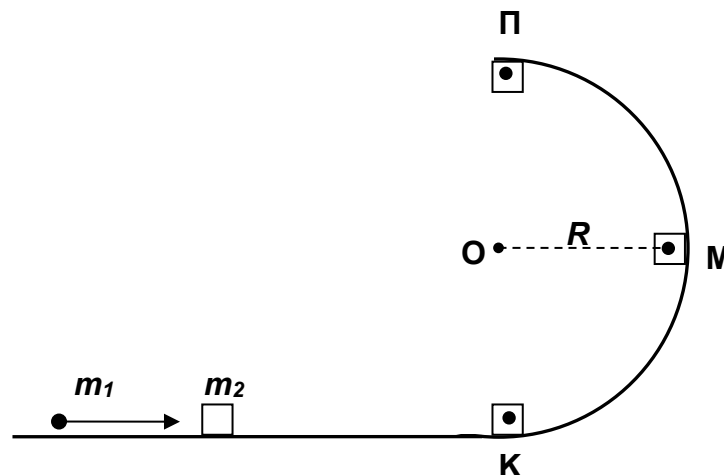


Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

Όπου απαιτείται στα παρακάτω προβλήματα, θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$

Πρόβλημα 1

(Μονάδες 4)



Σφαίρα μάζας $m_1 = 1,00 \text{ kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_1 = 16\sqrt{5} \text{ m/s}$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 3,00 \text{ kg}$ και στη συνέχεια το συσσωμάτωμα εισέρχεται σε κατακόρυφο ημικυκλικό οδηγό ακτίνας $R = 1,60 \text{ m}$ όπου εκτελεί κυκλική κατακόρυφη κίνηση ενώ τέλος από το ανώτατο σημείο Π εκτελεί οριζόντια βολή. Τα δάπεδα είναι λεία.

1.1 Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση;

(Μονάδες 1)

1.2 Ποια είναι ταχύτητα του συσσωματώματος στο ανώτατο σημείο Π του οδηγού και στο σημείο M του οδηγού, όπου η ακτίνα OM είναι οριζόντια;

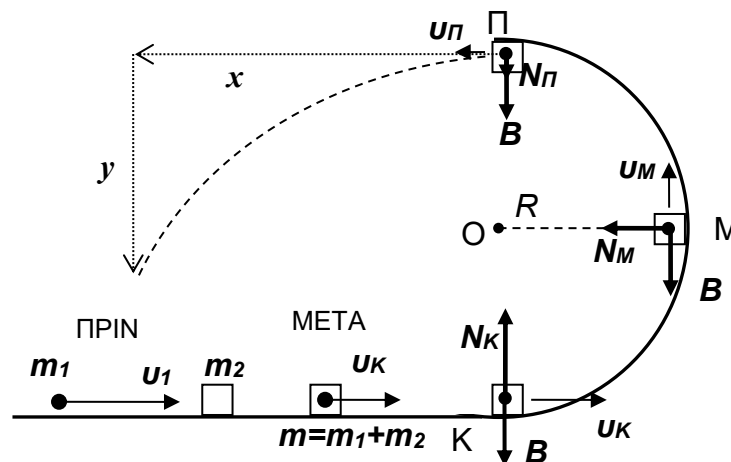
(Μονάδες 1)

1.3 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δρουν στο συσσωμάτωμα και να υπολογίσετε την κάθετη αντίδραση του δαπέδου στα ίδια σημεία M και Π .

(Μονάδες 1)

1.4 Πόσο είναι το βεληνεκές της οριζόντιας βολής;

(Μονάδες 1)



1.1 Διατήρηση ορμής στην κρούση: $P' = P \Rightarrow (m_1 + m_2)v_K = m_1 v_1 \Rightarrow v_K = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$

$$v_K = \frac{1}{1+3} 16\sqrt{5} \Rightarrow v_K = 4\sqrt{5} \text{ m/s}$$

1.2 Διατήρηση ενέργειας στην κίνηση μετά την κρούση

$$E_K = E_M \Rightarrow K_K + U_K = K_M + U_M \Rightarrow \frac{1}{2}mv_K^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_M^2 + mgR \Rightarrow v_M^2 = v_K^2 - 2gR$$

$$v_M^2 = 4^2 \cdot 5 - 2 \cdot 10 \cdot 1,6 = 5 \cdot 16 - 2 \cdot 16 = 3 \cdot 16 \Rightarrow v_M = 4\sqrt{3} = 6,93 \text{ m/s}$$

$$E_K = E_M \Rightarrow K_K + U_K = K_{\Pi} + U_{\Pi} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_K^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_{\Pi}^2 + mg \cdot 2R \Rightarrow v_{\Pi}^2 = v_K^2 - 4gR$$

$$v_{\Pi}^2 = 4^2 \cdot 5 - 4 \cdot 10 \cdot 1,6 = 5 \cdot 16 - 4 \cdot 16 = 16 \Rightarrow v_{\Pi} = 4 \text{ m/s}$$

1.3 Κυκλική κίνηση κατακόρυφα – 2^{ος} νόμος Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση

$$\sum F_r = ma_{\kappa} \Rightarrow \sum F_r = m \frac{v^2}{R}$$

Στο σημείο Μ μόνο η κάθετη αντίδραση N είναι στην ακτινική (κεντρομόλο) διεύθυνση

$$\sum F_r = ma_{\kappa} \Rightarrow N_M = m \frac{v_M^2}{R} \Rightarrow N_M = 8 \frac{3 \cdot 16}{1,6} = 240 \text{ N}$$

Στο σημείο Π και το βάρος B και η κάθετη αντίδραση N είναι στην ακτινική (κεντρομόλο) διεύθυνση.

$$\sum F_r = ma_{\kappa} \Rightarrow N_{\Pi} + B = m \frac{v_{\Pi}^2}{R} \Rightarrow N_{\Pi} = m \frac{v_{\Pi}^2}{R} - mg = 8 \frac{16}{1,6} - 8 \cdot 10 = 80 - 80 = 0 \text{ N}$$

Αφού η κάθετη αντίδραση N είναι μηδέν σημαίνει ότι το κινητό περνάει από το σημείο Π με την ελάχιστη δυνατή ταχύτητα ώστε να παραμείνει πάνω στον κύκλο. Αυτή λέγεται ταχύτητα ανακύκλωσης.

$$0 + B = m \frac{v_{\text{ανακυκλ}}^2}{R} \Rightarrow mg = m \frac{v_{\text{ανακυκλ}}^2}{R} \Rightarrow v_{\text{ανακυκλ}}^2 = \sqrt{gR} = \sqrt{10 \cdot 1,6} = 4 \text{ m/s}$$

1.4 Από το σημείο Π και μετά έχουμε οριζόντια βολή

$$x = v_{\Pi} t \quad y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_{\Pi} = \sigma \tau \alpha \theta \quad v_y = g t$$

Χρόνος πτώσης όταν: $y=2R$

$$2R = \frac{1}{2} g t_{\pi\tau}^2 \Rightarrow t_{\pi\tau} = \sqrt{\frac{4R}{g}} \Rightarrow t_{\pi\tau} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,6}{10}} = \sqrt{4 \cdot 0,16} = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ s}$$

$$x_{\max} = v_{\Pi} t_{\pi\tau} \Rightarrow x_{\max} = 4 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ m} = 2R$$

Όταν το κινητό έχει στο σημείο Π την ταχύτητα ανακύκλωσης το βεληνεκές του είναι ίσο με το διπλάσιο της ακτίνας του κύκλου.

$$x_{\max} = v_{\text{ανακυκλ}} t_{\pi\tau} \Rightarrow x_{\max} = \sqrt{gR} \cdot \sqrt{\frac{4R}{g}} = \sqrt{4R^2} = 2R$$

Πρόβλημα 2

(Μονάδες 3)

Ένας κύβος μάζας $m = 10,00 \text{ kg}$ που αρχικά ηρεμεί, τραβιέται και σύρεται σε οριζόντιο δάπεδο με αβαρές και μη εκτατό νήμα που σχηματίζει γωνία θ πάνω από την οριζόντιο. Η τάση στο νήμα είναι ίση με $F = 100 \text{ N}$. Το δάπεδο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης με τον κύβο ίσο με $\mu=0,5$. Για την γωνία θ ισχύει $\eta\mu\theta = 0,8$ και $\sigma\upsilon\eta\theta=0,6$.

2.1 Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που δρουν στον κύβο

(Μονάδες 0,5)

2.2 Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων της κάθετης αντίδρασης N και της τριβής T που ασκούνται από το δάπεδο στον κύβο.

(Μονάδες 1)

2.3 Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κύβου

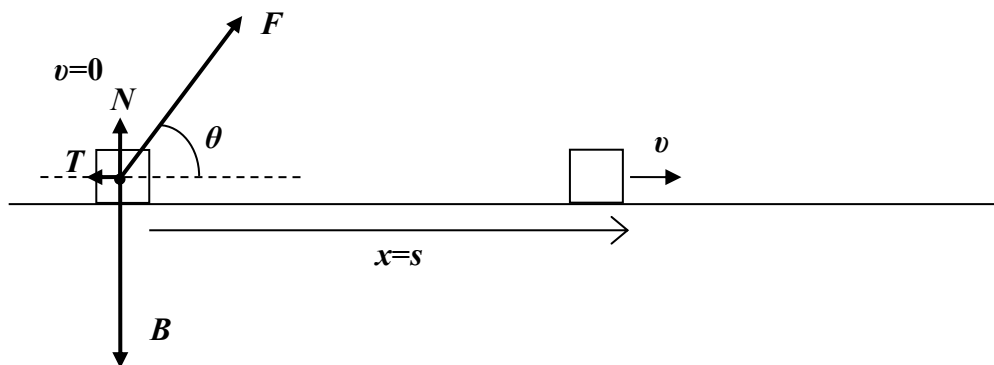
(Μονάδες 1)

2.4 Ποια είναι η ταχύτητα του κύβου όταν διανύσει διάστημα $s = 2,50 \text{ m}$

(Μονάδες 0,5)

Λύση

2.1



2.2

Ανάλυση διανύσματος σε συνιστώσες

$$F_x = F \sin \theta = 100 \cdot 0,6 = 60 \text{ N} \quad F_y = F \cos \theta = 100 \cdot 0,8 = 80 \text{ N}$$

Τύπος δύναμης βάρους

$$B = mg = 10 \cdot 10 = 100 \text{ N}$$

1^{ος} νόμος Νεύτωνα στην κατακόρυφη διεύθυνση (ισορροπία)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N + F_y = B \Rightarrow N = B - F_y = 100 - 80 \Rightarrow \boxed{N = 20 \text{ N}}$$

Τύπος δύναμης τριβής ολίσθησης

$$T = \mu N = 0,5 \cdot 20 \Rightarrow \boxed{T = 10 \text{ N}}$$

2.3

2^{ος} νόμος Νεύτωνα στην οριζόντια διεύθυνση (επιτάχυνση)

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F_x - T = ma \Rightarrow a = \frac{F_x - T}{m} = \frac{60 - 10}{10} \Rightarrow \boxed{a = 5 \text{ m/s}^2}$$

2.4

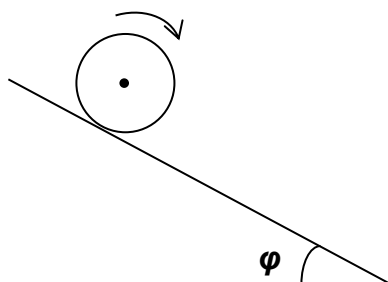
Από εξισώσεις ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης ή από θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$$v^2 = 2ax = 2 \cdot 5 \cdot 2,5 = 25 \Rightarrow \boxed{v = 5 \text{ m/s}}$$

Πρόβλημα 3

(Μονάδες 3)

Δίνεται συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας $M = 5,00 \text{ kg}$ και ακτίνας R . Αφήνουμε τη σφαίρα να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Για την γωνία φ ισχύει $\eta \mu \varphi = 0,6$ και $\sin \varphi = 0,8$. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας δίνεται από τον τύπο $I = \frac{2}{5} MR^2$

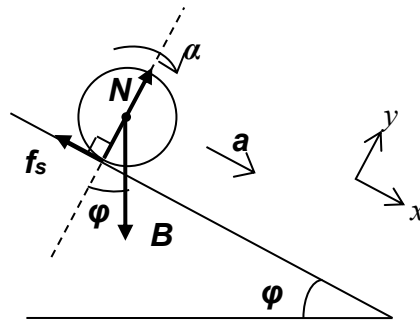


3.1 Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που δρουν στη σφαίρα και να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας της σφαίρας και το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής (Μονάδες 2)

3.2 Ποιος είναι ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής μ_{Smin} μεταξύ του κεκλιμένου επιπέδου και της σφαίρας ώστε η σφαίρα να εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση? (Μονάδες 1)

Λύση

3.1



Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση

$$\sum F_y = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_x = ma \quad (2)$$

και τη στροφική κίνηση

$$\sum \tau = I\alpha \quad (3)$$

καθώς και την συνθήκη κύλισης

$$a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} \quad (4)$$

παίρνουμε, αντικαθιστώντας την (4) στην (3)

$$N - B_y = 0 \Rightarrow N = mg \sin \theta \quad (1')$$

$$B_x - f_s = ma \Rightarrow mg \mu \theta - f_s = ma \quad (2')$$

$$f_s R = I\alpha \Rightarrow f_s R = \frac{2}{5} m R^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow f_s = \frac{2}{5} ma \quad (3')$$

Χρησιμοποιώντας την (3') στην (2') βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$mg \mu \theta - \frac{2}{5} ma = ma \Rightarrow \frac{2}{5} a + a = g \mu \theta \Rightarrow \boxed{a = \frac{5g \mu \theta}{7}} \Rightarrow a = \frac{5 \cdot 10 \cdot 0,6}{7} = \frac{30}{7} \Rightarrow \boxed{a = 4,29 \text{ m/s}^2}$$

και στη συνέχεια τη στατική τριβή

$$f_s = \frac{2}{5} ma = \frac{2}{5} m \cdot \frac{5g \mu \theta}{7} \Rightarrow \boxed{f_s = \frac{2mg \mu \theta}{7}} \Rightarrow f_s = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 0,6}{7} = \frac{60}{7} \Rightarrow \boxed{f_s = 8,57 \text{ N}}$$

3.2 Για τη στατική τριβή πρέπει να ισχύει

$$f_s \leq \mu_s N \Rightarrow \frac{2mg \mu \theta}{7} \leq \mu_s mg \sin \theta \Rightarrow \frac{2\mu \theta}{7 \sin \theta} \leq \mu_s \Rightarrow \boxed{\mu_{s \min} = \frac{2\mu \theta}{7 \sin \theta}}$$

$$\Rightarrow \mu_{s \min} = \frac{2 \cdot 0,6}{7 \cdot 0,8} = \frac{3}{14} \Rightarrow \boxed{\mu_{s \min} = 0,214}$$

Πρόβλημα 4

(Μονάδες 2)

Σώμα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 3m_1$.

4.1 Να δείξετε ότι οι ταχύτητές τους μετά την κρούση είναι αντίθετες $v_1' = -v_2'$. (Μονάδες 1)

4.2 Αν $v_1 = 10 \text{ m/s}$ ποιες είναι οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση? (Μονάδες 1)

Λύση

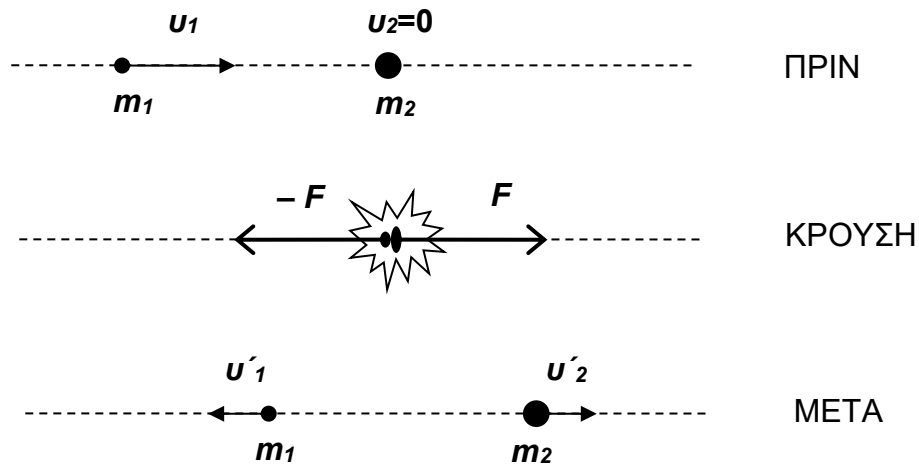
4.1

Από τη διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2'^2$$

καταλήγουμε τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης (τους οποίους παίρνουμε έτοιμους χωρίς να τους αποδεικνύουμε) :



$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

$$u'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

Οπότε για $u_2=0$ (ακίνητο στόχο) παίρνουμε:

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + 3m_1} u_1 = \frac{-2m_1}{4m_1} u_1 = -\frac{u_1}{2}$$

$$u'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_1} u_1 = \frac{2m_1}{4m_1} u_1 = \frac{u_1}{2}$$

Δηλαδή $u'_1 = -u'_2$

4.2

$$u'_1 = -\frac{u_1}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \text{ m/s} \quad u'_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ m/s}$$