

ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ Ι

Κεφάλαιο 4

Μέθοδοι ανάλυσης κυκλωμάτων

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Συστήματα εξισώσεων - Ορίζουσες
- Η μέθοδος των ρευμάτων των κλάδων
- Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων
- Η μέθοδος των τάσεων κόμβων

Συστήματα εξισώσεων

- Τα συστήματα εξισώσεων αποτελούνται από μια ομάδα N εξισώσεων οι οποίες περιλαμβάνουν N αγνώστους.
- N είναι ένας αριθμός με τιμή 2 ή μεγαλύτερη

Η στάνταρ μορφή ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης

Ένα σύστημα εξισώσεων 2^{ης} τάξης γραμμένο σε στάνταρ μορφή είναι:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

όπου:

- x_1 και x_2 είναι οι άγνωστες ποσότητες (π.χ.: τα ρεύματα I_1 και I_2)
- τα ' a ' είναι οι **συντελεστές** των αγνώστων (αντιπροσωπεύουν τις τιμές αντιστάσεων του κυκλώματος) και
- τα ' b ' είναι οι **σταθερές** (αντιπροσωπεύουν τις τιμές των πηγών τάσης στο κύκλωμα)

Παράδειγμα ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης

Υποθέστε ότι οι παρακάτω δύο εξισώσεις

$$2I_1 = 8 - 5I_2$$

$$4I_2 - 5I_1 + 6 = 0$$

περιγράφουν ένα ορισμένο κύκλωμα με δύο άγνωστα ρεύματα I_1 και I_2 .

Οι συντελεστές των I_1 και I_2 είναι τιμές αντιστάσεων και οι σταθερές είναι τάσεις στο κύκλωμα).

Αναδιατάσσουμε τις εξισώσεις σε σπάνια μορφή ως εξής:

$$2I_1 + 5I_2 = 8$$

$$-5I_1 + 4I_2 = -6$$

Η στάνταρ μορφή ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης

Ένα σύστημα εξισώσεων 3^{ης} τάξης γραμμένο σε στάνταρ μορφή είναι:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

Παράδειγμα ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης

Υποθέστε ότι οι παρακάτω τρεις εξισώσεις

$$4I_3 + 2I_2 + 7I_1 = 0$$

$$5I_1 + 6I_2 + 9I_3 - 7 = 0$$

$$8 = I_1 + 2I_2 + 5I_3$$

περιγράφουν ένα ορισμένο κύκλωμα με τρία άγνωστα ρεύματα I_1 , I_2 και I_3 .

Αναδιατάσσουμε τις εξισώσεις σε σπάνταρ μορφή ως εξής:

$$7I_1 + 2I_2 + 4I_3 = 0$$

$$5I_1 + 6I_2 + 9I_3 = 7$$

$$I_1 + 2I_2 + 5I_3 = 8$$

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων

- Λύση με αντικατάσταση
- Λύση με ορίζουσες
- Λύση με τη βοήθεια υπολογιστή (PC ή χειρός)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης με αντικατάσταση

Έστω το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων

$$2x_1 + 6x_2 = 8 \quad (\text{εξίσωση 1})$$

$$3x_1 + 6x_2 = 2 \quad (\text{εξίσωση 2})$$

Λύνουμε την 1^η εξίσωση ως προς x_1

$$2x_1 = 8 - 6x_2$$

$$x_1 = \frac{8 - 6x_2}{2}$$

$$x_1 = 4 - 3x_2$$

Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα για το x_1 στη 2^η εξίσωση και λύνουμε ως προς x_2

$$3(4 - 3x_2) + 6x_2 = 2$$

$$12 - 9x_2 + 6x_2 = 2$$

$$12 - 3x_2 = 2$$

$$-3x_2 = 2 - 12$$

$$x_2 = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}$$

Τέλος, αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα για το x_2 στην εξίσωση για το x_1 και το υπολογίζουμε,

$$x_1 = 4 - 3 \frac{10}{3} = -6$$

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης με ορίζουσες

Ας λύσουμε το προηγούμενο σύστημα εξισώσεων

$$2x_1 + 6x_2 = 8$$

$$3x_1 + 6x_2 = 2$$

με χρήση οριζουσών (determinants)

Βήμα 1: Φτιάχνουμε τη χαρακτηριστική **ορίζουσα των συντελεστών** των άγνωστων x_1 , x_2

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

1^η στήλη 2^η στήλη

← 1^η γραμμή

← 2^η γραμμή

και υπολογίζουμε την τιμή της πολλαπλασιάζοντας ‘χιαστί’ τους αριθμούς και αφαιρώντας τα δύο γινόμενα

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = +(2)(6) - (3)(6) = -6$$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης με ορίζουσες (... συνέχεια)

Βήμα 2: Φτιάχνουμε την ορίζουσα του πρώτου αγνώστου x_1 , αντικαθιστώντας στην ορίζουσα των συντελεστών $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ την 1^η στήλη με τους σταθερούς αριθμούς στο δεξιό μέλος των εξισώσεων

$$2x_1 + 6x_2 = 8$$

$$3x_1 + 6x_2 = 2$$

Η ορίζουσα του x_1 είναι

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

και η τιμή της υπολογίζεται όπως πριν

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = +(8)(6) - (2)(6) = 36$$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης με ορίζουσες (... συνέχεια)

Βήμα 3: Λύνουμε για τον άγνωστο x_1 διαιρώντας την ορίζουσά του δια της ορίζουσας των συντελεστών:

$$x_1 = \frac{36}{-6} = -6$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και την τιμή του δεύτερου αγνώστου του συστήματος

$$2x_1 + 6x_2 = 8$$

$$3x_1 + 6x_2 = 2$$

Δηλαδή,

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{+(2)(2) - (3)(8)}{-6} = \frac{-20}{-6} = \frac{10}{3}$$

Παράδειγμα 4-1 Λύστε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων για τα άγνωστα ρεύματα I_1 και I_2 :

$$2I_1 - 5I_2 = 10$$

$$6I_1 + 10I_2 = 20$$

Λύση

Υπολογίζουμε την τιμή της χαρακτηριστικής ορίζουσας των συντελεστών:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = (2)(10) - (6)(-5) = 50$$

Λύνουμε για το ρεύμα I_1 :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 20 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 20 & 10 \end{vmatrix}}{50} = \frac{(10)(10) - (20)(-5)}{50} = \frac{100 + 100}{50} = 4 \text{ A}$$

Ομοίως, λύνουμε για το ρεύμα I_2 :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}{50} = \frac{(2)(20) - (6)(10)}{50} = \frac{40 - 60}{50} = -0.4 \text{ A}$$

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3ης τάξης με ορίζουσες

Ας βρούμε τα άγνωστα ρεύματα I_1 , I_2 και I_3 στο παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων

$$I_1 + 3I_2 - 2I_3 = 7$$

$$4I_2 + I_3 = 8$$

$$-5I_1 + I_2 + 6I_3 = 9$$

Βήμα 1: Φτιάχνουμε τη χαρακτηριστική **ορίζουσα των συντελεστών** των άγνωστων I_1 , I_2 και I_3

Συντελεστές του I_2

Συντελεστές του I_1 ————— Συντελεστές του I_3

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης με ορίζουσες (... συνέχεια)

Βήμα 2: Ξαναγράφουμε τις δύο πρώτες στήλες στα δεξιά της ορίζουσας

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 6 & -5 & 1 \end{array} \right|$$

Βήμα 3: Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς κάθε διαγώνιου προς τα κάτω

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 6 & -5 & 1 \end{array} \right|$$

και προσθέτουμε τα τρία γινόμενα, $(1)(4)(6) + (3)(1)(-5) + (-2)(0)(1) = 9$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης με ορίζουσες (... συνέχεια)

Βήμα 3: Ομοίως, πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς κάθε διαγώνιου προς τα πάνω

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$$

και προσθέτουμε τα τρία γινόμενα, $(-5)(4)(-2) + (1)(1)(1) + (6)(0)(3) = 41$

Αφαιρούμε τα δύο παραπάνω αποτελέσματα, $9 - 41 = -32$.

Αυτή είναι η τιμή της ορίζουσας των συντελεστών, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -32$$

(συνεχίζεται ...)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης με ορίζουσες (... συνέχεια)

Βήμα 4: Κατασκευάζουμε την ορίζουσα για το ρεύμα I_1 (όπως στα συστήματα 2^{ης} τάξης)

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

και την υπολογίζουμε με τον ίδιο τρόπο

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (7)(4)(6) + (3)(1)(9) + (-2)(8)(1) - (9)(4)(-2) - (1)(1)(7) - (6)(8)(3) = 100$$

(συνεχίζεται . . .)

Παράδειγμα λύσης ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης με ορίζουσες (... συνέχεια)

Βήμα 5: Η τιμή του ρεύματος I_1 είναι το πηλίκο της τιμής της ορίζουσας του I_1 δια της ορίζουσας των συντελεστών:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{100}{-32} = -3.125 \text{ A}$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε τα υπόλοιπα ρεύματα, I_2 και I_3 .

Παράδειγμα 4-2 Βρείτε την τιμή του ρεύματος I_2 από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$2I_1 + 0.5I_2 + I_3 = 0$$

$$0.75I_1 + 2I_3 = 1.5$$

$$3I_1 + 0.2I_2 = -1$$

Λύση

Η χαρακτηριστική ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων ρευμάτων I_1 , I_2 και I_3 είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.75 & 0 & 2 \\ 3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix}$$

Το ζητούμενο ρεύμα I_2 δίνεται από το κλάσμα:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0.75 & 1.5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.75 & 0 & 2 \\ 3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix}}$$

(συνεχίζεται...)

Λύση (... συνέχεια)

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0.75 & 1.5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.75 & 0 & 2 \\ 3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix}}$$

Η ορίζουσα του αριθμητή υπολογίζεται

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0.75 & 1.5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \nearrow 0.75 \\ \nearrow 3 \end{matrix} \begin{matrix} \searrow 0 \\ \searrow 1.5 \\ \searrow -1 \end{matrix} = (2)(1.5)(0) + (0)(2)(3) + (1)(0.75)(-1) \\ - (3)(1.5)(1) - (1)(2)(2) - (0)(0.75)(0) \\ = 0 + 0 - 0.75 - 4.5 - 4 - 0 = -9.25$$

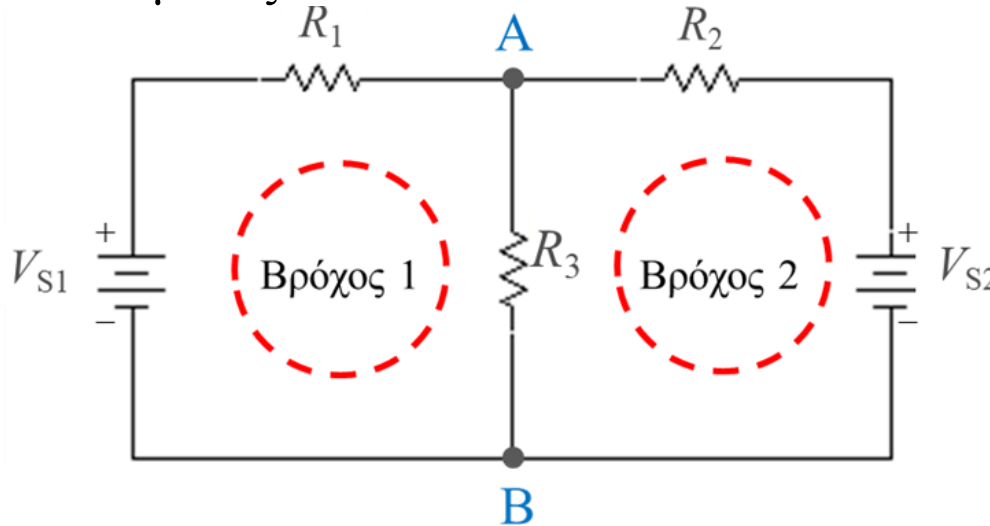
Η ορίζουσα του παρονομαστή είναι

$$\begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.75 & 0 & 2 \\ 3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix} = (2)(0)(0) + (0.5)(2)(3) + (1)(0.75)(0.2) \\ - (3)(0)(1) - (0.2)(2)(2) - (0)(0.75)(0.5) = 2.35$$

$$\text{Επομένως, } I_2 = \frac{-9.25}{2.35} = -\mathbf{3.94\text{ A}}$$

Η μέθοδος των ρευμάτων των κλάδων

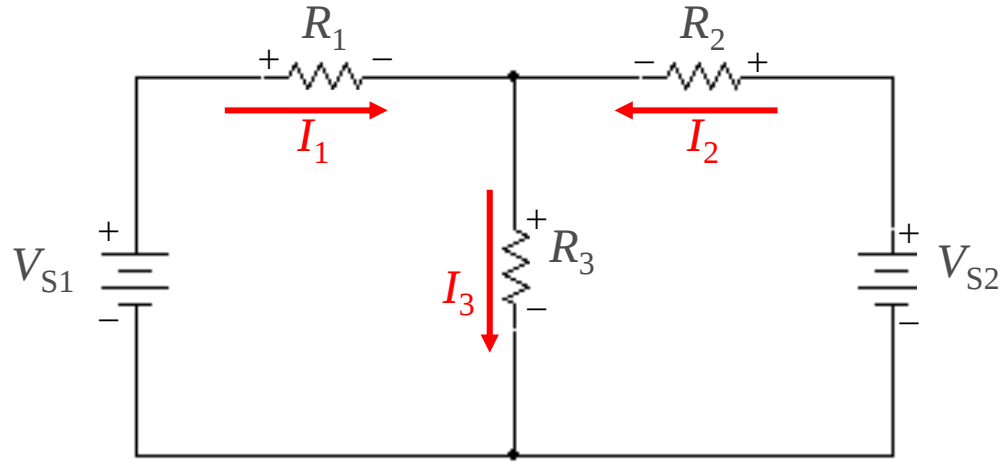
Η μέθοδος των ρευμάτων κλάδων (branch-current method) χρησιμοποιεί το νόμο των τάσεων και το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff για να βρει το ρεύμα σε κάθε κλάδο (branch current) ενός κυκλώματος.



Το κύκλωμα του σχήματος έχει

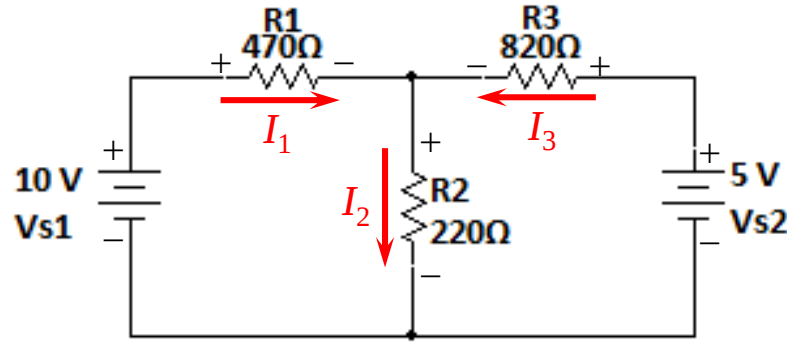
- δύο ελάχιστους βρόχους (Βρόχος 1 και Βρόχος 2)
- δύο κόμβους, A και B
- τρεις κλάδους (τον κλάδο με την πηγή V_{S1} και την αντίσταση R_1 , τον κλάδο με την αντίσταση R_3 και τον κλάδο με την πηγή V_{S2} και την αντίσταση R_2)

Η μέθοδος των ρευμάτων των κλάδων (... συνέχεια)



- Βήμα 1.** Σχεδιάζουμε ένα ρεύμα με αυθαίρετη κατεύθυνση σε κάθε κλάδο του κυκλώματος
- Βήμα 2.** Σημειώνουμε τις πολικότητες των τάσεων στις αντιστάσεις σύμφωνα με την κατεύθυνση των ρευμάτων κλάδων που επιλέξαμε στο Βήμα 1.
- Βήμα 3.** Εφαρμόζουμε τον κανόνα των τάσεων του Kirchhoff γύρω από κάθε κλειστό βρόχο (αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων ίσο με μηδέν)
- Βήμα 4.** Εφαρμόζουμε τον κανόνα των ρευμάτων του Kirchhoff στον ελάχιστο αριθμό κόμβων έτσι ώστε να περιλαμβάνονται όλα τα ρεύματα των κλάδων (αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε ένα κόμβο ίσο με μηδέν).
- Βήμα 5.** Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει από τα βήματα 3 και 4.

Παράδειγμα 4-3 Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων των κλάδων, βρείτε το ρεύμα κάθε κλάδου στο παρακάτω κύκλωμα :



Λύση

Σχεδιάζουμε τα ρεύματα των κλάδων (με αυθαίρετη κατεύθυνση) και σημειώνουμε τις πολικότητες των τάσεων στις αντιστάσεις.

Εφαρμόζουμε τον κανόνα των τάσεων του Kirchhoff γύρω από τον αριστερό βρόχο (διατρέχοντάς τον, π.χ., δεξιόστροφα)

$$10 - 470I_1 - 220I_2 = 0 \Rightarrow 470I_1 + 220I_2 = 10$$

και γύρω από το δεξιό βρόχο (διατρέχοντάς τον, π.χ., αριστερόστροφα),

$$5 - 820I_3 - 220I_2 = 0 \Rightarrow 220I_2 + 820I_3 = 5$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (... συνέχεια)

Εφαρμόζουμε τον κανόνα των ρευμάτων του Kirchhoff, π.χ., στον κόμβο Α,

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων

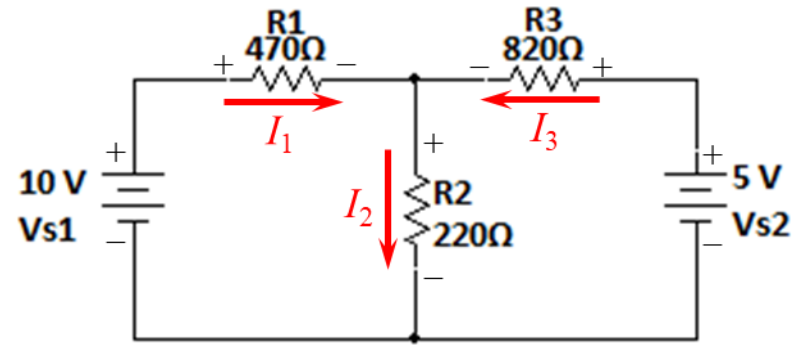
$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$470I_1 + 220I_2 = 10$$

$$220I_2 + 820I_3 = 5$$

είτε με αντικατάσταση είτε με ορίζουσες.

$$\begin{aligned} \text{Λύνοντας με ορίζουσες, έχουμε } I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 10 & 220 & 0 \\ 5 & 220 & 820 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 470 & 220 & 0 \\ 0 & 220 & 820 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(0)(220)(820) + (-1)(0)(5) + (1)(10)(220) - (5)(220)(1) - (220)(0)(0) - (820)(10)(-1)}{(1)(220)(820) + (-1)(0)(0) + (1)(470)(220) - (0)(220)(1) - (220)(0)(1) - (820)(470)(-1)} \\ I_1 &= \frac{9300}{669200} = 0.0139 \text{ A} = \mathbf{13.9 \text{ mA}} \end{aligned}$$



(συνεχίζεται...)

Λύση (... συνέχεια)

$$\begin{aligned}I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\470I_1 + 220I_2 &= 10 \\220I_2 + 820I_3 &= 5\end{aligned}$$

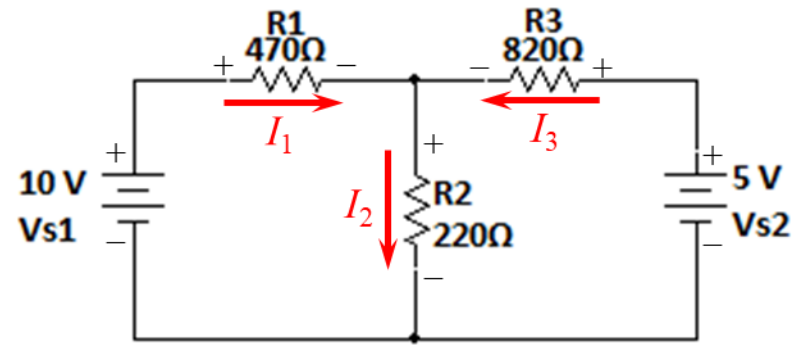
Ομοίως, έχουμε $I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 470 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 820 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 470 & 220 & 0 \\ 0 & 220 & 820 \end{vmatrix}}$

$$= \frac{(1)(10)(820) + (0)(0)(0) + (1)(470)(5) - (0)(10)(1) - (5)(0)(1) - (820)(470)0}{669200}$$
$$I_2 = \frac{10550}{669200} = 0.0158 \text{ A} = \mathbf{15.8 \text{ mA}}$$

Τέλος, το I_3 μπορούμε να βρούμε από την $I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 470 & 220 & 10 \\ 0 & 220 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 470 & 220 & 0 \\ 0 & 220 & 820 \end{vmatrix}}$

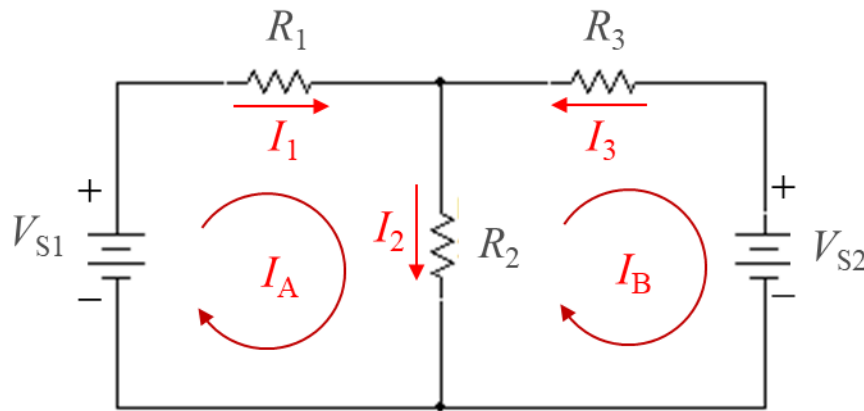
ή, πιο εύκολα, από την εξίσωση $I_1 - I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = -I_1 + I_2$

$$\Rightarrow I_3 = -13.9 \text{ mA} + 15.8 \text{ mA} = \mathbf{1.87 \text{ mA}}$$



Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων (Mech-Current Method)

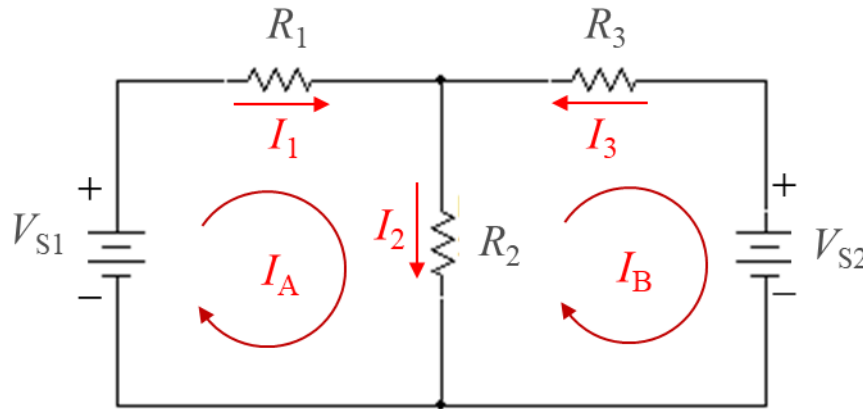
- Εργαζόμαστε με τα **ρεύματα βρόχων** (mech currents) αντί για τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων
 - I_1 , I_2 και I_3 είναι τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων
 - I_A και I_B είναι τα ρεύματα βρόχων



- Τα ρεύματα βρόχων είναι μαθηματικές ποσότητες
 - Χρησιμεύουν για την ευκολότερη ανάλυση του κυκλώματος
 - Οδηγεί σε απλούστερα (μικρότερα) συστήματα εξισώσεων

(συνεχίζεται . . .)

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων (. . . συνέχεια)



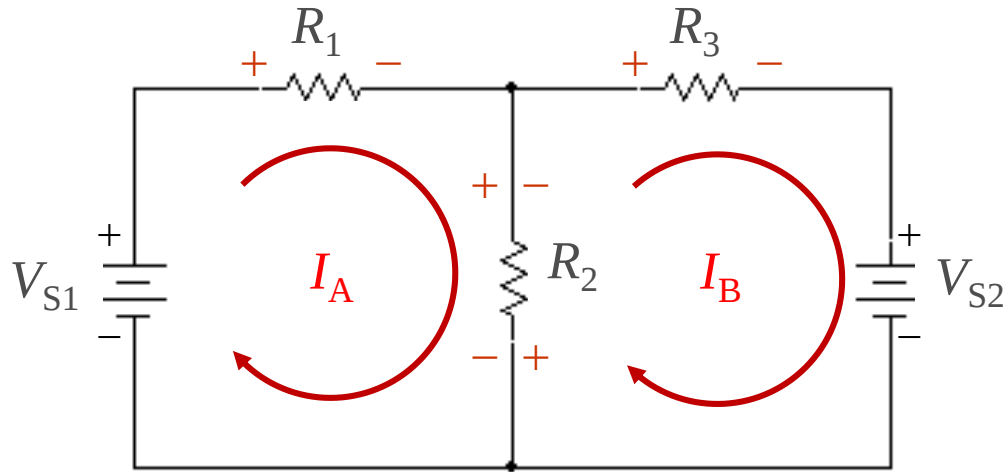
Εφ' όσον υπολογίσουμε τα ρεύματα των βρόχων I_A και I_B , εύκολα υπολογίζουμε τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων I_1 , I_2 και I_3

Π.χ., στο κύκλωμα παραπάνω

- $I_1 = I_A$
- $I_2 = I_A - I_B$
- $I_3 = -I_B$

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων χρησιμοποιείται για να λύνουμε κυκλώματα που περιλαμβάνουν τόσο πηγές τάσης όσο και πηγές ρεύματος.

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων : Τα βήματα



Βήμα 1. Σημειώνουμε ένα ρεύμα σε κάθε ελάχιστο βρόχο του κυκλώματος

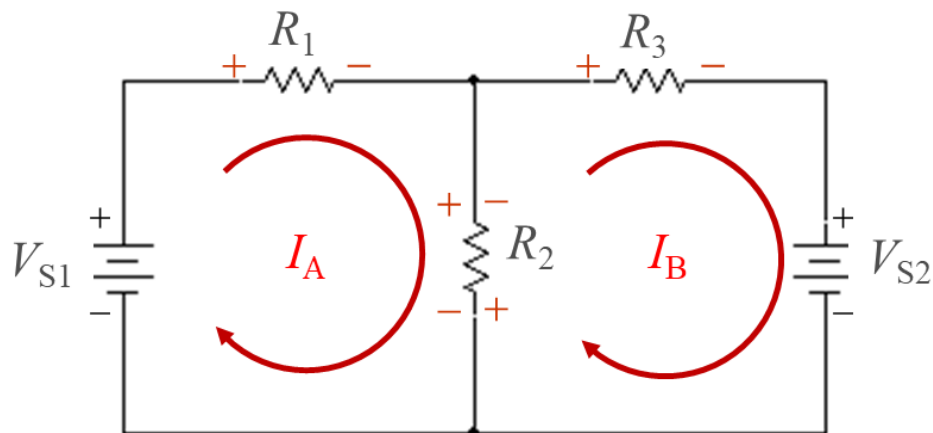
- Η διεύθυνση είναι αυθαίρετη (συνήθως CW)

Βήμα 2. Σημειώνουμε την πολικότητα (+ και -) της πτώσης τάσης σε κάθε αντίσταση

- Καθορίζεται από τις διευθύνσεις των ρευμάτων βρόχων που επιλέξαμε στο Βήμα 1.

(συνεχίζεται...)

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων: Τα βήματα (συνέχεια)



Βήμα 3. Εφαρμόζουμε το νόμο των τάσεων του Kirchhoff σε κάθε βρόχο. Προκύπτει μια εξίσωση για κάθε βρόχο.

- Για το βρόχο A: $V_{S1} - R_1 I_A - R_2 I_A + R_2 I_B = 0$ (Εξίσωση 1)
- Για το βρόχο B: $-V_{S2} - R_2 I_B + R_2 I_A + R_3 I_B = 0$ (Εξίσωση 2)

Βήμα 4. Συνδυάζουμε τους όμοιους όρους. Φέρνουμε το σύστημα των εξισώσεων σε σπάνταρ μορφή.

$$(R_1 + R_2)I_A - R_2 I_B = V_{S1} \quad (\text{Εξίσωση 1})$$

$$-R_2 I_A + (R_2 + R_3)I_B = -V_{S2} \quad (\text{Εξίσωση 2})$$

(συνεχίζεται...)

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων: Τα βήματα (συνέχεια)

Βήμα 5. Τέλος, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$(R_1 + R_2)I_A - R_2I_B = V_{S1} \quad (\text{Εξίσωση 1})$$

$$-R_2I_A + (R_2 + R_3)I_B = -V_{S2} \quad (\text{Εξίσωση 2})$$

είτε με αντικατάσταση είτε με ορίζουσες και υπολογίζουμε τα ρεύματα των βρόχων I_A και I_B

Ένας συνοπτικός κανόνας για την εφαρμογή της μεθόδου των ρευμάτων βρόχων σε κυκλώματα με πηγές τάσης

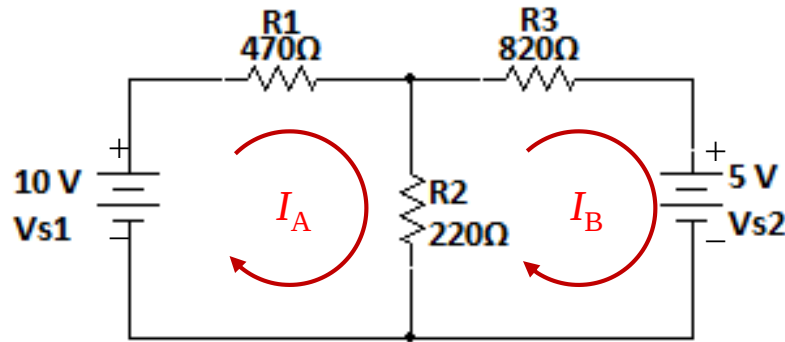
Αν οι πηγές στο κύκλωμα είναι πηγές τάσης (ανεξάρτητες ή εξαρτημένες) και όχι πηγές ρεύματος

τα βήματα 1 – 4 της μεθόδου των ρευμάτων βρόχων οδηγούν στον εξής συνοπτικό κανόνα

$$\begin{aligned} &(\text{Άθροισμα αντιστάσεων στο βρόχο}) \times (\text{ρεύμα βρόχου}) - (\text{κάθε αντίσταση} \\ &\quad \text{κοινή σε δύο βρόχους}) \times (\text{ρεύμα γειτονικού βρόχου}) \\ &= (\text{πηγή τάσης στο βρόχο}) \end{aligned}$$

Προσοχή: Κατά την εφαρμογή του παραπάνω συνοπτικού κανόνα, θεωρούμε ότι τα ρεύματα των βρόχων είναι σημειωμένα δεξιόστροφα (CW)

Παράδειγμα 4-4 Βρείτε τα ρεύματα των κλάδων στο παρακάτω κύκλωμα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων



Λύση

Σημειώνουμε τα ρεύματα βρόχων I_A και I_B δεξιόστροφα (CW).

Χρησιμοποιούμε το συνοπτικό κανόνα της προηγούμενης σελίδας για να φτιάξουμε τις εξισώσεις των βρόχων

$$(470 + 220)I_A - 220I_B = 10$$

$$(820 + 220)I_B - 220I_A = -5$$

Συνδυάζουμε του όμοιους όρους και γράφουμε τις δύο εξισώσεις στη στάνταρ μορφή

$$690I_A - 220I_B = 10$$

$$-220I_A + 1040I_B = -5$$

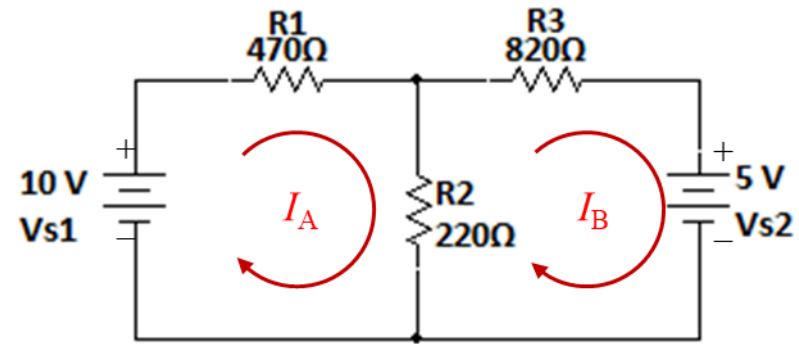
(συνεχίζεται . . .)

Λύση (... συνέχεια)

Έχουμε το σύστημα

$$690I_A - 220I_B = 10$$

$$-220I_A + 1040I_B = -5$$



Το λύνουμε για τα δυο ρεύματα βροχών I_A και I_B χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των οριζουσών

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -220 \\ -5 & 1040 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 690 & -220 \\ -220 & 1040 \end{vmatrix}} = \frac{(10)(1040) - (-5)(-220)}{(690)(1040) - (-220)(-220)} = \frac{102900}{669200} = 0.0139 \text{ A} = 13.9 \text{ mA}$$

και

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 690 & 10 \\ -220 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 690 & -220 \\ -220 & 1040 \end{vmatrix}} = \frac{(690)(-5) - (-220)(10)}{669200} = \frac{-1250}{669200} = -0.00187 \text{ A} = -1.87 \text{ mA}$$

(συνεχίζεται . . .)

Λύση (... συνέχεια)

Από τις τιμές των ρευμάτων βρόχων,

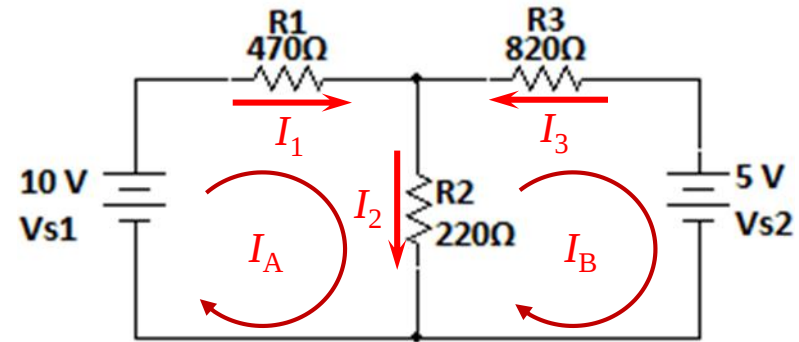
$$I_A = 13.9 \text{ mA} \text{ και } I_B = -1.87 \text{ mA},$$

εύκολα υπολογίζουμε τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων I_1 , I_2 και I_3

$$\text{Στην } R_1: \quad I_1 = I_A = \mathbf{13.9 \text{ mA}}$$

$$\text{Στην } R_3: \quad I_3 = -I_B = -(-1.87 \text{ mA}) = \mathbf{1.87 \text{ mA}}$$

$$\text{Στην } R_2: \quad I_2 = I_A - I_B = (13.9 \text{ mA}) - (-1.87 \text{ mA}) = \mathbf{15.8 \text{ mA}}$$



Παράδειγμα 4-5 Για το κύκλωμα της εικόνας (γέφυρα Wheatstone), βρείτε το ρεύμα σε κάθε αντίσταση (ρεύμα κλάδου), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων.

Λύση

Το κύκλωμα έχει τρεις ελάχιστους βρόχους. Σημειώνουμε τα ρεύματα των τριών βρόχων I_A , I_B και I_C δεξιόστροφα (CW).

Φτιάχνουμε τις τρεις εξισώσεις των βρόχων

$$\text{Για το βρόχο του ρεύματος } I_A: \quad (330 + 300)I_A - 330I_B - 300I_C = 12$$

$$\text{Για το βρόχο του ρεύματος } I_B: \quad (330 + 360 + 1000)I_B - 330I_A - 1000I_C = 0$$

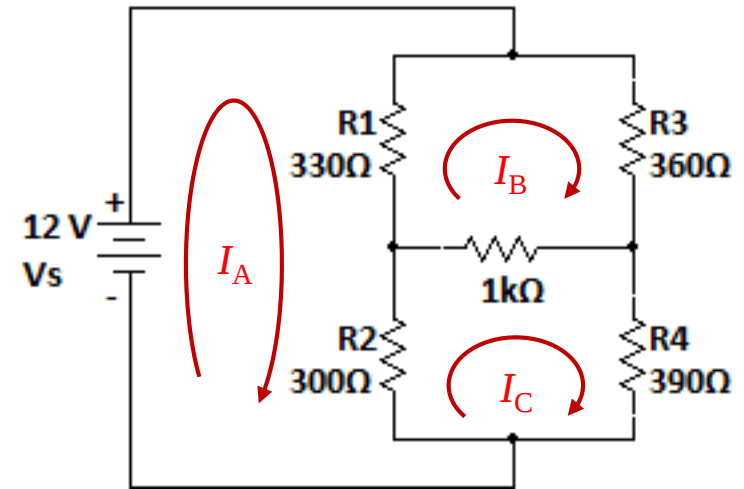
$$\text{Για το βρόχο του ρεύματος } I_C: \quad (300 + 1000 + 390)I_C - 300I_A - 1000I_B = 0$$

Συνδυάζουμε τους όμοιους όρους και γράφουμε τις τρεις εξισώσεις στη σπάντα μορφή

$$630I_A - 330I_B - 300I_C = 12$$

$$-330I_A + 1690I_B - 1000I_C = 0$$

$$-300I_A - 1000I_B + 1690I_C = 0$$



(συνεχίζεται...)

Λύση (... συνέχεια)

Έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}630I_A - 330I_B - 300I_C &= 12 \\ -330I_A + 1690I_B - 1000I_C &= 0 \\ -300I_A - 1000I_B + 1690I_C &= 0\end{aligned}$$

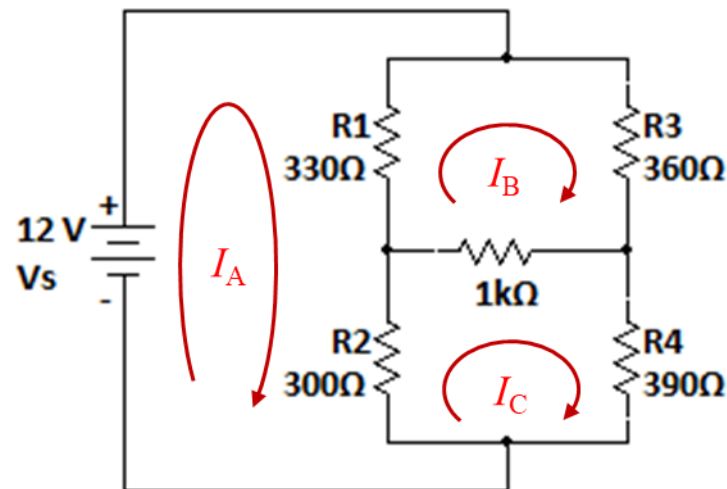
Λύνουμε το σύστημα για τα τρία ρεύματα των βρόχων βροχών I_A , I_B και I_C χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ορίζουσών

Το ρεύμα I_A είναι

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -330 & -300 \\ 0 & 1690 & -1000 \\ 0 & -1000 & 1690 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 630 & -330 & -300 \\ -330 & 1690 & -1000 \\ -300 & -1000 & 1690 \end{vmatrix}}$$

Η τιμή της ορίζουσας του παρονομαστή είναι

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 630 & -330 & -300 \\ -330 & 1690 & -1000 \\ -300 & -1000 & 1690 \end{vmatrix} &= (630)(1690)(1690) + (-330)(-1000)(-300) + (-300)(-330)(-1000) \\ &\quad - (-300)(1690)(-300) - (-1000)(-1000)(630) - (1690)(-330)(-330) \\ &= 635202000\end{aligned}$$



(συνεχίζεται...)

Λύση (... συνέχεια)

Η τιμή της ορίζουσας του αριθμητή είναι

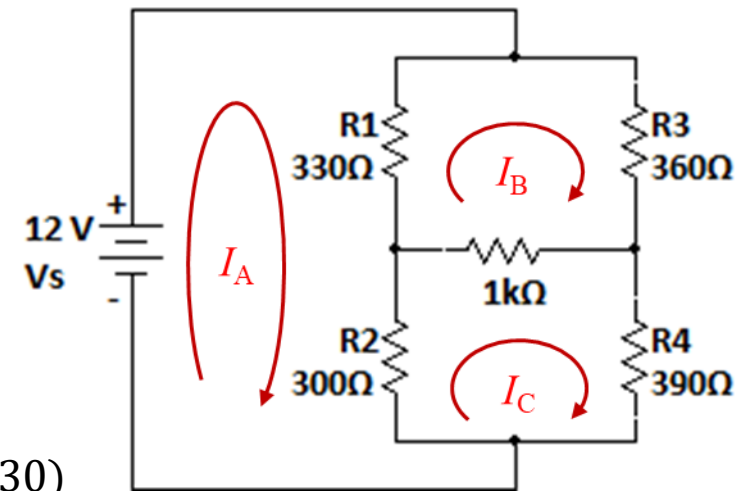
$$\begin{vmatrix} 12 & -330 & -300 \\ 0 & 1690 & -1000 \\ 0 & -1000 & 1690 \end{vmatrix} =$$
$$= (12)(1690)(1690) + (-330)(-1000)(0) + (-300)(0)(0)$$
$$- (0)(1690)(-300) - (-1000)(-1000)(12) - (1690)(0)(-330)$$
$$= 22273200$$

Οπότε η τιμή του ρεύματος βρόχου I_A είναι

$$I_A = \frac{22273200}{635202000} = 0.0351 \text{ A} = 35.1 \text{ mA}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε το ρεύμα I_B

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 630 & 12 & -300 \\ -330 & 0 & -1000 \\ -300 & 0 & 1690 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 630 & -330 & -300 \\ -330 & 1690 & -1000 \\ -300 & -1000 & 1690 \end{vmatrix}} = \frac{(12)(-1000)(-300) - (1690)(-330)(12)}{635202000} = 16.2 \text{ mA}$$

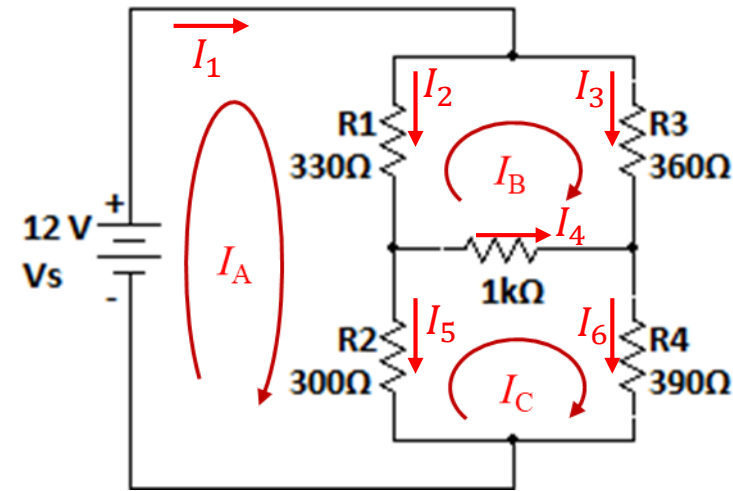


Λύση (... συνέχεια)

Το ρεύμα I_C είναι

$$I_C = \frac{\begin{vmatrix} 630 & -330 & 12 \\ -330 & 1690 & 0 \\ -300 & -1000 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 630 & -330 & -300 \\ -330 & 1690 & -1000 \\ -300 & -1000 & 1690 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(12)(-330)(-1000) - (-300)(1690)(12)}{635202000} = 15.8 \text{ mA}$$



Από τις τιμές των ρευμάτων βρόχων $I_A = 35.1 \text{ mA}$, $I_B = 16.2 \text{ mA}$ και $I_C = 15.8 \text{ mA}$ υπολογίζουμε τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 και I_6 .

Στην πηγή V_S : $I_1 = I_A = \mathbf{35.1 \text{ mA}}$

Στην R_1 : $I_2 = I_A - I_B = (35.1 \text{ mA}) - (16.2 \text{ mA}) = \mathbf{18.9 \text{ mA}}$

Στην R_2 : $I_5 = I_A - I_C = (35.1 \text{ mA}) - (15.8 \text{ mA}) = \mathbf{19.3 \text{ mA}}$

Στην R_3 : $I_3 = I_B = \mathbf{16.2 \text{ mA}}$

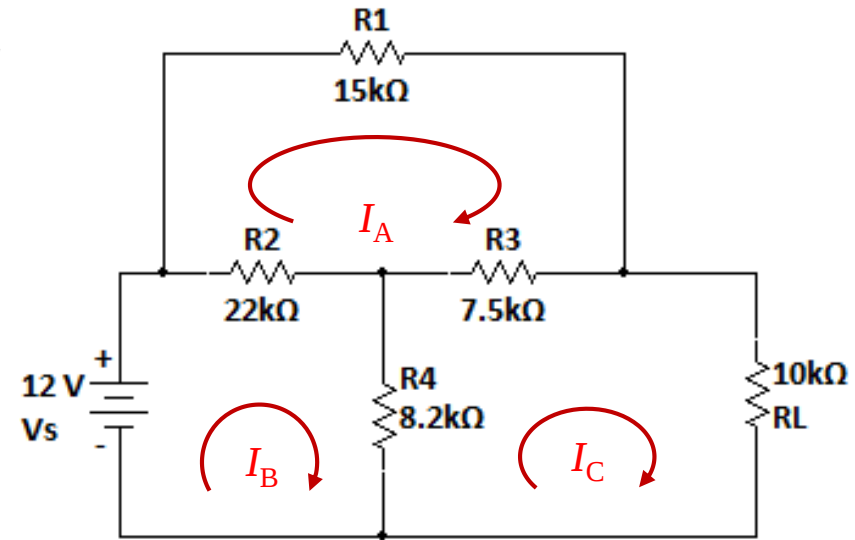
Στην R_4 : $I_6 = I_C = \mathbf{15.8 \text{ mA}}$

Στην $1 \text{ k}\Omega$: $I_4 = I_C - I_B = (15.8 \text{ mA}) - (16.2 \text{ mA}) = \mathbf{-0.4 \text{ mA}}$

Παράδειγμα 4-6 Η εικόνα δείχνει ένα κύκλωμα γέφυρας T (bridged-T circuit) τριών βρόχων. Κατασκευάστε τη σπάντα μορφή των εξισώσεων για τα ρεύματα βρόχων και βρείτε το ρεύμα σε κάθε αντίσταση.

Λύση

Σημειώνουμε τα ρεύματα των τριών ελάχιστων βρόχων I_A , I_B και I_C δεξιόστροφα (CW).



Οι τρεις εξισώσεις των βρόχων είναι:

$$\text{στο βρόχο του } I_A: (22k + 15k + 7.5k)I_A - 22k \cdot I_B - 7.5k \cdot I_C = 0$$

$$\text{στο βρόχο του } I_B: (22k + 8.2k)I_B - 22k \cdot I_A - 8.2k \cdot I_C = 12$$

$$\text{στο βρόχο του } I_C: (8.2k + 7.5k + 10k)I_C - 7.5k \cdot I_A - 8.2k \cdot I_B = 0$$

Συνδυάζουμε τους όμοιους όρους και γράφουμε τις τρεις εξισώσεις στη σπάντα μορφή

$$44.5k \cdot I_A - 22k \cdot I_B - 7.5k \cdot I_C = 0$$

$$-22k \cdot I_A + 30.2k \cdot I_B - 8.2k \cdot I_C = 12$$

$$-7.5k \cdot I_A - 8.2k \cdot I_B + 25.7k \cdot I_C = 0$$

(συνεχίζεται...)

Λύση (... συνέχεια)

Έχουμε το σύστημα

$$44.5k \cdot I_A - 22k \cdot I_B - 7.5k \cdot I_C = 0$$

$$-22k \cdot I_A + 30.2k \cdot I_B - 8.2k \cdot I_C = 12$$

$$-7.5k \cdot I_A - 8.2k \cdot I_B + 25.7k \cdot I_C = 0$$

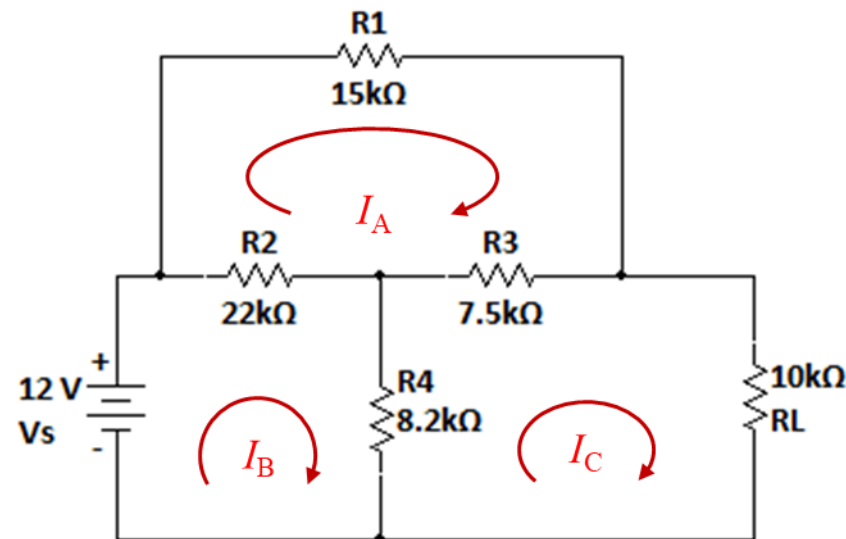
Λύνουμε το σύστημα για τα τρία ρεύματα των βρόχων I_A , I_B και I_C χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ορίζουσών

Το ρεύμα I_A είναι

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -22k & -7.5k \\ 12 & 30.2k & -8.2k \\ 0 & -8.2k & 25.7k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 44.5k & -22k & -7.5k \\ -22k & 30.2k & -8.2k \\ -7.5k & -8.2k & 25.7k \end{vmatrix}}$$

Η τιμή της ορίζουσας του παρονομαστή είναι

$$\begin{vmatrix} 44.5k & -22k & -7.5k \\ -22k & 30.2k & -8.2k \\ -7.5k & -8.2k & 25.7k \end{vmatrix} = (44.5k)(30.2k)(25.7k) + (-22k)(-8.2k)(-7.5k) + (-7.5k)(-22k)(-8.2k) \\ - (-7.5k)(30.2k)(-7.5k) - (-8.2k)(-8.2k)(44.5k) - (27.5k)(-22k)(-22k) \\ = 13831.3k^3$$



(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Η τιμή της ορίζουσας του αριθμητή είναι

$$\begin{vmatrix} 0 & -22k & -7.5k \\ 12 & 30.2k & -8.2k \\ 0 & -8.2k & 25.7k \end{vmatrix} =$$

$$= (0)(30.2k)(25.7k) + (-22k)(-8.2k)(0) + (-7.5k)(12)(-8.2k)$$

$$- (0)(30.2k)(-7.5k) - (-8.2k)(-8.2k)(0) - (25.7k)(12)(-22k)$$

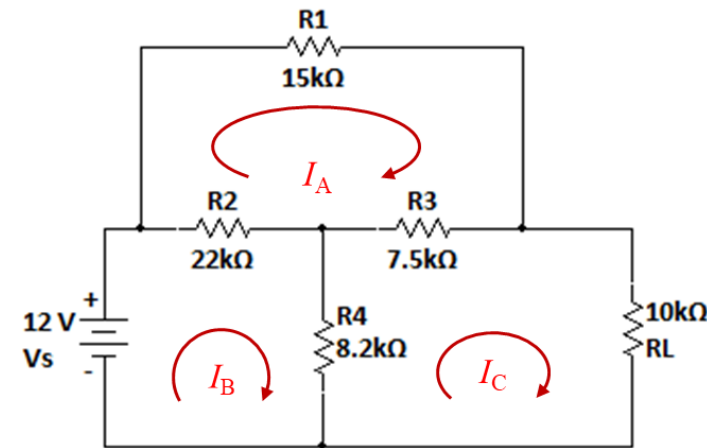
$$= 7522.8k^2$$

Οπότε η τιμή του ρεύματος βρόχου I_A είναι

$$I_A = \frac{7522.8k^2}{13831.3k^3} = \frac{0.54}{k} A = \frac{0.54}{1000} A = 0.54 mA$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε το ρεύμα I_B

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 44.5k & 0 & -7.5k \\ -22k & 12 & -8.2k \\ -7.5k & 0 & 25.7k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 44.5k & -22k & -7.5k \\ -22k & 30.2k & -8.2k \\ -7.5k & -8.2k & 25.7k \end{vmatrix}} = \frac{(44.5k)(12)(25.7k) - (-7.5k)(12)(-7.5k)}{13831.3k^3} = \frac{13048.8k^2}{13831.3k^3}$$
$$= \frac{0.94}{k} A = \frac{0.94}{1000} A = 0.94 mA$$



(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Το ρεύμα I_C είναι

$$I_C = \frac{\begin{vmatrix} 44.5k & -22k & 0 \\ -22k & 30.2k & 12 \\ -7.5k & -8.2k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 44.5k & -22k & -7.5k \\ -22k & 30.2k & -8.2k \\ -7.5k & -8.2k & 25.7k \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{(-22k)(12)(-7.5k) - (-8.2k)(12)(44.5k)}{13831.3k^3} = \frac{6358.8k^2}{13831.3k^3}$$
$$= \frac{0.46}{k} A = \frac{0.46}{1000} A = 0.46 mA$$

Από τις τιμές των ρευμάτων βρόχων $I_A = 0.54 mA$, $I_B = 0.94 mA$ και $I_C = 0.46 mA$ υπολογίζουμε τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_L και I_S .

Στην πηγή V_S : $I_S = I_B = \mathbf{0.94 mA}$

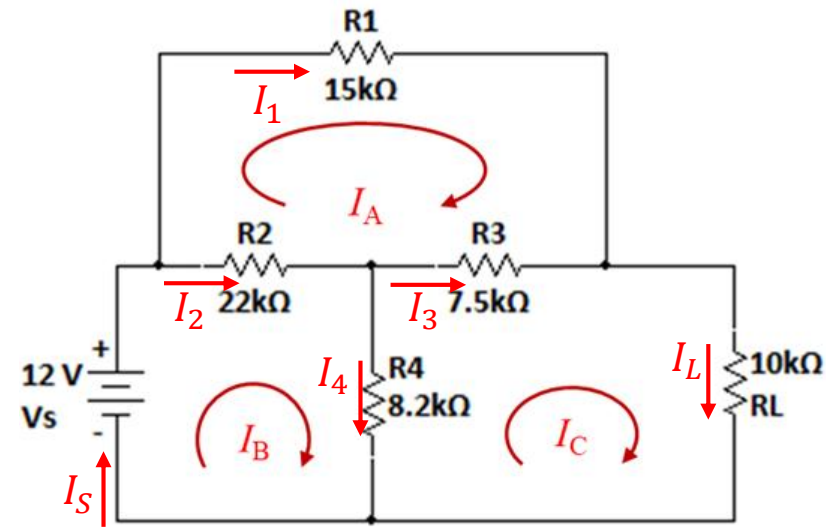
Στην R_1 : $I_1 = I_A = \mathbf{0.54 mA}$

Στην R_2 : $I_2 = I_B - I_A = (0.94 mA) - (0.54 mA) = \mathbf{0.40 mA}$

Στην R_3 : $I_3 = I_C - I_A = (0.46 mA) - (0.54 mA) = \mathbf{-0.08 mA}$

Στην R_4 : $I_4 = I_B - I_C = (0.94 mA) - (0.46 mA) = \mathbf{0.48 mA}$

Στην R_L : $I_L = I_C = \mathbf{0.46 mA}$



Παράδειγμα 4-7 Η εικόνα (Σχήμα 4-6, σελ. 102, Κ. Παπαδόπουλου “Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων”) δείχνει ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει μια εξαρτημένη πηγή τάσης. Εφαρμόστε τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων και υπολογίστε το ρεύμα στην αντίσταση R_1 .

Λύση

Η μέθοδος των ρευμάτων (ελαχίστων) βρόχων μπορεί να εφαρμοστεί και όταν έχουμε εξαρτημένες πηγές τάσης.

Το κύκλωμα στην εικόνα δίπλα περιλαμβάνει μια εξαρτημένη πηγή τάσης ($V = 5 \cdot I_x$) που ελέγχεται από το ρεύμα I_x στον κλάδο της αντίστασης R_2 και της πηγής 10 V.

Σημειώνουμε τα ρεύματα I_1 και I_2 στους δύο ελάχιστους βρόχους (δεξιόστροφα, CW).

Γράφουμε τις δύο εξισώσεις των βρόχων:

$$\text{στο βρόχο του } I_1: R_1 \cdot I_1 - R_1 \cdot I_2 = 5 \cdot I_x \Rightarrow 15 \cdot I_1 - 15 \cdot I_2 = 5 \cdot I_x$$

$$\text{στο βρόχο του } I_2: (R_1 + R_2)I_2 - R_1 \cdot I_1 = -10 \Rightarrow 25 \cdot I_2 - 15 \cdot I_1 = -10$$

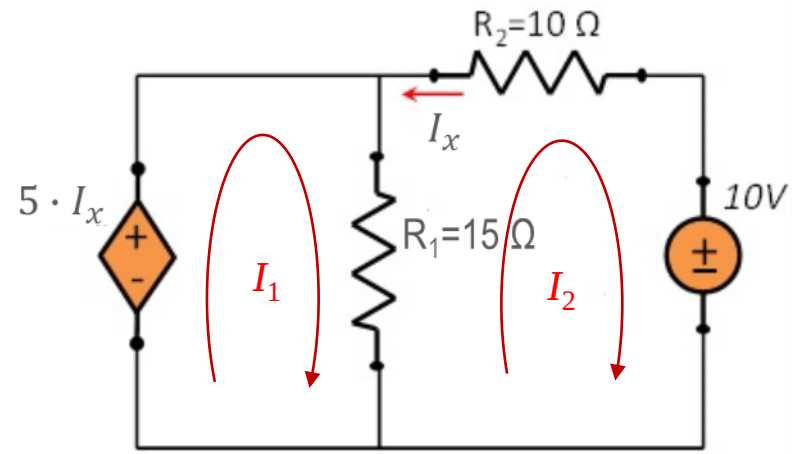
Όμως, κοιτάζοντας της φορές των ρευμάτων στο δεξιά βρόχο, βλέπουμε ότι $I_x = -I_2$, επομένως, το σύστημα των εξισώσεων γίνεται

$$15 \cdot I_1 - 15 \cdot I_2 = 5 \cdot (-I_2) \Rightarrow 15 \cdot I_1 - 10 \cdot I_2 = 0$$

και

$$-15 \cdot I_1 + 25 \cdot I_2 = -10$$

(συνεχίζεται...)



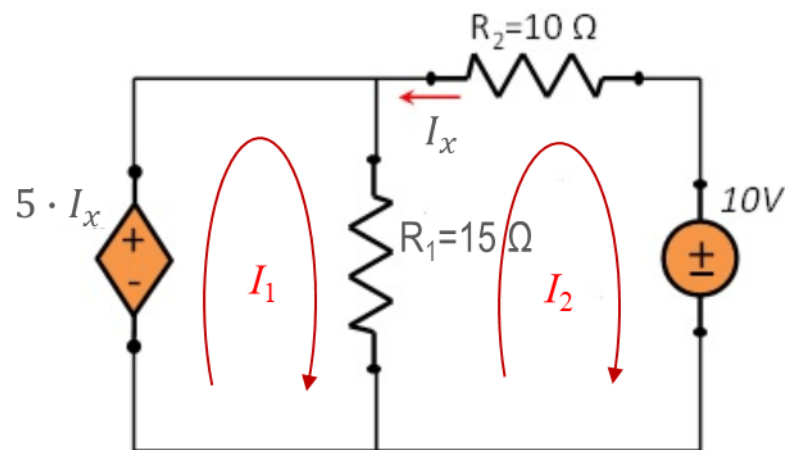
Λύση (... συνέχεια)

Έχουμε το σύστημα

$$15 \cdot I_1 - 10 \cdot I_2 = 0$$

$$-15 \cdot I_1 + 25 \cdot I_2 = -10$$

Λύνουμε το σύστημα για τα δύο ρεύματα των βρόχων I_1 και I_2 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των οριζουσών



Το ρεύμα I_1 είναι

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -10 \\ -15 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{(0)(25) - (-10)(-10)}{(15)(25) - (-15)(-10)} = \frac{-100}{225} = -0,44 \text{ A}$$

και το ρεύμα I_2

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ -15 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -10 \\ -15 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{(15)(-10) - (-15)(0)}{225} = \frac{-150}{225} = -0,67 \text{ A}$$

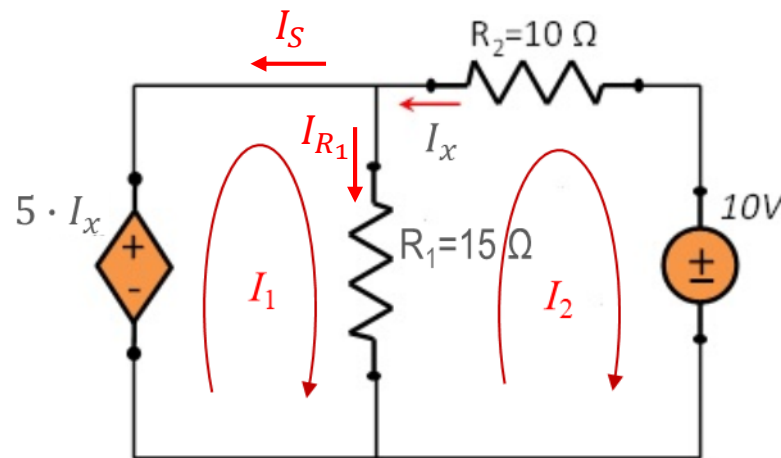
Λύση (... συνέχεια)

Από τις τιμές των ρευμάτων βρόχων

$$I_1 = -0.44 \text{ A και } I_2 = -0.67 \text{ A}$$

υπολογίζουμε το ρεύμα I_{R_1} στην αντίσταση R_1 :

$$I_{R_1} = I_1 - I_2 = (-0.44 \text{ A}) - (-0.67 \text{ A}) = \mathbf{0.23 \text{ A}}$$



Εκτός από το ρεύμα στην R_1 , εύκολα μπορούμε να βρούμε και τα υπόλοιπα στοιχεία στο κύκλωμα

Το ρεύμα στην R_2 : $I_x = -I_2 = -(-0.67 \text{ A}) = 0.67 \text{ A}$

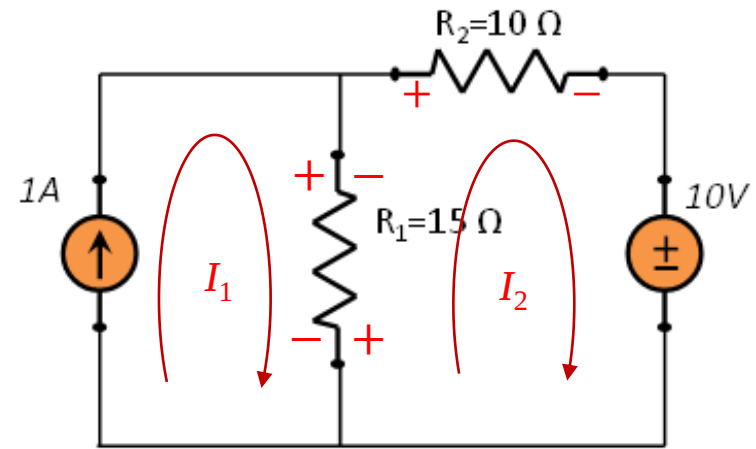
Τη τιμή της εξαρτημένης πηγής τάσης: $V = 5 \cdot I_x = 5 \cdot 0.67 = 3.35 \text{ V}$

Το ρεύμα που τη διαρρέει: $I_S = -I_1 = -(-0.44 \text{ A}) = 0.44 \text{ A}$

και η ισχύς που καταναλώνει (γιατί ;) είναι

$$P = V \cdot I_S = (3.35 \text{ V})(0.44 \text{ A}) = 10.05 \text{ W}$$

Παράδειγμα 4-8 Η εικόνα (Σχήμα 4-4, σελ. 100, Κ. Παπαδόπουλου “Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων”) δείχνει ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει σε έναν βρόχο του μια πηγή ρεύματος ($1A$). Εφαρμόστε τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων και υπολογίστε το ρεύμα στην αντίσταση R_1 .



Λύση

Σημειώνουμε τα δύο ρεύματα I_1 και I_2 των (ελάχιστων) βρόχων στο κύκλωμα

Το κύκλωμα περιλαμβάνει μια πηγή ρεύματος ($1A$) στον αριστερό βρόχο.

Η τάση στα άκρα μιας πηγής ρεύματος είναι άγνωστη, οπότε, δεν εξυπηρετεί να εφαρμόσουμε τον νόμο τάσεων του Kirchhoff σε αυτόν το βρόχο.

Αντί αυτού, όμως, έχουμε την εξίσωση ορισμού της πηγής ρεύματος:

$$I_1 = 1 A \quad (\text{εξίσωση 1})$$

Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff στο δεύτερο βρόχο:

$$-R_1 \cdot I_2 + R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 - 10V = 0 \Rightarrow R_1 \cdot I_1 - (R_1 + R_2) \cdot I_2 = 10V \quad (\text{εξίσωση 2})$$

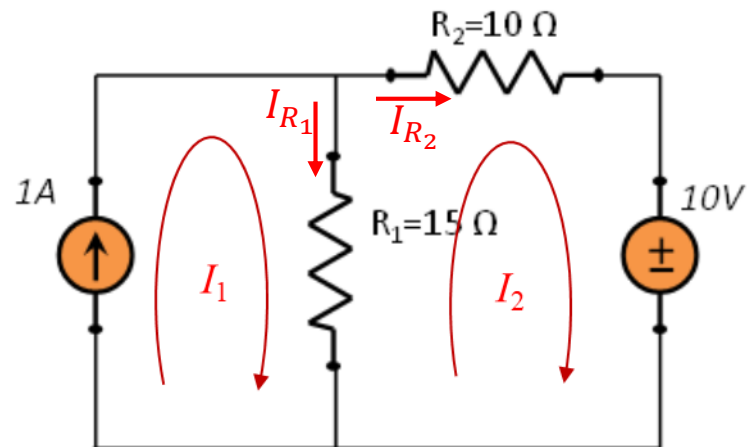
Λύση (... συνέχεια)

Έχουμε το σύστημα

$$I_1 = 1 \text{ A} \quad (\text{εξίσωση 1})$$

$$R_1 \cdot I_1 - (R_1 + R_2) \cdot I_2 = 10 \text{ V}$$

$$\Rightarrow 15 \cdot I_1 - 25 \cdot I_2 = 10 \quad (\text{εξίσωση 2})$$



Αντικαθιστώντας από την 1^η εξίσωση την τιμή του I_1 στη 2^η εξίσωση, βρίσκουμε το ρεύμα βρόχου I_2 :

$$15 \cdot 1 - 25I_2 = 10$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{15 - 10}{25} = 0.2 \text{ A}$$

Από τις τιμές των ρευμάτων βρόχων $I_1 = 1 \text{ A}$ και $I_2 = 0.2 \text{ A}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το ρεύμα I_{R_1} στην αντίσταση R_1 : $I_{R_1} = I_1 - I_2 = \mathbf{0.8 \text{ A}}$

αλλά, και το ρεύμα I_{R_2} στην αντίσταση R_2 : $I_{R_2} = I_2 = 0.2 \text{ A}$

Παράδειγμα 4-9 Εφαρμόστε τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων και υπολογίστε τα ρεύματα βρόχων I_1 και I_2 στο κύκλωμα της διπλανής εικόνας (Σχήμα 4-5, σελ. 101, Κ. Παπαδόπουλου “Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων”).

Λύση

Εάν η πηγή ρεύματος βρίσκεται σε ένα κλάδο που είναι κοινός σε δύο βρόχους, τότε δεν μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις του νόμου τάσεων του Kirchhoff σε κανέναν από τους δύο βρόχους.

Πάλι ξεκινάμε από την εξίσωση ορισμού της πηγής ρεύματος:

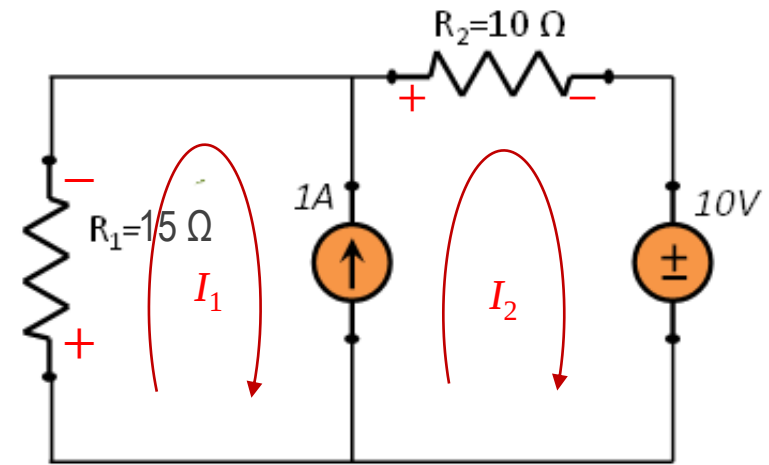
$$I_2 - I_1 = 1 \text{ A} \quad (\text{εξίσωση 1})$$

Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff σε έναν βρόχο που δεν διατρέχει την πηγή ρεύματος (γιατί;).

Ο μόνος τέτοιος βρόχος, σε αυτό το κύκλωμα, είναι ο ‘εξωτερικός’ μη-ελάχιστος βρόχος (που περιλαμβάνει τους δύο ελάχιστους βρόχους των I_1 και I_2)

$$-R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 - 10\text{V} = 0$$

$$\Rightarrow -15 \cdot I_1 - 10 \cdot I_2 = 10\text{V} \quad (\text{εξίσωση 2}) \quad (\text{συνεχίζεται} \dots)$$



Λύση (... συνέχεια)

Έχουμε το σύστημα

$$I_1 - I_2 = -1$$

$$15 \cdot I_1 + 10 \cdot I_2 = -10$$

Λύνουμε το σύστημα για τα δύο ρεύματα των βρόχων I_1 και I_2 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των οριζουσών

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -10 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 15 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)(10) - (-10)(-1)}{(1)(10) - (15)(-1)} = \frac{-20}{25} = -0,8 \text{ A}$$

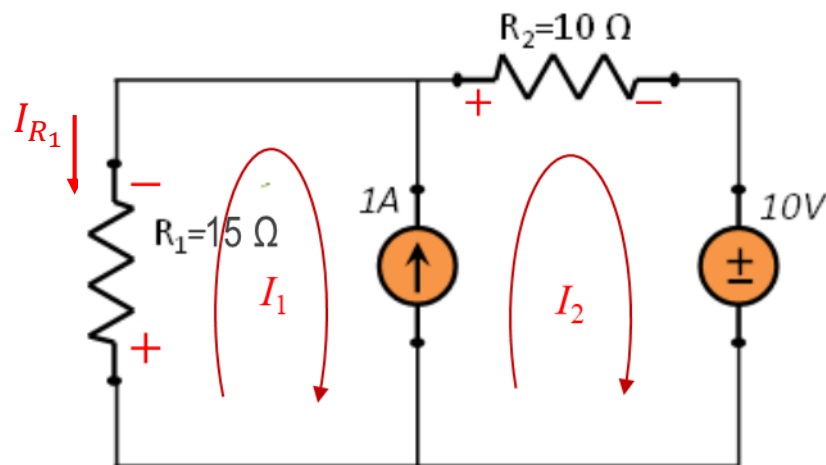
και

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 15 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 15 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(-10) - (15)(-1)}{25} = \frac{5}{25} = 0,2 \text{ A}$$

Έχοντας γνωρίσει τα ρεύματα βρόχων I_1 και I_2 , μπορούμε, εύκολα, να υπολογίσουμε κάθε άλλο μέγεθος στο κύκλωμα, π.χ., το ρεύμα I_{R_1} και την ισχύ P_1 στην αντίσταση R_1 :

$$I_{R_1} = -I_1 = 0.8 \text{ A}$$

$$P_1 = I_{R_1}^2 \cdot R_1 = 0.2^2 \cdot 15 = 0.6 \text{ W}$$



Παράδειγμα 4-10 Το κύκλωμα της εικόνας (Σχήμα 4-7, σελ. 102, Κ. Παπαδόπουλου “Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων”) περιλαμβάνει πηγή ρεύματος εξαρτώμενη από τάση ($0.5 \cdot V_x$). Υπολογίστε τα δύο ρεύματα βρόχων I_1 και I_2 εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων.

Λύση

Τα κυκλώματα με εξαρτημένη πηγή ρεύματος αντιμετωπίζουμε όπως τα κυκλώματα με ανεξάρτητη πηγή ρεύματος.

Με την πολικότητα που δίνεται η τάση V_x και τη φορά του ρεύματος βρόχου I_2 , η τιμή της είναι

$$V_x = -I_2 R_2 = -10 \cdot I_2 \text{ (γιατί;)} \quad (1)$$

Στον αριστερό βρόχο, η τιμή της εξαρτημένης πηγής ρεύματος είναι

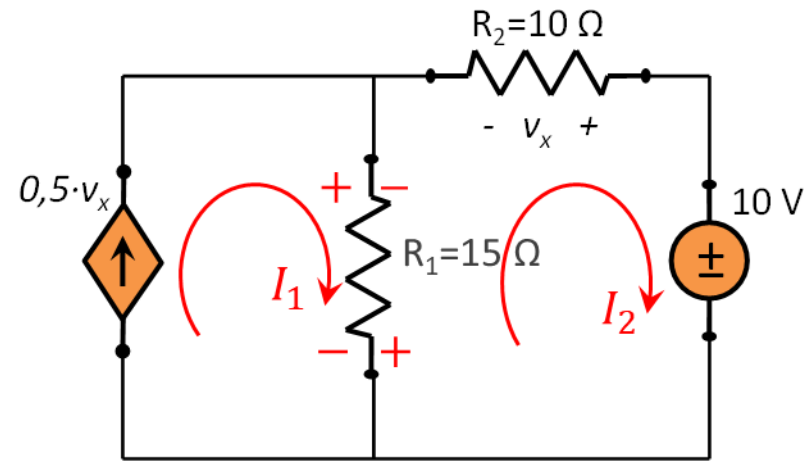
$$0.5 \cdot V_x = I_1$$

που, αντικαθιστώντας από την (1), γίνεται

$$0.5 \cdot (-10 \cdot I_2) = I_1$$

$$\Rightarrow I_1 = -5 \cdot I_2 \Rightarrow I_1 + 5 \cdot I_2 = 0 \quad (\text{εξίσωση 1}^\eta)$$

(συνεχίζεται...)



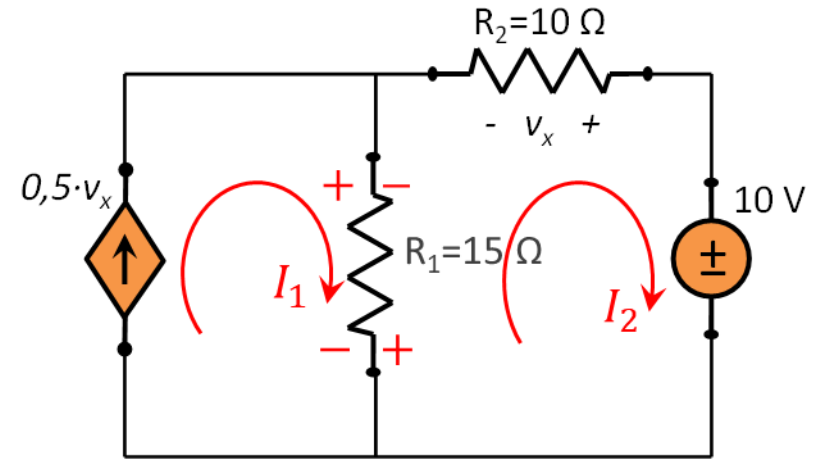
Λύση (. . . συνέχεια)

Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff σε έναν βρόχο που δεν διατρέχει την πηγή ρεύματος, τον δεξιό βρόχο.

$$R_1 \cdot I_1 - R_1 \cdot I_2 - R_2 \cdot I_2 - 10V = 0$$

$$\Rightarrow 15 \cdot I_1 - 15 \cdot I_2 - 10 \cdot I_2 = 10$$

$$\Rightarrow 15 \cdot I_1 - 25 \cdot I_2 = 10 \quad (\text{εξίσωση 2}^\eta)$$



Έχουμε το σύστημα

$$I_1 + 5 \cdot I_2 = 0$$

$$15 \cdot I_1 - 25 \cdot I_2 = 10$$

το οποίο λύνουμε (με ορίζουσες)

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 10 & -25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -25 \end{vmatrix}} = \frac{(0)(-25) - (10)(5)}{(1)(-25) - (15)(5)} = \frac{-50}{-100} = \mathbf{0.5A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -25 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(10) - (15)(0)}{-100} = \frac{10}{-100} = \mathbf{-0.1A}$$

Παράδειγμα 4-11 Υπολογίστε το ρεύμα I_x και την τάση V_x στο κύκλωμα (Σχήμα 4-8, σελ. 103, Κ. Παπαδόπουλου "Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων")

Λύση

Στο κύκλωμα περιλαμβάνονται μια εξαρτημένη πηγή τάσης που ελέγχεται από ρεύμα ($5 \cdot I_x$) και μια εξαρτημένη πηγή ρεύματος που ελέγχεται από τάση ($0.5 \cdot V_x$)

Το κύκλωμα έχει 3 βρόχους.

Σημειώνουμε τα ρεύματα I_1 , I_2 και I_3 των τριών βρόχων.

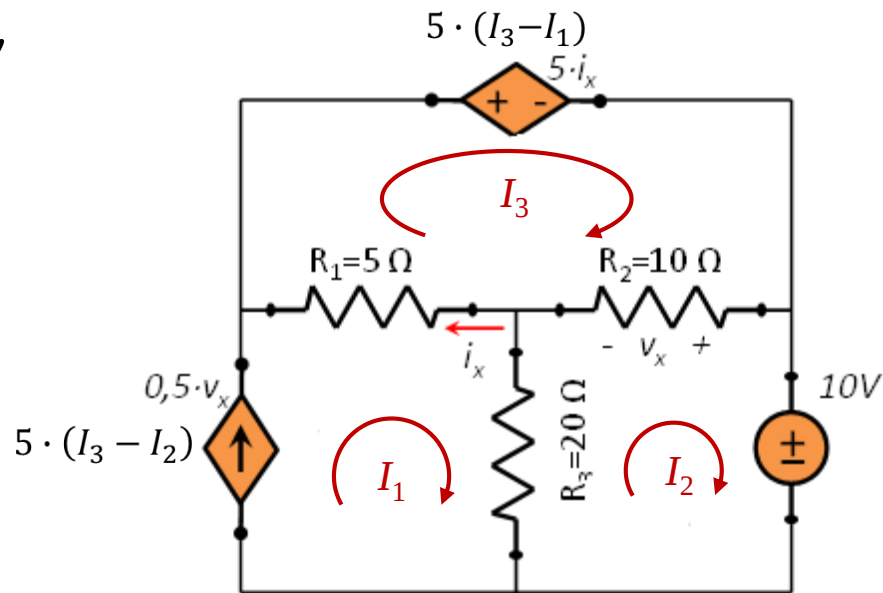
Γράφουμε τις τιμές των εξαρτημένων πηγών συναρτήσει των τριών ρευμάτων βρόχων.

$$\begin{aligned} \text{Η τιμή της εξαρτημένης πηγής ρεύματος είναι: } I &= 0.5 \cdot V_x = 0.5 \cdot [R_2 \cdot (I_3 - I_2)] \\ &\Rightarrow I = 0.5 \cdot [10 \cdot (I_3 - I_2)] \Rightarrow I = 5 \cdot (I_3 - I_2) \end{aligned}$$

$$\text{Η τιμή της εξαρτημένης πηγής τάσης είναι: } V = 5 \cdot I_x = 5 \cdot (I_3 - I_1)$$

Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από την πηγή ρεύματος στον αριστερά βρόχο

$$\begin{aligned} 5 \cdot (I_3 - I_2) &= I_1 \\ \Rightarrow I_1 + 5 \cdot I_2 - 5 \cdot I_3 &= 0 \quad (\text{εξίσωση 1}^\eta) \end{aligned}$$



Λύση (... συνέχεια)

Από το δεξί βρόχο (του I_2) προκύπτει η 2^η εξίσωση με εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff

$$-R_3 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 + R_2 \cdot I_3 - 10V = 0$$

$$\Rightarrow -20 \cdot I_2 + 20 \cdot I_1 - 10 \cdot I_2 + 10 \cdot I_3 = 10$$

$$\Rightarrow 20 \cdot I_1 - 30 \cdot I_2 + 10 \cdot I_3 = 10$$

$$\Rightarrow 2 \cdot I_1 - 3 \cdot I_2 + I_3 = 1 \quad (\text{εξίσωση 2^η})$$

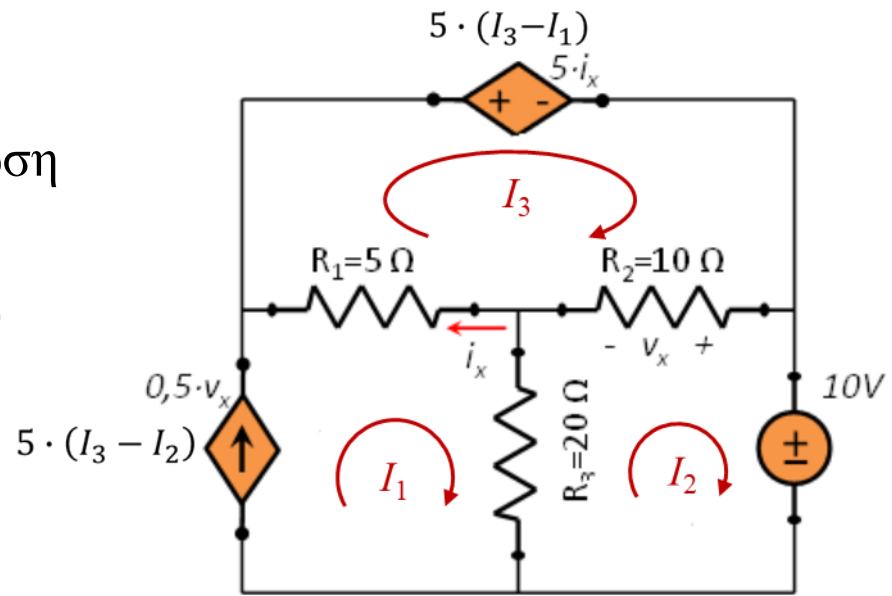
Η 3^η εξίσωση προκύπτει από τον πάνω βρόχο (του I_3) με εφαρμογή του νόμου τάσεων του Kirchhoff

$$-R_2 \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 - R_1 \cdot I_3 + R_1 \cdot I_1 - 5 \cdot (I_3 - I_1) = 0$$

$$\Rightarrow -10 \cdot I_3 + 10 \cdot I_2 - 5 \cdot I_3 + 5 \cdot I_1 - 5 \cdot (I_3 - I_1) = 0$$

$$\Rightarrow 10 \cdot I_1 + 10 \cdot I_2 - 20 \cdot I_3 = 0$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 - 2 \cdot I_3 = 0 \quad (\text{εξίσωση 3^η})$$



Λύση (... συνέχεια)

Έχουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων

$$I_1 + 5 \cdot I_2 - 5 \cdot I_3 = 0$$

$$2 \cdot I_1 - 3 \cdot I_2 + I_3 = 1$$

$$I_1 + I_2 - 2 \cdot I_3 = 0$$

το οποίο λύνουμε με τη μέθοδο των οριζουσών

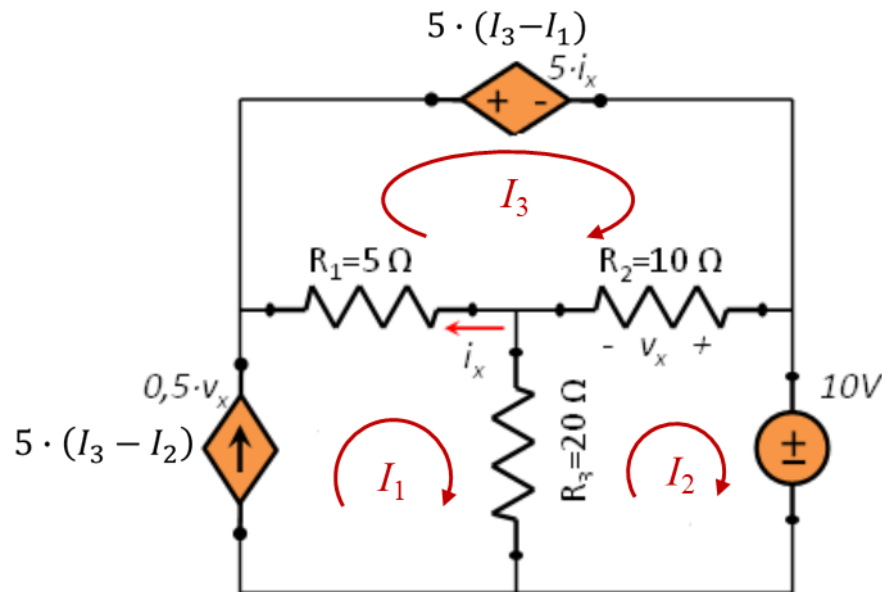
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{5} = 1 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{5} = 0.6 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ A}$$

Επομένως, οι ζητούμενοι άγνωστοι είναι: $I_x = I_3 - I_1 = 0.8 \text{ A} - 1 \text{ A} = -0.2 \text{ A}$

και $V_x = R_2 \cdot (I_3 - I_2) = 10 \cdot (0.8 - 0.6) = 2 \text{ V}$



Η μέθοδος των τάσεων κόμβων (Node-Voltage Method)

Η μέθοδος των κόμβων χρησιμοποιεί για αγνώστους τις τάσεις των κόμβων

Βήμα 1 Σημειώνουμε τους κόμβους στο κύκλωμα

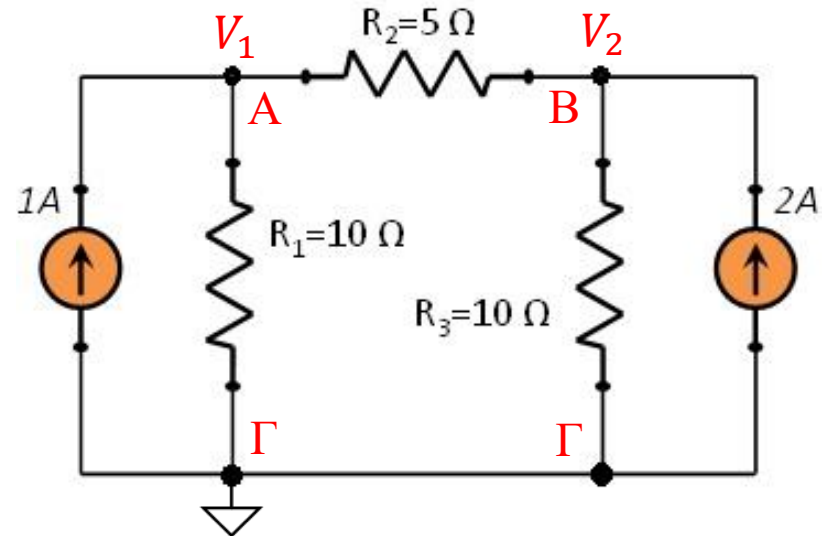
- Π.χ., A, B και Γ

Βήμα 2 Ορίζουμε έναν από αυτούς σαν κόμβο αναφοράς

- Συνήθως, τον σημειώνουμε με το σύμβολο της ψηφιακής γείωσης (∇)
- Η επιλογή είναι αυθαίρετη
- Ο κόμβος με τους περισσότερους κλάδους είναι μια καλή επιλογή (Π.χ., ο κόμβος Γ)

Βήμα 3 Ορίζουμε σαν αγνώστους τις τάσεις των υπολοίπων κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς.

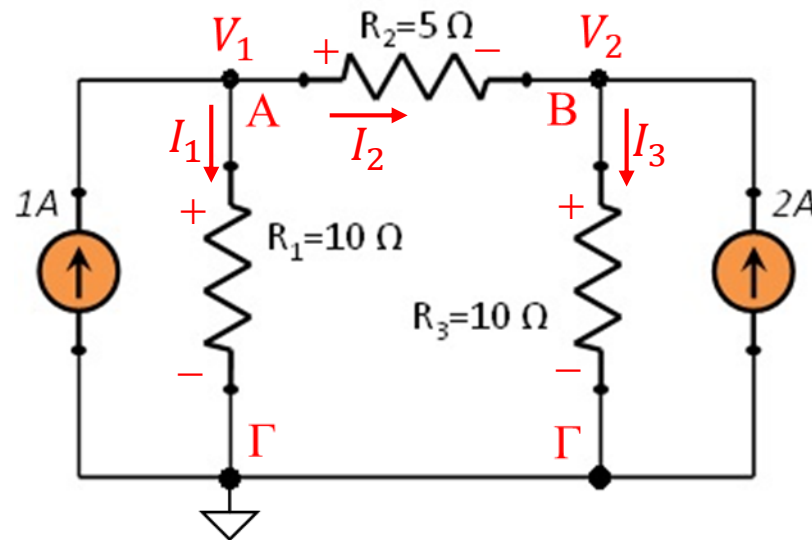
- Π.χ., V_1 και V_2
- Ως τάση ενός κόμβου ορίζεται η τάση του ως προς τον κόμβο αναφοράς



Η μέθοδος των τάσεων κόμβων (. . . συνέχεια)

Βήμα 4 Φτιάχνουμε τις εξισώσεις των τάσεων των κόμβων.

- Ξεκινάμε σημειώνοντας το ρεύμα σε κάθε κλάδο που αφήνει έναν κόμβο.
- Φτιάχνουμε την εξίσωση κάθε κόμβου χρησιμοποιώντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff. Π.χ.,
 - για τον κόμβο A: $I_1 + I_2 - 1A = 0$
 - για τον κόμβο B: $-I_2 + I_3 - 2A = 0$
- Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm, εκφράζουμε κάθε ρεύμα σαν συνάρτηση της τάσης του κόμβου. Έχουμε, $I_1 = \frac{V_1}{R_1}$, $I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2}$ και $I_3 = \frac{V_2}{R_3}$
 - Η εξίσωση για τον κόμβο A γίνεται: $\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} - 1 = 0 \Rightarrow 3 \cdot V_1 - 2 \cdot V_2 = 10$
 - και για τον κόμβο B: $-\frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} - 2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot V_1 - 3 \cdot V_2 = -20$



Βήμα 5 Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων ως προς τις άγνωστες τάσεις V_1 και V_2 των κόμβων.

(συνεχίζεται . . .)

Η μέθοδος των τάσεων κόμβων (. . . συνέχεια)

Λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$3 \cdot V_1 - 2 \cdot V_2 = 10$$

$$2 \cdot V_1 - 3 \cdot V_2 = -20$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -20 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(10)(-3) - (-20)(-2)}{(3)(-3) - (2)(-2)} = \frac{-70}{-5} = 14 \text{ V}$$

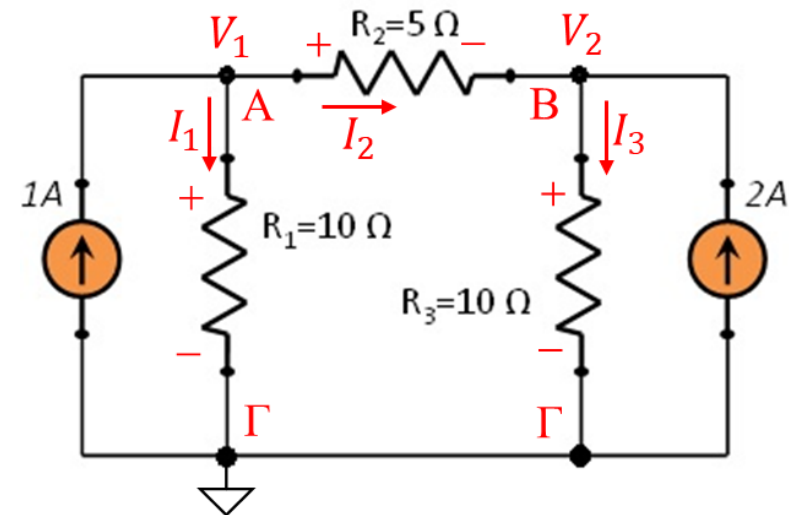
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(-20) - (2)(10)}{-5} = \frac{-80}{-5} = 16 \text{ V}$$

Από τις τάσεις V_1 και V_2 των κόμβων υπολογίζουμε εύκολα τα ρεύματα του κυκλώματος:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{14 \text{ V}}{10 \Omega} = 1.4 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = \frac{14 \text{ V} - 16 \text{ V}}{5 \Omega} = -0.4 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{16 \text{ V}}{10 \Omega} = 1.6 \text{ A}$$



Παράδειγμα 4-12 Υπολογίστε τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις του κυκλώματος (Σχήμα 4-16, σελ. 113, Κ. Παπαδόπουλου "Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων").

Λύση

Το κύκλωμα έχει τέσσερις κόμβους, Α, Β, Γ και Δ.

Θεωρούμε τον Δ ως κόμβο αναφοράς.

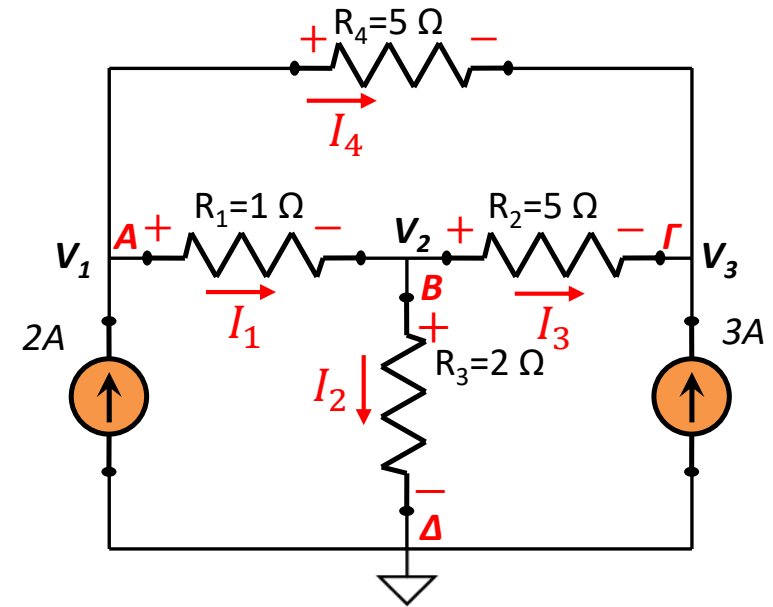
Σημειώνουμε τα ρεύματα I_1 , I_2 , I_3 και I_4 στους κόμβους.

Στον κόμβο Α, ο νόμος του Kirchhoff γράφεται $-2A + I_1 + I_4 = 0$

Από το νόμο του Ohm, έχουμε για τα ρεύματα: $I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1}$ και $I_4 = \frac{V_1 - V_3}{R_4}$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση των ρευμάτων, παίρνουμε την εξίσωση των τάσεων

$$\frac{V_1 - V_2}{R_1} + \frac{V_1 - V_3}{R_4} = 2 \Rightarrow \frac{V_1 - V_2}{1} + \frac{V_1 - V_3}{5} = 2 \Rightarrow 6 \cdot V_1 - 5 \cdot V_2 - V_3 = 10$$



Λύση (... συνέχεια)

Στον κόμβο Β, ο νόμος του Kirchhoff γράφεται

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Επίσης, από το νόμο του Ohm, έχουμε για τα ρεύματα:

$$I_2 = \frac{V_2}{R_3} \text{ και } I_3 = \frac{V_2 - V_3}{R_2}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση των ρευμάτων, παίρνουμε τη δεύτερη εξίσωση των τάσεων

$$\begin{aligned} -\frac{V_1 - V_2}{R_1} + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} &= 0 \Rightarrow -\frac{V_1 - V_2}{1} + \frac{V_2}{2} + \frac{V_2 - V_3}{5} = 0 \\ &\Rightarrow -10 \cdot V_1 + 17 \cdot V_2 - 2 \cdot V_3 = 0 \end{aligned}$$

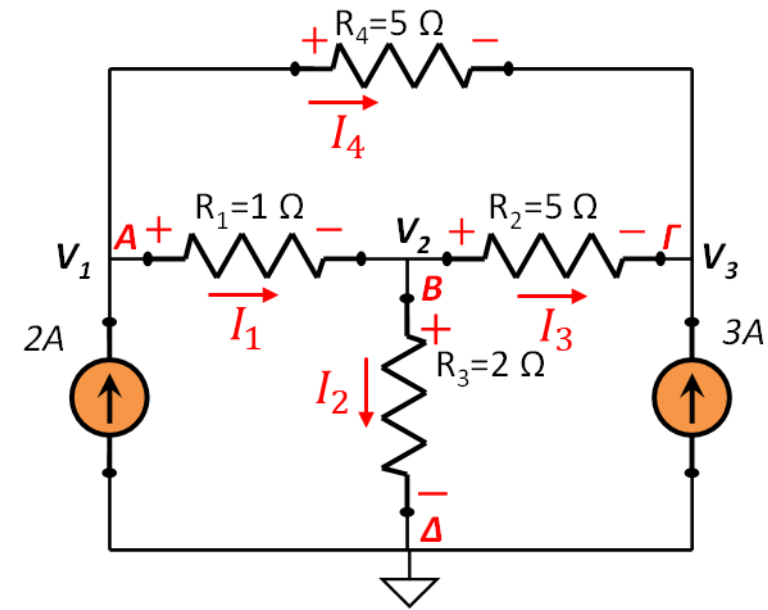
Στον κόμβο Γ, ο νόμος του Kirchhoff γράφεται

$$-I_3 - 3 \text{ A} - I_4 = 0$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση των ρευμάτων, παίρνουμε την Τρίτη εξίσωση των τάσεων

$$-\frac{V_2 - V_3}{R_2} - 3 - \frac{V_1 - V_3}{R_4} = 0 \Rightarrow -\frac{V_2 - V_3}{5} - \frac{V_1 - V_3}{5} = 3 \Rightarrow -V_1 - V_2 - 2 \cdot V_3 = 10$$

(συνεχίζεται...) 58



Λύση (... συνέχεια)

Έχουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$6 \cdot V_1 - 5 \cdot V_2 - V_3 = 10$$

$$10 \cdot V_1 - 17 \cdot V_2 + 2 \cdot V_3 = 0$$

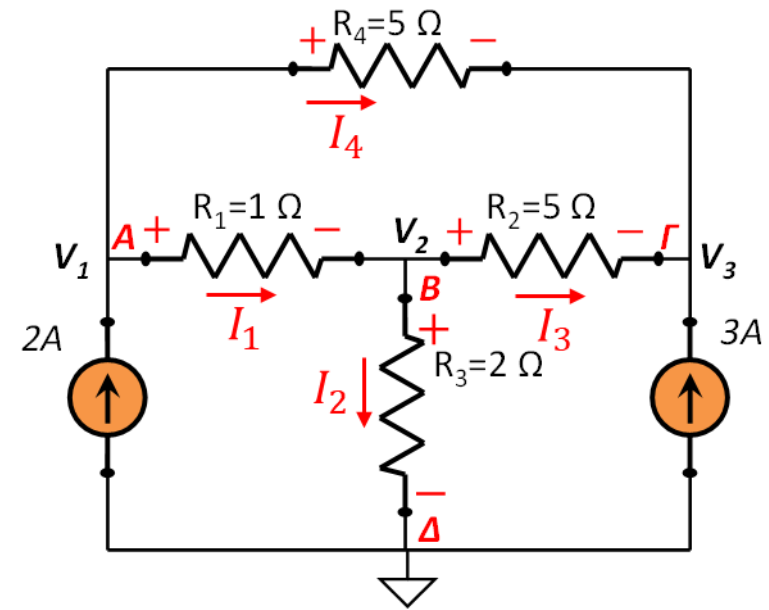
$$V_1 + V_2 + 2 \cdot V_3 = -10$$

Το οποίο λύνουμε με τη μέθοδο των οριζουσών

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 & -1 \\ 0 & -17 & 2 \\ -10 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -1 \\ 10 & -17 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2.9}{0.22} = 13.2 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 10 & -1 \\ 10 & 0 & 2 \\ 1 & -10 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -1 \\ 10 & -17 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2.2}{0.22} = 10 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5 & 10 \\ 10 & -17 & 0 \\ 1 & 1 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -1 \\ 10 & -17 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4.2}{0.22} = 19.1 \text{ V}$$



Παράδειγμα 4-13 Επιλύστε το κύκλωμα με τη μέθοδο κόμβων (Σχήμα 4-16, σελ. 113, Κ. Παπαδόπουλου “Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων”).

Σημείωση: το κύκλωμα αυτό έχει λυθεί με τη μέθοδο των βρόχων (βλ., παράδειγμα 4-8) αλλά και με τη μέθοδο αντικατάστασης πηγών (βλ. παράδειγμα 3-17, κεφ. 3)

Λύση

Το κύκλωμα έχει δύο κόμβους, τους A και B.

Θεωρούμε τον B κόμβο αναφοράς. Άγνωστός μας είναι η τάση V_A (ή V_{AB}) του κόμβου A.

Σημειώνουμε τα ρεύματα στον κόμβο A

και γράφουμε το νόμο του Kirchhoff για τα ρεύματα στον κόμβο A

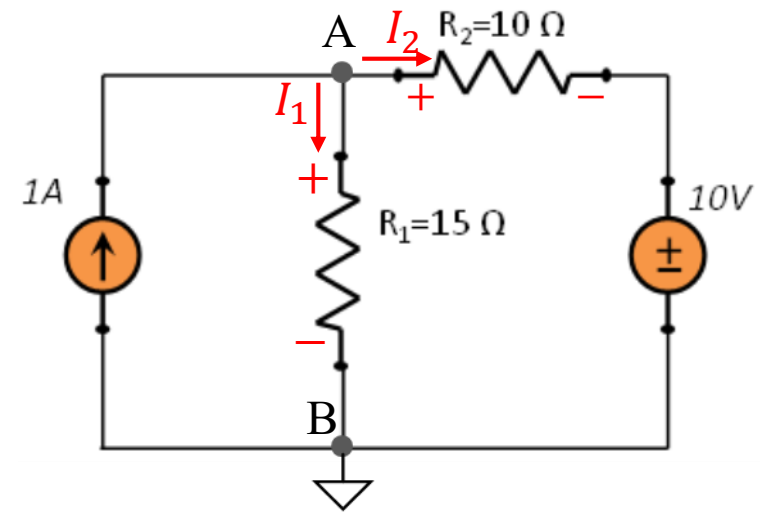
$$-1A + I_1 + I_2 = 0$$

Από το νόμο του Ohm, έχουμε για τα ρεύματα: $I_1 = \frac{V_A}{R_1}$ και $I_2 = \frac{V_A - 10V}{R_2}$ (γιατί;)

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση των ρευμάτων, παίρνουμε

$$-1 + \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_A - 10}{R_2} = 0 \Rightarrow -1 + \frac{V_A}{15} + \frac{V_A - 10}{10} = 0 \Rightarrow -30 + 2 \cdot V_A + 3 \cdot V_A - 30 = 0$$

$$\Rightarrow 5 \cdot V_A = 60 \Rightarrow V_A = 12 V$$



Λύση (... συνέχεια)

Από την τάση του κόμβου, $V_A = 10\text{ V}$, μπορούμε να υπολογίσουμε οποιοδήποτε μέγεθος στο κύκλωμα.

Π.χ.:

- το ρεύμα στην αντίσταση R_1 :

$$I_1 = \frac{V_A}{R_1} = \frac{12\text{ V}}{15\ \Omega} = 0.8\text{ A}$$

- το ρεύμα στην αντίσταση R_2 :

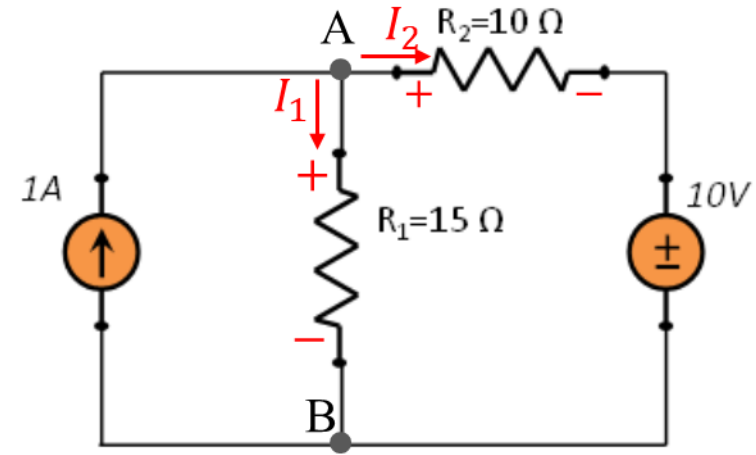
$$I_2 = \frac{V_A - 10\text{ V}}{R_2} = \frac{12\text{ V} - 10\text{ V}}{10\ \Omega} = 0.2\text{ A}$$

- την ισχύ που παρέχει στο κύκλωμα (γιατί;) η πηγή ρεύματος 1A:

$$P_{1A} = V_{AB} \cdot (1\text{ A}) = 12\text{ W}$$

- την ισχύ που καταναλώνει (γιατί;) η πηγή τάσης 10 V:

$$P_{10V} = (10\text{ V}) \cdot I_2 = 2\text{ W}$$



Παράδειγμα 4-13 Επιλύστε το κύκλωμα με τη μέθοδο κόμβων (Σχήμα 4-17, σελ. 115, Κ. Παπαδόπουλου “Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων”).

Σημείωση: Το κύκλωμα αυτό μπορείτε να βρείτε λυμένο με τη μέθοδο των βρόχων (βλ., Σχ. 4-2, σελ. 96, Κ. Παπαδόπουλου “Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων”)

Λύση

Από τους δύο κόμβους, A και B, θεωρούμε τον B σαν κόμβο αναφοράς.

Σημειώνουμε τα ρεύματα στον κόμβο A,

και γράφουμε το νόμο του Kirchhoff για τα ρεύματα σ’ αυτόν τον κόμβο

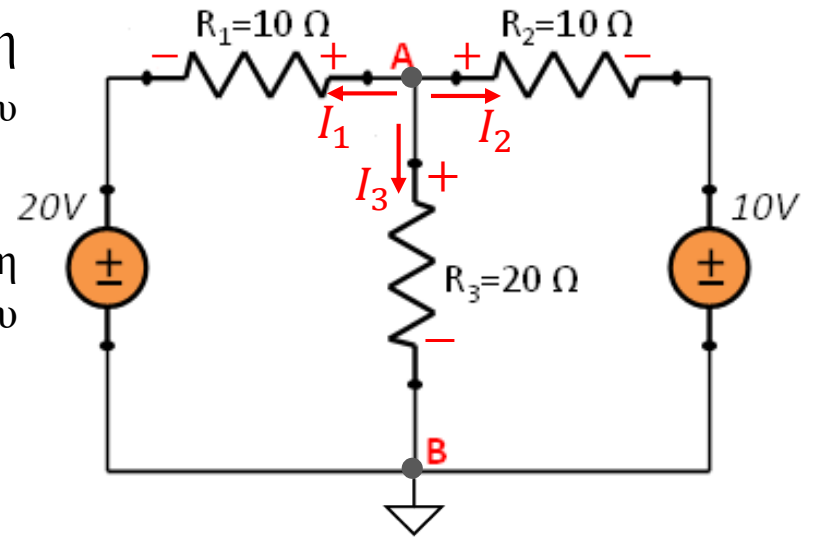
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Από το νόμο του Ohm, έχουμε για τα ρεύματα: $I_1 = \frac{V_A - 20V}{R_1}$, $I_3 = \frac{V_A}{R_3}$ και $I_2 = \frac{V_A - 10V}{R_2}$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση των ρευμάτων, παίρνουμε

$$\frac{V_A - 20V}{R_1} + \frac{V_A}{R_3} + \frac{V_A - 10V}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{V_A - 20}{10} + \frac{V_A}{20} + \frac{V_A - 10}{10} = 0$$

$$\Rightarrow 2(V_A - 20) + V_A + 2(V_A - 10) = 0 \Rightarrow 5 \cdot V_A = 60 \Rightarrow V_A = 12 \text{ V} \quad (\text{συνεχίζεται} \dots)$$



Λύση (... συνέχεια)

Από την τάση του κόμβου, $V_A = 12\text{ V}$, μπορούμε να υπολογίσουμε οποιοδήποτε μέγεθος στο κύκλωμα, π.χ., τα τρία ρεύματα των κλάδων:

$$I_1 = \frac{V_A - 20\text{V}}{R_1} = \frac{12\text{ V} - 20\text{ V}}{10\ \Omega} = -0.8\text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{12\text{ V}}{20\ \Omega} = 0.6\text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_A - 10\text{V}}{R_3} = \frac{12\text{ V} - 10\text{ V}}{10\ \Omega} = 0.2\text{ A}$$

