

ΤΕΙ ΔΥΤ. ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2018-19
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ (1^ο Εξαμήνου)
Δευτέρα, 10 Ιουνίου 2019

Εισηγητής: Κώστας Φιλίππιδης - kphilippides@teiwm.gr

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

Όπου απαιτείται παρακάτω, θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$

Θέμα 1 Κινηματική της ευθύγραμμης ομαλής και ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης
(Μονάδες 2,6)

Αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα σε αυτοκινητόδρομο με σταθερή ταχύτητα v_A και τη χρονική στιγμή $t=0$ περνάει δίπλα από σταθμευμένο μοτοσυκλετιστή της τροχαίας ($v_{M0}=0$) ο οποίος εκείνη τη στιγμή ξεκινάει και γκαζώνει με σταθερή επιτάχυνση a για να το προφτάσει.

Τη χρονική στιγμή $t=t_1$ ο μοτοσυκλετιστής έχει αποκτήσει ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αυτοκινήτου, δηλ. $v_M = v_A$

Τη χρονική στιγμή $t=t_2$ ο μοτοσυκλετιστής φτάνει το αυτοκίνητο, δηλ. $x_M = x_A$

1.1) [1] Να δείξετε ότι τη χρονική στιγμή t_1 που πιάνει ταχύτητα v_A , ο μοτοσυκλετιστής έχει καλύψει τη μισή απόσταση από αυτή που έχει διανύσει το αυτοκίνητο $x_M = x_A/2$

1.2) [1] Να δείξετε ότι τη χρονική στιγμή t_2 που φτάνει το αυτοκίνητο, ο μοτοσυκλετιστής έχει διπλάσια ταχύτητα από το αυτοκίνητο $v_M = 2v_A$

Τα παραπάνω να αποδειχτούν **χωρίς νούμερα**.

[Οι εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, όταν το κινητό ξεκινά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από την αρχή των αξόνων $x_0 = 0$ με αρχική ταχύτητα v_0 , είναι :

$$a = \text{σταθ.}: \quad v = v_0 + at \quad (1), \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2), \quad v^2 = v_0^2 + 2ax \quad (3), \quad \frac{x}{t} = \frac{v_0 + v}{2} \quad (4).$$

Οι εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης είναι οι ίδιες με τις παραπάνω, θέτοντας $a=0$:

$$a = 0: \quad v = \text{σταθ} \quad , \quad x = vt \quad .]$$

1.3) [0,6] Αριθμητική εφαρμογή. Να βρείτε τους χρόνους t_1 και t_2 και τις αντίστοιχες αποστάσεις που έχουν διανύσει τα οχήματα, αν η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι 180 km/h και η επιτάχυνση της μοτοσυκλέτας 2 m/s^2

Λύση

1.1 Η ταχύτητα του αυτοκινήτου δίνεται από τη σχέση (2) $v_A = \frac{x_A}{t_1}$. Η ταχύτητα της

μοτοσυκλέτας δίνεται από τη σχέση (4) $\frac{x_M}{t_1} = \frac{v_{M0} + v_M}{2} \Rightarrow \frac{x_M}{t_1} = \frac{0 + v_M}{2} \Rightarrow v_M = \frac{2x_M}{t_1}$.

Αφού οι ταχύτητες γίνονται ίσες τη χρονική στιγμή t_1 , τις εξισώνουμε και παίρνουμε τη σχέση που θα συνδέει τις αντίστοιχες αποστάσεις που έχουν διανύσει ως εκείνη τη στιγμή :

$$v_M = v_A \Rightarrow \frac{2x_M}{t_1} = \frac{x_A}{t_1} \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{x_A}{2}} \quad \text{όταν } t = t_1$$

Η πιο γρήγορη λύση είναι αυτή που βρήκα όταν διόρθωνα τα γραπτά σας :

$$x_M = \frac{1}{2} at_1^2 = \frac{1}{2} \cdot a t_1 \cdot t_1 = \frac{1}{2} \cdot v_A \cdot t_1 = \frac{1}{2} \cdot x_A$$

1.2 Από τις ίδιες σχέσεις (2) και (4) παίρνουμε για τις θέσεις των οχημάτων την χρονική στιγμή t_2 : $x_A = v_A t_2$ και $x_M = \frac{v_M}{2} \cdot t_2$. Αφού ο μοτοσυκλετιστής φτάνει το αυτοκίνητο, τα οχήματα συναντιούνται και άρα οι θέσεις τους συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t = t_2$. Οπότε εξισώνοντας τις θέσεις βρίσκουμε τη σχέση των ταχυτήτων τους εκείνη τη στιγμή:

$$x_A = x_M \Rightarrow v_A t_2 = \frac{v_M}{2} t_2 \Rightarrow \boxed{v_M = 2v_A} \quad \text{όταν } t = t_2 \text{ kh}$$

$$\text{Η } v_A = \frac{x_A}{t_2} = \frac{x_M}{t_2} = \frac{\frac{1}{2} a t_2^2}{t_2} = \frac{1}{2} a t_2 = \frac{v_M}{2}$$

1.3 Μετατρέπουμε πρώτα την ταχύτητα σε θεμελιώδεις μονάδες SI όπως είναι και η επιτάχυνση.

$$180 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 180 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\text{m}}{\text{km}} \cdot \frac{\text{h}}{3600\text{s}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για $t = t_1$ οι ταχύτητες των οχημάτων γίνονται ίσες, οπότε :

$$v_M = v_A \Rightarrow a t_1 = v_A \Rightarrow t_1 = \frac{v_A}{a} \Rightarrow t_1 = \frac{50}{2} \Rightarrow \boxed{t_1 = 25 \text{ s}}$$

$$x_A = v_A t_1 = 50 \cdot 25 \Rightarrow \boxed{x_A = 1.250 \text{ m} = 1,25 \text{ km}}$$

$$x_M = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 25^2 \Rightarrow \boxed{x_M = 625 \text{ m}} \text{ μισή του αυτοκινήτου.}$$

Για $t = t_2$ οι θέσεις των οχημάτων γίνονται ίσες, οπότε :

$$x_M = x_A \Rightarrow \frac{1}{2} a t_2^2 = v_A t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{2v_A}{a} \Rightarrow t_2 = \frac{2 \cdot 50}{2} \Rightarrow \boxed{t_2 = 50 \text{ s}}$$

$$x_A = v_A t_1 = 50 \cdot 50 \Rightarrow \boxed{x_A = 2.500 \text{ m} = 2,5 \text{ km}}$$

$$x_M = \frac{1}{2} a t_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 50^2 \Rightarrow \boxed{x_M = 2.500 \text{ m} = 2,5 \text{ km}} \text{ ίδια με του αυτοκινήτου.}$$

Η μοτοσυκλέτα θα φτάσει το αυτοκίνητο μετά από δύομιση χιλιόμετρα. Θα έχει τότε ταχύτητα διπλάσια του αυτοκινήτου

$$v_M = a t_2 = 2 \cdot 50 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 360 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Αυτή είναι μια πολλή ψηλή ταχύτητα, τάξης ρεκόρ του MotoGP, αλλά ρεαλιστική για χιλιάρα μηχανή.! Η μεγαλύτερη ταχύτητα που έχει καταγραφεί στο MotoGP είναι 356.5 km/h (Κυρ. 3/6/2018, Andrea Dovizioso, Ducati Team, Autodromo del Mugello). Οι μηχανές του MotoGP (1000cc) μπορούν βέβαια και επιταχύνουν με μεγαλύτερη επιτάχυνση $5 - 8 \text{ m/s}^2$, όμως στις πίστες δεν υπάρχουν τόσο μεγάλες ευθείες ώστε να προλάβουν να πιάσουν μεγαλύτερες ταχύτητες καθώς πρέπει να επιβραδύνουν για να στρίψουν. Πάντως το επίσημο ρεκόρ ταχύτητας με μοτοσυκλέτα (1.299 cc) είναι 605.697 km/h, που είναι ο μέσος όρος δύο διαδρομών ενός μιλίου, μπρος πίσω. Η γρήγορη διαδρομή είχε ταχύτητα 634.217 km/h (25/9/2010 Cook Motorsports Top Speed Shootout, Bonneville Speedway, Utah, Rocky Robinson, Ack Attack Team)

Θέμα2 Διατήρηση Ορμής – Κεντρική Ελαστική Κρούση (Μονάδες 2)

Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 1 \text{ kg}$ και $m_2 = 9 \text{ kg}$ που κινούνται αρχικά με ταχύτητες v_1 και v_2 αντίστοιχα, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.

2.1 [1,6] Αν οι ταχύτητές τους μετά την κρούση είναι $v'_1 = 6 \text{ m/s}$ και $v'_2 = 1 \text{ m/s}$ ποιες ήταν οι αρχικές τους ταχύτητες v_1 και v_2 πριν την κρούση.

2.2 [0,4] Να κάνετε σχήματα όπου να φαίνονται οι ταχύτητες πριν και μετά την κρούση.

[Δίνονται οι τύποι για την ελαστική κεντρική κρούση που δίνουν τις τελικές ταχύτητες v_1', v_2' σαν συνάρτηση των αρχικών ταχυτήτων v_1, v_2 πριν την κρούση

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (1), \quad v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)]$$

Λύση

2.1 Στην κεντρική ελαστική κρούση εκτός από την ορμή P του συστήματος των δυο σωμάτων, διατηρείται και η κινητική τους ενέργεια K . Οι τιμές τους παραμένουν ίδιες πριν και μετά την κρούση :

$$P_{\text{μετά}} = P_{\text{πριν}} \text{ και } K_{\text{μετά}} = K_{\text{πριν}}.$$

Αυτές είναι δύο εξισώσεις τις οποίες μπορούμε να λύσουμε για δύο αγνώστους που συνήθως είναι οι ταχύτητες v_1' και v_2' μετά την κρούση αν γνωρίζουμε τις ταχύτητες v_1 και v_2 των σωμάτων πριν την κρούση.

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (A)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (B)$$

Η λύση των εξισώσεων για τις v_1' και v_2' είναι

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (1), \quad v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Όμως παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (A) και (B) είναι συμμετρικές στην αντιμετάθεση μεταξύ τονούμενων (τελικών) και μη τονούμενων (αρχικών) μεγεθών. Αν στις (A) και (B) βγάλουμε τους τόνους από τα τονούμενα μεγέθη και τους βάλουμε στα μη τονούμενα, οι εξισώσεις παραμένουν ακριβώς οι ίδιες (αναλλοίωτες). Αυτή η συμμετρία πρέπει να αντικατοπτρίζεται και στις (1) και (2) που είναι ισοδύναμες με τις (A) και (B).

Έτσι τώρα που γνωρίζουμε τις τελικές ταχύτητες (τονούμενες) και ψάχνουμε τις αρχικές (μη τονούμενες) δεν χρειάζεται να ξαναλύσουμε τις (A) και (B) για τις αρχικές ταχύτητες. Θα δίνονται από τους ίδιους ακριβώς τύπους (1) και (2) απλά αλλάζοντας τους τόνους. Δηλαδή

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1' + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2' \quad (1') \quad \text{και} \quad v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2' + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1' \quad (2')$$

Οπότε

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1' + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2' = \frac{1-9}{1+9} \cdot 6 + \frac{2 \cdot 9}{1+9} \cdot 1 = \frac{-48+18}{10} \Rightarrow$$

$$v_1 = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2' + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1' = \frac{9-1}{1+9} \cdot 1 + \frac{2 \cdot 1}{1+9} \cdot 6 = \frac{8+12}{10} \Rightarrow$$

$$v_2 = +2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αν κάποιος δεν σκεφτεί αυτή τη συμμετρία ώστε να χρησιμοποιήσει τους έτοιμους τύπους (1) και (2) που δίνονται, τότε αντικαθιστά τις τιμές στους τύπους και λύνει το σύστημα 2x2 που προκύπτει, με όποιο τρόπο μπορεί.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1' + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2' \Rightarrow 6 = \frac{1-9}{1+9} \cdot v_1' + \frac{2 \cdot 9}{1+9} \cdot v_2' \\ v_2 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2' + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1' \Rightarrow 1 = \frac{9-1}{1+9} \cdot v_2' + \frac{2 \cdot 1}{1+9} \cdot v_1' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -0,8 \cdot v_1' + 1,8 \cdot v_2' = 6 \\ 0,2 \cdot v_1' + 0,8 \cdot v_2' = 1 \end{cases}$$

Με ορίζουσες

$$D = \begin{vmatrix} -0,8 & 1,8 \\ 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} = (-0,8) \cdot 0,8 - 1,8 \cdot 0,2 = -0,64 - 0,36 = -1$$

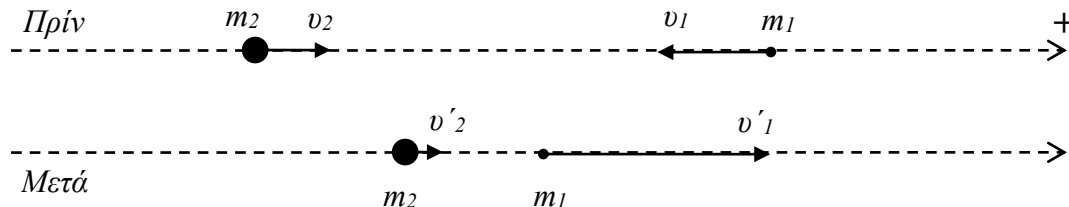
$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1,8 \\ 1 & 0,8 \end{vmatrix} = 6 \cdot 0,8 - 1,8 \cdot 1 = 4,8 - 1,8 = 3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -0,8 & 6 \\ 0,2 & 1 \end{vmatrix} = (-0,8) \cdot 1 - 6 \cdot 0,2 = -0,8 - 1,2 = -2$$

$$v_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{-1} = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-2}{-1} = +2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.2



Πρόβλημα 3

Έργο – Ενέργεια

(Μονάδες 2,4)

Κυβάκι μάζας $m = 2,0$ εφάπτεται με οπλισμένο ελατήριο σταθεράς $k = 800 \text{ N/m}$ που έχει συσπειρωθεί κατά $x_0 = 0,25 \text{ m}$. Τη χρονική $t=0$ το ελατήριο απελευθερώνεται το κυβάκι επιταχύνεται από τη δύναμη του ελατηρίου πάνω σε λείο δάπεδο και την χρονική στιγμή t_1 χάνει την επαφή του με αυτό και εκτοξεύεται με ταχύτητα v_1 . Στη συνέχεια το κυβάκι ολισθαίνει σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο, που παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$, για απόσταση $x_1=0,9 \text{ m}$ πριν συναντήσει, τη χρονική στιγμή t_2 , λείο κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας $\theta=30^\circ$ από την οριζόντιο, στο οποίο ανέρχεται μέχρι να σταματήσει στιγμιαία τη χρονική στιγμή t_3 , αφού έχει διανύσει διάστημα x_2 . Για την γωνία θ ισχύει $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$.

3.1) [0,8] Ποια είναι η τιμή της ταχύτητας v_1 που έχει το κυβάκι τη στιγμή που χάνει την επαφή του με το ελατήριο ;

3.2) [0,8] Ποια είναι η τιμή της ταχύτητας v_2 που έχει το κυβάκι τη στιγμή t_2 που συναντά το κεκλιμένο επίπεδο ;

3.3) [0,8] Ποια είναι η τιμή του διαστήματος x_3 που διανύει το κυβάκι πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο;

3.4)* Πρόσθετες μονάδες επιβράβευσης

(Μονάδες 2)*

Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα :

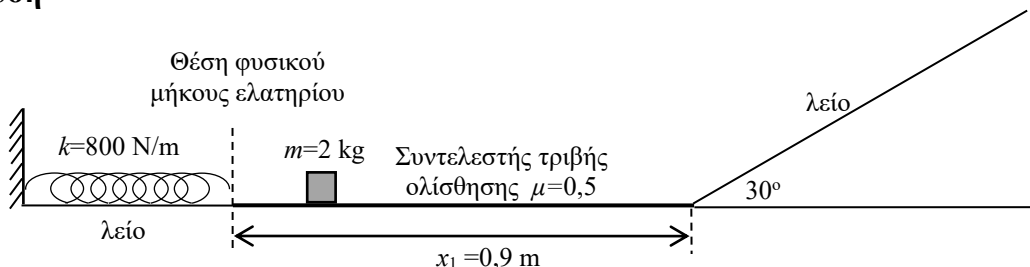
3.4.a. Δt_0 που το κυβάκι είναι σε επαφή με το ελατήριο **(0,4)**,

3.4.b. Δt_1 που διανύει το οριζόντιο δάπεδο επιβραδυνόμενο **(0,4)**,

3.4.c. Δt_2 που ανέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει **(0,4)** καθώς και

3.4.d. την τελική συσπίρωση του ελατηρίου x_3 όταν το κυβάκι επιστρέψει και το συμπίεσει μέχρι να σταματήσει. **(0,8)**

Λύση



Σπρώξιμο από το ελατήριο στο λείο δάπεδο : Η αρχική ενέργεια του κύβου είναι ελαστική δυναμική ενέργεια από το ελατήριο :

$$E_i = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} 800 \cdot 0,25^2 = 25 \text{ J}$$

Διατήρηση της ενέργειας (η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική δύναμη)

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = x\sqrt{\frac{k}{m}} = 0,25\sqrt{\frac{800}{2}} = 0,25\sqrt{400} = 0,25 \cdot 20 \Rightarrow \boxed{v_1 = 5 \text{ m/s}}$$

Ολίσθηση με τριβή στο οριζόντιο επίπεδο :

Τριβή : $f = \mu N = \mu mg = 0,5 \cdot 2 \cdot 10 = 10 \text{ N}$

Έργο τριβής: $W_f = -fx_2 = -10 \cdot 0,9 = -9 \text{ J}$

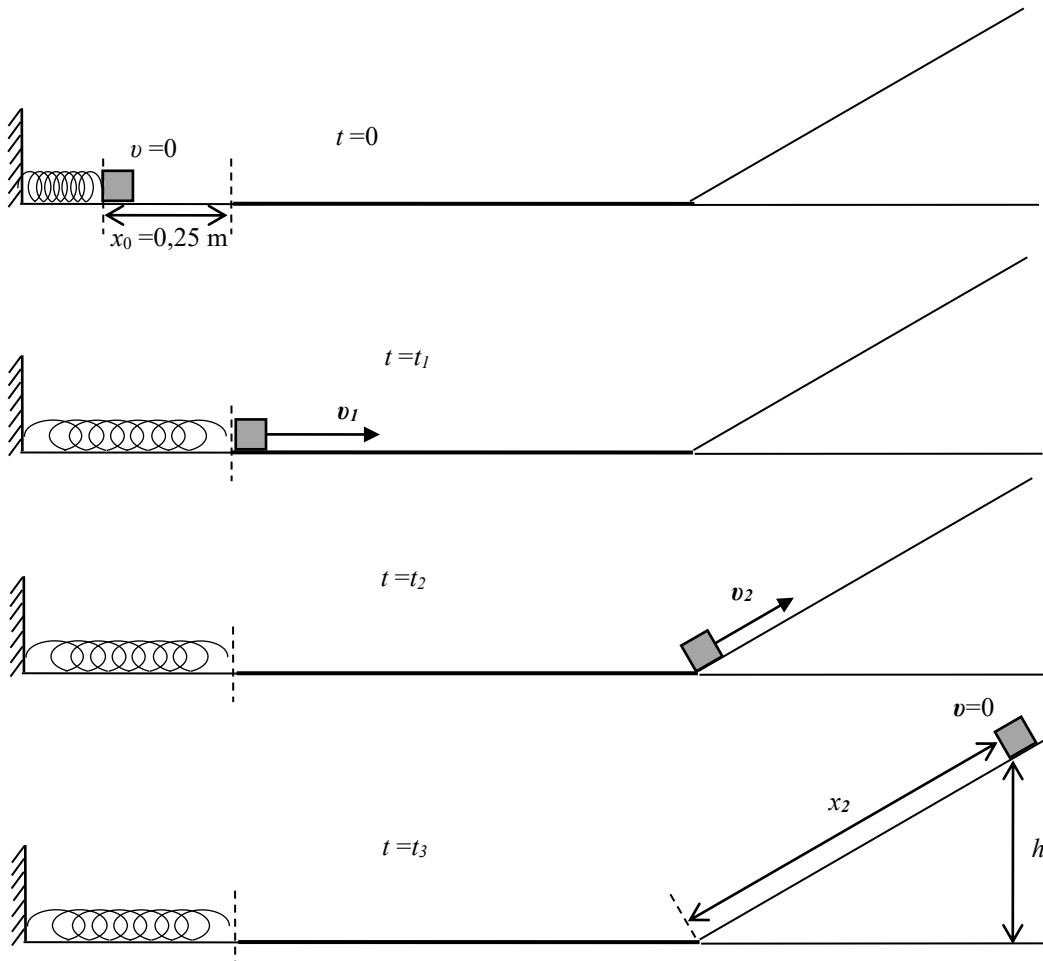
Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (η τριβή δεν είναι συντηρητική δύναμη)

$$\Delta K = W_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -fx_2 \Rightarrow mv_2^2 - mv_1^2 = -2\mu mgx_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2\mu gx_2} \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot 0,9} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} \Rightarrow \boxed{v_2 = 4 \text{ m/s}}$$

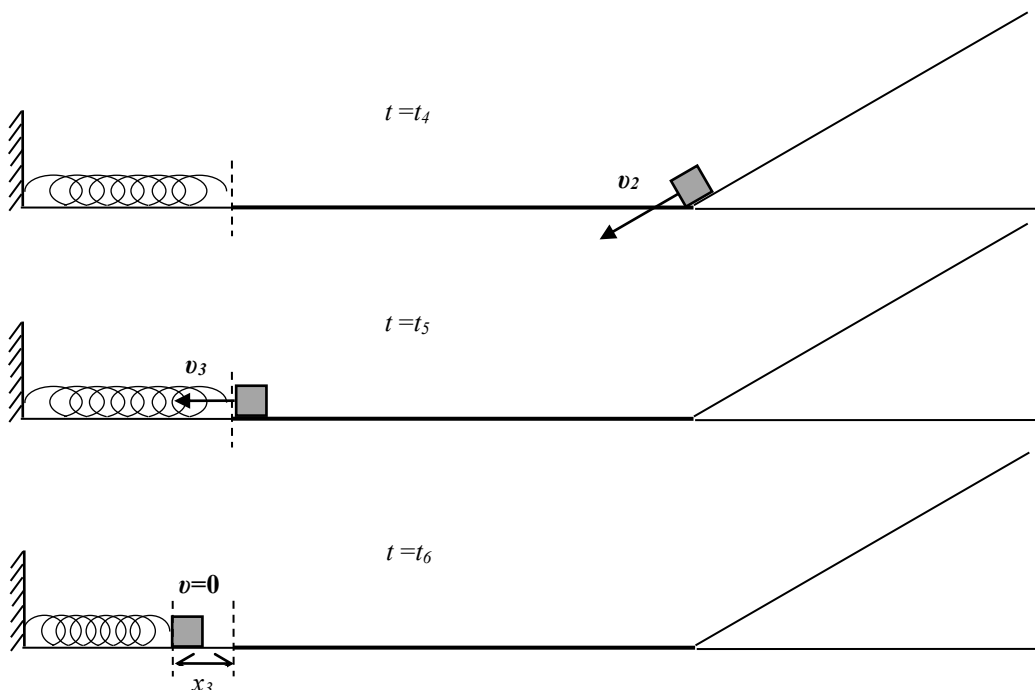
Ανάβαση στο λείο κεκλιμένο επίπεδο : Διατήρηση της ενέργειας (το βάρος είναι συντηρητική δύναμη)

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{4^2}{2 \cdot 10} = \frac{16}{20} = 0,8 \text{ m} \quad \eta\mu\theta = \frac{h}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{h}{\eta\mu\theta} = \frac{0,8}{1/2} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1,6 \text{ m}}$$



Πρόσθετες μονάδες επιβράβευσης

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = t_0 + \Delta t_0 = \Delta t_0$ που το κυβάκι είναι σε επαφή με το ελατήριο, το οποίο το σπρώχνει, το κυβάκι εκτελεί **απλή αρμονική ταλάντωση**. Το κυβάκι πάει από την ακραία θέση απομάκρυνσης ως τη θέση ισορροπίας αρά κάνει χρονικά το ένα τέταρτο της ταλάντωσης.



Στη θέση ισορροπίας που είναι και η θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος το ελατήριο παύει να σπρώχνει και το κυβάκι χάνει την επαφή του με αυτό γιατί δεν είναι προσδεσμένο σε αυτό. Το χρονικό διάστημα Δt_0 είναι ίσο με το ένα τέταρτο της περιόδου της

ταλάντωσης που δίνεται από τον τύπο : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\Delta t_0 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{800}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{\pi}{40} \text{ s} = 0,07854 \text{ s} \Rightarrow \boxed{\Delta t_0 = 0,079 \text{ s}}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το χρονόμετρο δείχνει : $t_1 = \frac{\pi}{40} \text{ s} = 0,079 \text{ s}$

Από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \Delta t_1$, δηλαδή κατά το χρονικό διάστημα Δt_1 το κυβάκι διανύει απόσταση x_1 εκτελώντας **ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση** λόγω τριβής. Από το θεώρημα της μέσης ταχύτητας παίρνουμε (εξίσωση (4) Θέμα 1)

$$\frac{x_1}{\Delta t_1} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{2x_1}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 0,9}{5 + 4} = \frac{1,8}{9} \Rightarrow \boxed{\Delta t_1 = 0,2 \text{ s}}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 το χρονόμετρο δείχνει: $t_2 = 0,079 + 0,2 \Rightarrow \boxed{t_2 = 0,279 \text{ s}}$

Από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή $t_3 = t_2 + \Delta t_2$, δηλαδή κατά το χρονικό διάστημα Δt_2 το κυβάκι διανύει απόσταση x_2 εκτελώντας και πάλι **ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση** έως να σταματήσει, λόγω του βάρους. Από το θεώρημα της μέσης ταχύτητας παίρνουμε :

$$\frac{x_2}{\Delta t_2} = \frac{v_2 + 0}{2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2x_2}{v_2} = \frac{2 \cdot 1,6}{4} \Rightarrow \boxed{\Delta t_2 = 0,8 \text{ s}}$$

Τη χρονική στιγμή t_3 το χρονόμετρο δείχνει : $t_3 = 0,279 + 0,8 \Rightarrow \boxed{t_3 = 1,079 \text{ s}}$

Στη συνέχεια το κυβάκι θα ξανακυλήσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, όπου θα φτάσει με την ίδια ταχύτητα v_2 αφού δεν υπάρχει τριβή στο κεκλιμένο επίπεδο, το έργο της οποίας να του αφαιρέσει ενέργεια.

Διανύοντας όμως, κατά την επιστροφή του, το οριζόντιο επίπεδο το κυβάκι θα χάσει πάλι ενέργεια λόγω τριβής. Το ίδιο ποσό ενέργειας που έχασε και την πρώτη φορά που διέσχισε αυτή τη διαδρομή :

$$W_f = -f \cdot x_1 = -\mu N \cdot x_1 = -\mu mgx_1 = -0,5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0,9 = -9 \text{ J}$$

Στο τέλος θα καταλήξει πάλι μπροστά στο ελατήριο με τελική ενέργεια (κινητική) όση είχε αρχικά, μείον το συνολικό έργο της τριβής στις δύο οριζόντιες διαδρομές μπρος πίσω

$$E_f = E_i + 2W_f = 25 - 2 \cdot 9 = 7 \text{ J}$$

Από διατήρηση της ενέργειας όλη αυτή η ενέργεια που είναι κινητική θα γίνει ελαστική δυναμική ενέργεια όταν το ελατήριο συμπιεσθεί έως να σταματήσει το κυβάκι

$$E_f = \frac{1}{2} kx_3^2 \Rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{2E_f}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{800}} \Rightarrow \boxed{x_3 = 0,132 \text{ m}}$$

[Σημείωση ειλικρίνειας : Πάντως τέτοιο κυβάκι δεν μπορεί να υπάρξει. Όταν λέμε κυβάκι εννοούμε κάτι μικρό, που να έχει όγκο περίπου $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$. Υλικό που να έχει τόσο μικρό όγκο και μάζα 2 kg θα είχε πυκνότητα :

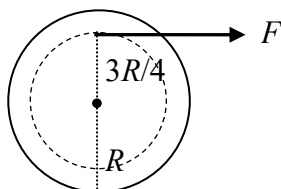
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2 \text{ kg}}{\text{cm}^3} = \frac{2 \text{ kg}}{(10^{-2} \text{ m})^3} = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^3 = 2.000.000 \text{ kg/m}^3 .$$

Τέτοια πυκνότητα δεν έχει κανένα υλικό στη Γη! Το στοιχείο Όσμιο που είναι το πιο πυκνό υλικό στη Γη έχει πυκνότητα 22.590 kg/m^3 . Πυκνά πετρώματα όπως ο βασάλτης και ο γρανίτης έχουν πυκνότητες περίπου 2.900 kg/m^3 και 2.700 kg/m^3 αντίστοιχα. Για σύγκριση, το νερό έχει πυκνότητα 1.000 kg/m^3 .

Θέμα 4

Δυναμική συμπαγούς σώματος (Μονάδες 3)

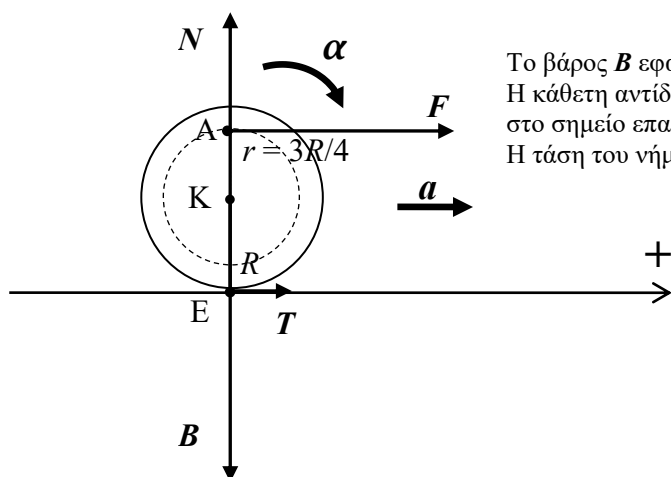
Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας R και μάζας $M=70 \text{ kg}$ έχει μικρή εγκοπή στο μέσο του, όπου βρίσκεται τυλιγμένο αβαρές μη εκτατό νήμα σε απόσταση $r=3R/4$ από το κέντρο του. Τραβάμε το νήμα οριζόντια με δύναμη $F=240 \text{ N}$ και ο κύλινδρος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να γλιστρά πάνω στον κύλινδρο. Η ροπή αδράνειας κυλινδρικού σώματος δίνεται από τον τύπο $I = \kappa MR^2$, με $\kappa=1/2$ για συμπαγή κύλινδρο.



4.1 [2,7] Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που δρουν στον κύλινδρο (0,4) και να υπολογίσετε την επιτάχυνση (1) του κέντρου μάζας του και τη δύναμη της στατικής τριβής (1). Προς τα πού είναι η κατεύθυνση της στατικής τριβής; Προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά; (0,3)

4.2 [0,3] Ποιος είναι ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής $\mu_{s\min}$ μεταξύ του δαπέδου και του κυλίνδρου ώστε ο κύλινδρος να εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση?

Λύση



Το βάρος B εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους στο σημείο K
 Η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T εφαρμόζονται
 στο σημείο επαφής με το δάπεδο E
 Η τάση του νήματος F εφαρμόζεται στο σημείο A

Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση

$$\sum F_y = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_x = ma \quad (2)$$

και τη στροφική κίνηση

$$\sum \tau = I\alpha \quad (3)$$

καθώς και την συνθήκη κύλισης

$$a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} \quad (4)$$

παίρνουμε, αντικαθιστώντας την (4) στην (3)

$$F + T = ma \quad (2)$$

$$Fr - TR = I\alpha \Rightarrow Fr - TR = \kappa m R^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow F \frac{r}{R} - T = \kappa ma \quad (5)$$

Προσθέτοντας την (2) στην (5), η T απαλείφεται και βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$F + F \frac{r}{R} = ma + \kappa ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} \cdot \frac{1 + r/R}{1 + \kappa}$$

$$a = \frac{240}{70} \cdot \frac{1 + 3/4}{1 + 1/2} = \frac{24}{7} \cdot \frac{7/4}{3/2} \Rightarrow a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Αντικαθιστούμε την παραπάνω έκφραση στην (2') και βρίσκουμε τη στατική τριβή

$$T = ma - F = 70 \cdot 4 - 240 \Rightarrow T = 40 \text{ N}$$

ή

$$T = ma - F = m \frac{F}{m} \cdot \frac{1 + r/R}{1 + \kappa} - F = F \left(\frac{1 + r/R - 1 - \kappa}{1 + \kappa} \right) \Rightarrow T = F \frac{r/R - \kappa}{1 + \kappa}$$

$$T = 240 \cdot \frac{\frac{3-2}{3}}{\frac{3}{2}} = 240 \cdot \frac{2}{12} \Rightarrow T = 40 \text{ N}$$

Η κατεύθυνση της τριβής είναι προς τα δεξιά (έχει θετικό πρόσημο).

Αν είχατε ζωγραφίσει την τριβή προς τα αριστερά, που είναι και το πιο συνηθισμένο, θα είχατε βρει $T = -40 \text{ N}$. Το μείον πρόσημο θα σήμαινε ότι η τριβή είναι στην πραγματικότητα προς τα δεξιά.

3.2 Από την (1) βρίσκουμε την κάθετη αντίδραση N :

$$N - B = 0 \Rightarrow N = B = mg = 70 \cdot 10 = 700 \text{ N} \quad (1)$$

Για τη στατική τριβή πρέπει να ισχύει

$$T \leq \mu_s N \Rightarrow \frac{T}{N} \leq \mu_s \Rightarrow \frac{40}{700} \leq \mu_s \Rightarrow \mu_{s \min} = \frac{4}{70} = 0,057$$