

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ, ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2018-19
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ (Εξάμ. 1ο)
Παρασκευή, 20 Σεπτεμβρίου 2019
 (Εισηγητής: Κώστας Φιλλιππίδης - kphilippides@teiwm.gr)

Όπου απαιτείται στα παρακάτω προβλήματα, θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$

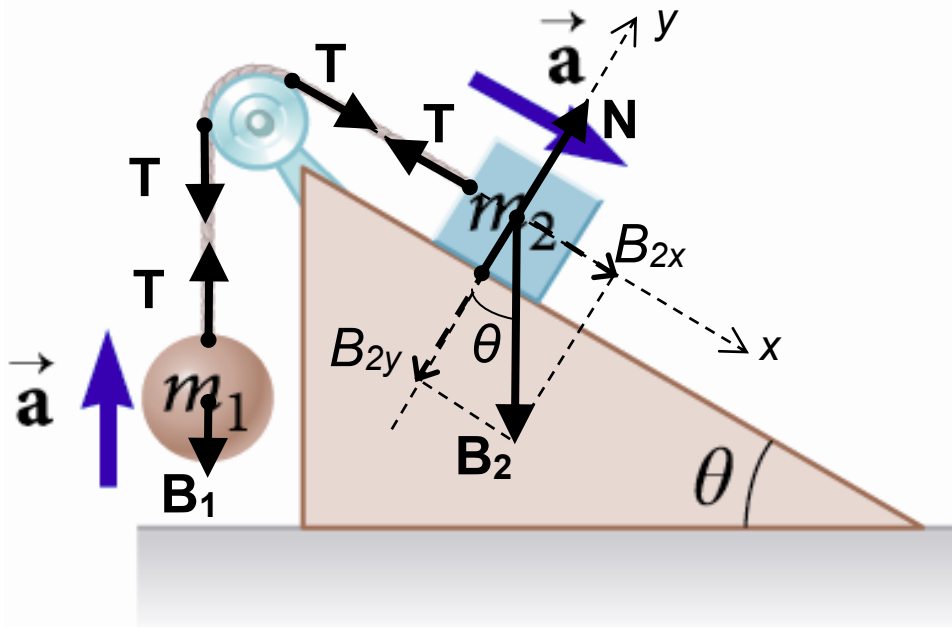
Θέμα 1

[μονάδες 4]

Δύο σώματα συνδέονται με αβαρές νήμα το οποίο διέρχεται γύρω από μια αβαρή τροχαλία χωρίς τριβές (Εικόνα 1). Υποθέστε ότι το κεκλιμένο επίπεδο δεν έχει τριβές και ότι $m_1 = 1.00 \text{ kg}$, $m_2 = 4.00 \text{ kg}$, ενώ για τη γωνία θ ισχύει $\eta\mu\theta = 0.8$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = 0.6$

- (α) (1) Σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που ενεργούν στα δυο σώματα,
- (β) (0,6) Αναλύστε το βάρος του σώματος m_2 σε δύο συνιστώσες, η μια παράλληλη και η άλλη κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο και υπολογίστε το μέτρο τους
- (γ) (1) Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης a των σωμάτων,
- (δ) (1) Βρείτε την τάση T του νήματος,
- (ε) (0,4) Βρείτε το μέτρο της κάθετης αντίδρασης N από το κεκλιμένο δάπεδο.

Λύση (α)



Εικόνα 1

- (β) $B_{2x} = B_2 \eta\mu\theta = m_2 g \eta\mu\theta = 4 \cdot 10 \cdot 0,8 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ N}$
 $B_{2y} = B_2 \sigma\upsilon\nu\theta = m_2 g \sigma\upsilon\nu\theta = 4 \cdot 10 \cdot 0,6 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ N}$

(γ)-(δ)-(ε) Εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο του Νεύτωνα στα δύο σώματα και έτσι παίρνουμε τρεις εξισώσεις από τις οποίες βρίσκουμε τους τρεις αγνώστους N , a και T .

$$m_2 \text{ στη διεύθυνση } y : \sum F_{2y} = 0 \Rightarrow N - B_{2y} = 0 \Rightarrow N = B_{2y} \Rightarrow \boxed{N = 24 \text{ N}}$$

$$m_2 \text{ στη διεύθυνση } x : \sum F_{2x} = m_2 a \Rightarrow B_{2x} - T = m_2 a \quad (1)$$

$$m_1 \text{ στη διεύθυνση } y : \sum F_1 = m_1 a \Rightarrow T - B_1 = m_1 a \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) παίρνουμε :

$$B_{2x} - T + T - B_1 = m_2 a + m_1 a \Rightarrow B_{2x} - B_1 = (m_2 + m_1) a \Rightarrow a = \frac{B_{2x} - m_1 g}{m_2 + m_1} = \frac{32 - 1 \cdot 10}{4 + 1} = \frac{22}{5} \Rightarrow$$

$$a = 4,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε

$$T = B_1 + m_1 a = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a) = 1 \cdot (10 + 4,4) \Rightarrow T = 14,4 \text{ N}$$

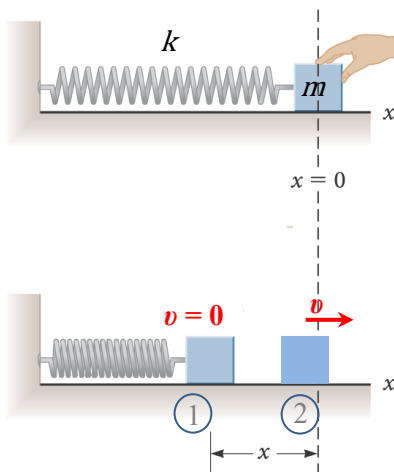
Θέμα 2

[μονάδες 2]

Ένας κύβος μάζας $m = 20,0 \text{ kg}$ είναι στερεωμένος σε ένα ελατήριο με σταθερά $k = 500 \text{ N/m}$ (Εικόνα 2). Ο κύβος σύρεται στη θέση $x = 10,0 \text{ cm}$, αριστερά από τη θέση ισορροπίας $x = 0$, και αφήνεται ελεύθερος από κατάσταση ηρεμίας. Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κύβου τη στιγμή που περνάει από τη θέση ισορροπίας του αν

(α) (1) η οριζόντια επιφάνεια δεν έχει τριβές

(β) (1) ο συντελεστής τριβής μεταξύ του κύβου και της επιφάνειας είναι $\mu_k = 0,045$.



Εικόνα 2

Λύση (α) Σε αυτή την περίπτωση η **μηχανική ενέργεια διατηρείται** επειδή η μόνη δύναμη που ενεργεί στο σώμα οριζόντια είναι η δύναμη του ελατηρίου $F = -kx$ η οποία είναι διατηρητική. Δηλαδή το έργο της εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος : $W_{ελ}(1 \rightarrow 2) = -\Delta U = U_1 - U_2$. Όπου U είναι μια συνάρτηση της θέσης που ονομάζεται συνάρτηση δυναμικής ενέργειας που προσδιορίζεται από την παραπάνω σχέση, υπολογίζοντας το έργο που κάνει το ελατήριο κατά τη μετακίνηση του σώματος από μια τυχαία θέση x στη θέση ισορροπίας $x=0$: $W_{ελ}(x \rightarrow 0) = U(x) - U(0)$

$$W_{ελ}(x \rightarrow 0) = \int_x^0 F_{ελ} dx = \int_x^0 (-kx) dx = -k \int_x^0 x dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_x^0 = -\frac{1}{2} k \cdot 0^2 - \left(-\frac{1}{2} kx^2\right) \Rightarrow$$

$$U(x) - U(0) = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} k \cdot 0^2 \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

Η μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας ,

$$E = K + U$$

και επειδή διατηρείται, θα έχει την ίδια τιμή στη θέση 1 με τη θέση 2 :

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow 0 + U_1 = K_2 + 0 \Rightarrow \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = x \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$v = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{500}{20}} = 0,1 \cdot \sqrt{25} = 0,1 \cdot 5 \Rightarrow v = 0,500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(β) Εφόσον υπάρχει τριβή η ενέργεια δεν διατηρείται και έτσι χρησιμοποιούμε το Θεώρημα της Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας :

$$\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K_2 - K_1 = W_{ελ} + W_f \Rightarrow K_2 - 0 = U_1 - U_2 - f \cdot x \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kx^2 - 0 - \mu N \cdot x \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{k}{m} x^2 - 2\mu g \cdot x \Rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{k}{m} x - 2\mu g\right) \cdot x} = \sqrt{\left(\frac{500}{20} \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,045 \cdot 10\right) \cdot 0,1}$$

$$v = \sqrt{(25 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,45) \cdot 0,1} = \sqrt{(2,5 - 0,9) \cdot 0,1} = \sqrt{1,6 \cdot 0,1} = \sqrt{16 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-1} \Rightarrow v = 0,400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Όπου η τριβή ολίσθησης f δίνεται από τον τύπο $f = \mu N$ και η κάθετη αντίδραση από το δάπεδο είναι ίση με το βάρος επειδή το σώμα ισορροπεί κατακόρυφα $N = B = mg$

Οι απαντήσεις δίνονται σε τρία σημαντικά ψηφία όπως είναι και τα δεδομένα.

Πρόβλημα 3

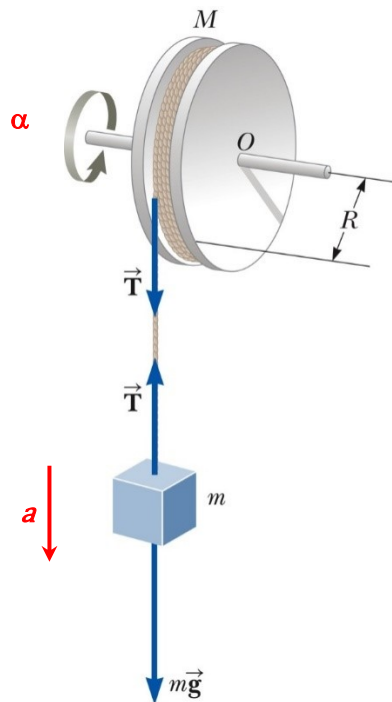
[μονάδες 4]

Ένα σώμα μάζας $m = 5.00 \text{ kg}$ κρέμεται από το ελεύθερο άκρο ενός αβαρούς νήματος, το οποίο είναι τυλιγμένο γύρω από ένα καρούλι με ακτίνα $R = 0.200 \text{ m}$ και μάζα $M = 10.00 \text{ kg}$. Το καρούλι είναι ένας συμπαγής δίσκος, ο οποίος περιστρέφεται ελεύθερα στον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O (Εικόνα 3). Το αναρτημένο σώμα αφήνεται από την ηρεμία να κατέβει προς το έδαφος τη χρονική στιγμή $t=0$. Το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο δίσκο.

Να βρείτε:

- (α) (0,8) την επιτάχυνση a του σώματος και τη γωνιακή επιτάχυνση α του δίσκου
- (β) (0,4) την τάση T του σχοινιού.
- (γ) (0,3) τη ροπή τ που ασκεί το νήμα στο δίσκο
- (δ) (0,5) το ύψος x που έχει κατέλθει το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$
- (ε) (0,5) τον αριθμό n των στροφών που έχει κάνει ο δίσκος τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$
- (στ) (0,5) την κινητική ενέργεια της μάζας τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$
- (ζ) (0,5) την κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$
- (η) (0,5) το έργο του βάρους του σώματος ως τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$

Ροπή αδράνειας δίσκου ως προς το κέντρο του $I = \frac{1}{2}MR^2$.



Εικόνα 3

Λύση

Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου θα έχουν κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα και γραμμική επιτάχυνση με αυτές του αναρτημένου σώματος. Άρα η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου συνδέεται με τη γραμμική επιτάχυνση του αναρτημένου σώματος

με τη σχέση: $a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$

Αντίστοιχα θα ισχύει για τις ταχύτητες: $v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα (θεμελιώδης νόμος μηχανικής) στην κατάλληλη μορφή του για τα δύο σώματα

Μεταφορική κίνηση σώματος: $\sum F = ma \Rightarrow B - T = ma \quad (1)$

Στροφική κίνηση καρουλιού (δίσκου): $\sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}Ma \quad (2)$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε την a και αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε την T .

$$(1)+(2) : B - T + T = ma + \frac{1}{2}Ma \Rightarrow mg = a \cdot \left(m + \frac{M}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow$$

$$a = \frac{5 \cdot 10}{5 + \frac{10}{2}} = \frac{50}{5+5} = \frac{50}{10} \Rightarrow \boxed{a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{5}{0,2} = \frac{50}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{10 \cdot 5}{2} \Rightarrow \boxed{T = 25 \text{ N}}$$

$$\tau = TR = 25 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{\tau = 5 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη) κίνηση και ο δίσκος κάνει στροφική ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη) κίνηση. Άρα ισχύουν οι εξισώσεις :

Σώμα

$$v = at$$

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

Δίσκος

$$\omega = \alpha t$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Οπότε :

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2^2 \Rightarrow \boxed{x = 10 \text{ m}}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 2^2 \Rightarrow \theta = 50 \text{ rad}$$

Επειδή μια στροφή είναι γωνία 2π ακτίνια (rad) διαιρώντας τη γωνία θ που έχει περιστραφεί ο δίσκος με 2π βρίσκουμε πόσες στροφές έχει κάνει

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi} \Rightarrow \boxed{n = 15,9 \text{ στροφές}}$$

Για τις κινητικές ενέργειες χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ταχύτητες

$$v = at = 5 \cdot 2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\omega = \alpha t = 25 \cdot 2 = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{10}{0,2} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Οπότε

$$K_{\text{σώματος}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 \Rightarrow \boxed{K_{\text{σώματος}} = 250 \text{ J}}$$

$$K_{\text{δίσκου}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega^2 = \frac{10 \cdot 0,2^2 \cdot 50^2}{4} \Rightarrow \boxed{K_{\text{δίσκου}} = 250 \text{ J}}$$

Το βάρος B είναι στην ίδια κατεύθυνση με την κατακόρυφη μετατόπιση x οπότε το έργο του δίνεται από τον τύπο

$$W_{\text{βάρους}} = B \cdot x = mgx = 5 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{W_{\text{βάρους}} = 500 \text{ J}}$$

Παρατηρούμε ότι το έργο του βάρους έγινε κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων

$$W_{\text{βάρους}} = K_{\text{σώματος}} + K_{\text{δίσκου}} \Rightarrow 500 = 250 + 250$$

Οι κινητικές ενέργειες των δύο σωμάτων τυχαίνει σε αυτή την άσκηση να είναι ίσες και θα είναι ίσες κάθε χρονική στιγμή επειδή το περιστρεφόμενο σώμα είναι δίσκος με μάζα διπλάσια από τη μάζα του σώματος $M = 2m$

$$K_{\text{δίσκου}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = K_{\text{σώματος}}$$

Το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχτεί είναι ίσο με το μήκος του τόξου s που κάλυψε ένα σημείο της περιφέρειας του δίσκου

$$s = R\theta = 0,2 \cdot 50 = 10 \text{ m}$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι αφού το νήμα δεν γλιστράει όπως ξετυλίγεται, το μήκος που ξετυλίχτηκε είναι ίσο με το ύψος που κατέβηκε το κρεμασμένο σώμα

$$s = x = 10 \text{ m}$$