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου καθώς και η μονοτονία της

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ				
x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 0$ με τοπικά ελάχιστη τιμή το $f(0) = -1$.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, με $x \in \mathbb{R}^*$.

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά της ακρότατα.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και είναι

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \quad \text{και} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου καθώς και η μονοτονία της

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ						
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	1	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	2	$\nearrow$

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο -1 με τοπικά μέγιστη τιμή το $f(-1) = -2$ και τοπικό ελάχιστο στο 1 με

Παράδειγμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x}$, με $x \in \mathbb{R}$. Να μελετηθεί ως προς την μονotonία και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά της ακρότατα.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και είναι

$$f'(x) = (x \cdot e^{-x})' = [(x)' \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x})'] = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

Παρατηρούμε ότι η παραγώγος έχει μία ρίζα τον αριθμό 1.

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου καθώς και η μονotonία της.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ				
x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 1$ με τοπικά μέγιστη τιμή το $f(1) = e^{-1}$.

Παράδειγμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, με $x \in (0, +\infty)$.

Να μελετηθεί ως προς την μονotonία και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα τοπικά της ακρότατα.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και είναι

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Παραγωγής η παράγωγος έχει μία ρίζα τον αριθμό $x_0 = e$.
 Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο της
 παραγωγής καθώς και η μονοτονία της.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ				
x	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$	$+\infty$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$-\infty$	e^{-1}	$\rightarrow$	0

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι
 η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο
 στο σημείο $x_0 = e$ με τοπικά μέγιστη τιμή
 το $f(e) = e^{-1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

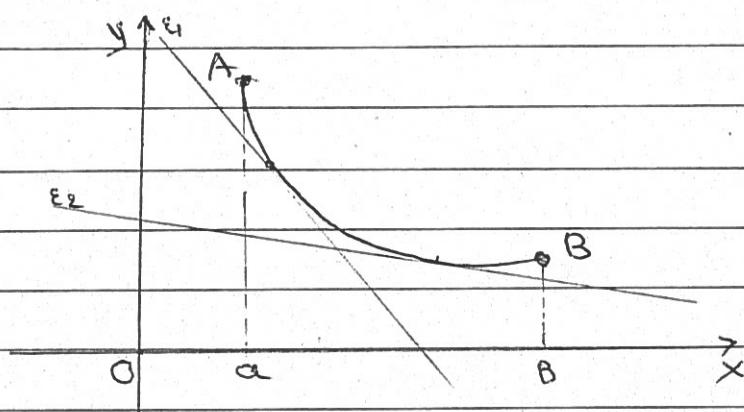
1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2)$. Να μελετηθεί
 ως προς την μονοτονία και να βρεθούν, αν υπάρχουν,
 τα τοπικά της ακρότατα.

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$, με $x \in \mathbb{R}^+$.
 Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθούν,
 αν υπάρχουν, τα τοπικά της ακρότατα.

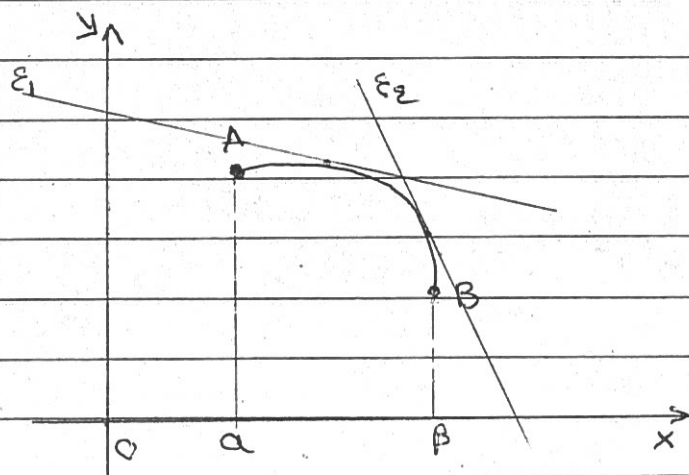
3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x(x+1)}{x-1}$, με $x \neq 1$.
 Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθούν,
 αν υπάρχουν, τα τοπικά της ακρότατα.

3. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Ένα τόξο μιας καμπύλης $y=f(x)$ λέμε ότι στρέφει τα
κοίλα προς τα πάνω (κυρτή συνάρτηση), αν το τόξο
αυτό βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη του σε
κάθε σημείο του.



Ένα τόξο μιας καμπύλης $y=f(x)$ λέμε ότι στρέφει τα κοίλα
προς τα κάτω (κοίλη συνάρτηση), αν το τόξο αυτό
βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη του σε κάθε
σημείο του.



Σημεία καμψής μιας καμπύλης είναι τα σημεία στα οποία
η καμπύλη σταματά να στρέφει τα κοίλα προς τα
πάνω (κάτω) και αρχίζει να στρέφεται προς τα κάτω (πάνω).

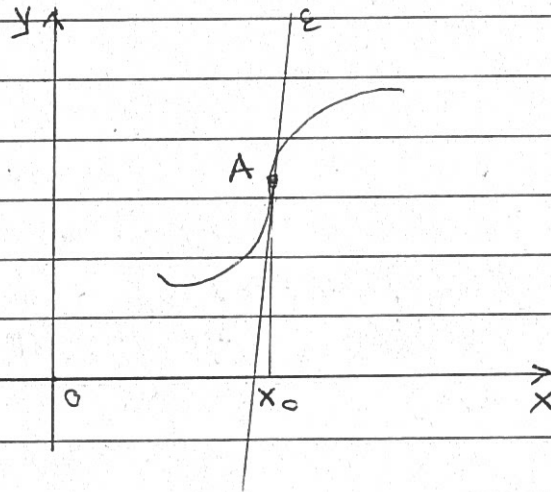
Θεώρημα 1

Ένα σημείο $x = x_0$ είναι σημείο καμπής μιας καμπύλης $y = f(x)$,

- αν $f''(x_0) = 0$ ή
- αν $f''(x_0)$ δεν υπάρχει αλλά υπάρχει η $f'(x_0)$ και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο καθώς το x περνάει το $x = x_0$.

Σημείωση

Η δεύτερη συνθήκη μπορεί να αντικατασταθεί από την $f'''(x_0) = 0$, αν η $f'''(x_0)$ υπάρχει.

Θεώρημα 2

Έστω f συνάρτηση, συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) .

Ισχύουν τα εξής:

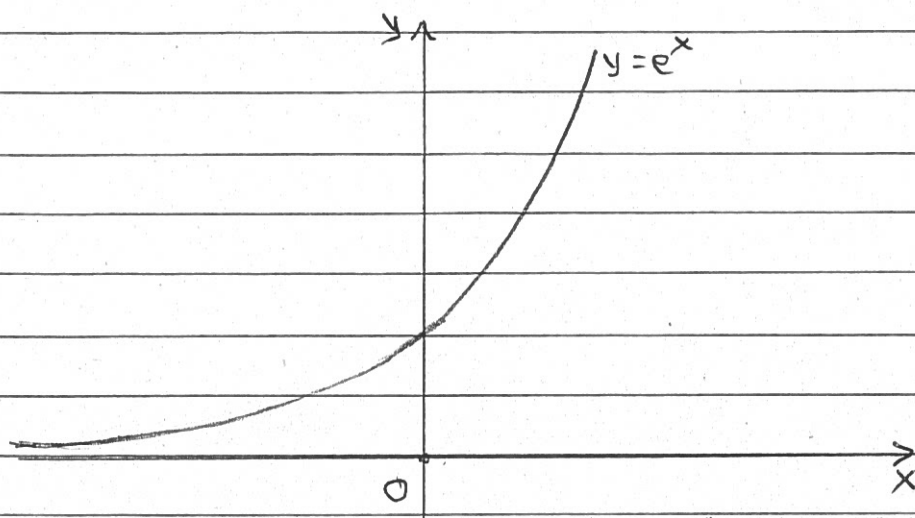
(1) Η f είναι κυρτή στο $[a, b]$ εάν και μόνον εάν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(2) Η f είναι καίλη στο $[a, b]$ εάν και μόνον εάν $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

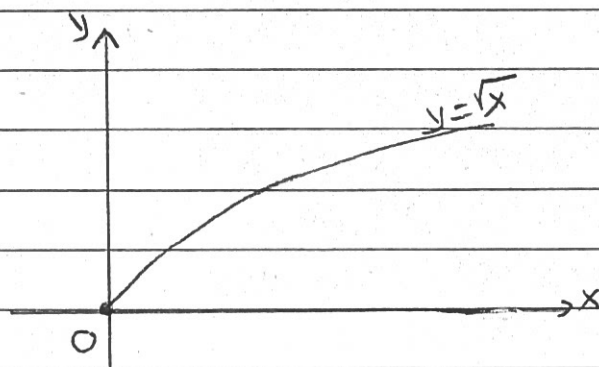
Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) = e^x > 0$.

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Πράγματι, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$$

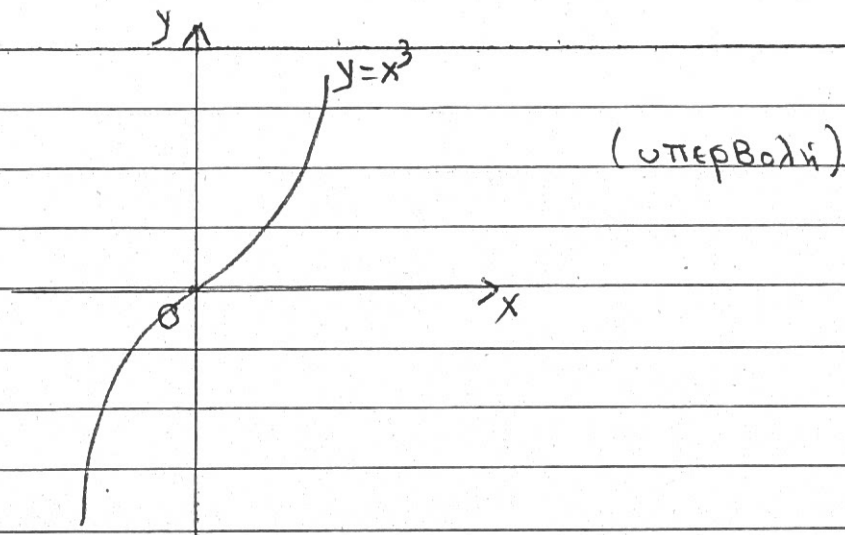
Παράδειγμα 3

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$. Πράγματι, έχουμε

$$f''(x) = 6x \leq 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0]$$

και

$$f''(x) = 6x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$



Παράδειγμα 4.

Να μελετηθεί η κυρτότητα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{6}(x+1)^2(x-2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Έχουμε $f'(x) = \left(\frac{1}{6}(x+1)^2(x-2) \right)'$

$$= \frac{1}{6} [2(x+1)(x-2) + (x+1)^2]$$

$$= \frac{1}{6} (x+1)(2x-4+x+1)$$

$$= \frac{1}{2} (x+1)(x-1)$$

και

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}(x+1)(x-1) \right)' = \frac{1}{2}(x-1+x+1) = x$$

Επομένως $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $f''(x) < 0$ για $x < 0$

και $f''(x) > 0$ για $x > 0$.

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ						
x	$-\infty$	-1	0	+1	2	$+\infty$
f''	-	-	0	+	+	+
f						

Παράδειγμα 5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, με $x \in \mathbb{R}$.

Να μελετηθεί ως προς την

κυρτότητα και να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία καμής της γραφικής της παράστασης.

Λύση

Η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και είναι

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{όταν} \quad -12x^2 + 4 = 0 \quad \text{δηλ. όταν} \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου καθώς και η κυρτότητα της συνάρτησης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ					
x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι για

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ τα σημεία $M_1(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$ και

$M_2(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$ είναι σημεία καμής της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης.

Παράδειγμα 6

Να μελετηθεί η μονοτονία και η κυρτότητα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

Έχουμε

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - x + 4}{x - 1} \right)' = \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

Η διακρίναντα του τριωνύμου $x^2 - 2x - 3$ είναι $\Delta = 16 > 0$.

Επομένως το τριώνυμο έχει δύο ρίζες $x_1 = 3$ και $x_2 = -1$, και συνεπώς

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \right)' = \frac{(2x - 2)(x - 1)^2 - 2(x^2 - 2x - 3)(x - 1)}{(x - 1)^4} = \\ &= \frac{(x - 1) \cdot [(2x - 2)(x - 1) - 2(x^2 - 2x - 3)]}{(x - 1)^4} = \frac{8}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

Επομένως $f''(x) < 0$ για $x < 1$ και $f''(x) > 0$ για $x > 1$.

Η μονοτονία και η κυρτότητα της f δίνονται από τον παρακάτω πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ Κ' ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ						
x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	+	+	+
$f(x)$						

Παρατηρούμε ότι η γραφική παράγωγος της f δεν έχει σημεία καμπής.