

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11^{ου} ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

- 1) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x - 3$, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x = -3$ και $x = 2$.

Λύση

Λύνοντας την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$, βρίσκουμε ότι $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Άρα η καμπύλη τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $(-1, 0)$ και $(3, 0)$

Ο πίνακας προσήμου για την συνάρτηση $y = x^2 - 2x - 3$ είναι:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΡΟΣΗΜΟΥ				
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	-	+	+

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx - \int_{-1}^2 (x^2 - 2x - 3) dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-1}^2 \\
 &= \left[\left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) \right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 - 3 \cdot (-3) \right) \right] - \\
 &\quad - \left[\left(\frac{2^3}{3} - 2^2 - 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) \right) \right] = \\
 &= \dots = \frac{59}{3} \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές

$$y_1 = 6x - x^2 \text{ και } y_2 = x^2 - 2x$$

Λύση

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων y_1 και y_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $y_1 = y_2$.

Έχουμε

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow -2x^2 + 8x = 0$$

$$\Rightarrow -2x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ κ' } x_2 = 4$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων y_1 και y_2 είναι $A = (0,0)$ κ' $B = (4,8)$. Το πρόσημο του $y_1 - y_2 = -2x^2 + 8x = -2x(x-4)$ δίνεται από τον πίνακα

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$-2x^2 + 8x$	-	0	+	-

οπότε έχουμε $E = \int_0^4 |y_1 - y_2| dx =$

$$= \int_0^4 (-2x^2 + 8x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ τ.μ.}$$