

Κεφάλαιο 8

Μέθοδοι ανάλυσης κυκλωμάτων

8

Μέθοδοι ανάλυσης κυκλωμάτων

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Συστήματα εξισώσεων στην ανάλυση κυκλωμάτων
- Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων
- Η μέθοδος των ρευμάτων των κλάδων

Συστήματα εξισώσεων

- Τα συστήματα εξισώσεων αποτελούνται από μια ομάδα N εξισώσεων οι οποίες περιλαμβάνουν N αγνώστους.
 - N είναι ένας αριθμός με τιμή 2 ή μεγαλύτερη

Που θα το βρείτε: R. J. Fowler, “ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ AC-DC”, σελ. 145-149

Η σπάντα μορφή ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης

Ένα σύστημα εξισώσεων 2^{ης} τάξης γραμμένο σε σπάντα μορφή είναι:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2$$

όπου:

- τα ‘**a**’ είναι οι **συντελεστές** των αγνώστων μεταβλητών x_1 και x_2 και αντιπροσωπεύουν τις τιμές των συνιστωσών ενός κυκλώματος, όπως, π.χ., τιμές αντιστάσεων και
- τα ‘**b**’ είναι οι **σταθερές** και αντιπροσωπεύουν τις τιμές των πηγών τάσης

Ένα σύστημα εξισώσεων 2^{ης} τάξης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Υποθέστε ότι οι παρακάτω δύο εξισώσεις

$$2I_1 = 8 - 5I_2$$

$$4I_2 - 5I_1 + 6 = 0$$

περιγράφουν ένα ορισμένο κύκλωμα με δύο άγνωστα ρεύματα I_1 και I_2 (οι συντελεστές είναι τιμές αντιστάσεων και οι σταθερές είναι τάσεις στο κύκλωμα). Γράψτε τις εξισώσεις σε στάνταρ μορφή.

ΛΥΣΗ

Αναδιατάσσουμε τις εξισώσεις σε στάνταρ μορφή ως εξής:

$$2I_1 + 5I_2 = 8$$

$$-5I_1 + 4I_2 = -6$$

Η στάνταρ μορφή ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης

Ένα σύστημα εξισώσεων 3^{ης} τάξης γραμμένο σε στάνταρ μορφή είναι:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3$$

Ένα σύστημα εξισώσεων 3^{ου} βαθμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Υποθέστε ότι οι παρακάτω τρεις εξισώσεις

$$4I_3 + 2I_2 + 7I_1 = 0$$

$$5I_1 + 6I_2 + 9I_3 - 7 = 0$$

$$8 = I_1 + 2I_2 + 5I_3$$

περιγράφουν ένα ορισμένο κύκλωμα με τρία άγνωστα ρεύματα I_1 , I_2 και I_3 . Γράψτε τις εξισώσεις σε στάνταρ μορφή.

ΛΥΣΗ

Αναδιατάσσουμε τις εξισώσεις σε στάνταρ μορφή ως εξής:

$$7I_1 + 2I_2 + 4I_3 = 0$$

$$5I_1 + 6I_2 + 9I_3 = 7$$

$$I_1 + 2I_2 + 5I_3 = 8$$

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων

- Λύση με αντικατάσταση
- Λύση με ορίζουσες
- Λύση με τη βοήθεια υπολογιστή (PC ή χειρός)

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων με αντικατάσταση

Θεωρήστε το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων

$$2x_1 + 6x_2 = 8 \quad (\text{Εξ. 1})$$

$$3x_1 + 6x_2 = 2 \quad (\text{Εξ. 2})$$

Βήμα 1: Λύστε την Εξ. 1 ως προς x_1

$$2x_1 = 8 - 6x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{8 - 6x_2}{2} \Rightarrow x_1 = 4 - 3x_2$$

Βήμα 2: Αντικαταστήστε το αποτέλεσμα για το x_1 στην Εξ. 2 και λύστε ως προς x_2

$$\begin{aligned} 3(4 - 3x_2) + 6x_2 &= 2 \\ \Rightarrow 12 - 9x_2 + 6x_2 &= 2 \\ \Rightarrow -3x_2 &= -10 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{-10}{-3} = 3.33 \end{aligned}$$

Βήμα 3: Αντικαταστήστε το αποτέλεσμα για το x_2 στην εξίσωση για το x_1 στο Βήμα 1,

$$x_1 = 4 - 3(3.33) = -5.99$$

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης με ορίζουσες

Για να δείξουμε τη μέθοδο των οριζουσών στη λύση ενός συστήματος εξισώσεων, ας βρούμε τις τιμές των ρευμάτων I_1 και I_2 στο παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων

$$10I_1 + 5I_2 = 15$$

$$2I_1 + 4I_2 = 8$$

Πρώτα, φτιάξτε τη χαρακτηριστική **ορίζουσα** για τον **πίνακα** των συντελεστών των άγνωστων ρευμάτων.

Ο **πίνακας** (matrix) των συντελεστών είναι

1 ^η στήλη	2 ^η στήλη	
↓	↓	
10	5	← 1 ^η γραμμή
2	4	← 2 ^η γραμμή

και η **ορίζουσα** (determinant) του πίνακα είναι

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης με ορίζουσες (συνέχεια)

Βήμα 1: Υπολογίστε την τιμή της ορίζουσας των συντελεστών ως εξής:

- πολλαπλασιάστε τον πρώτο αριθμό της πρώτης στήλης επί το δεύτερο αριθμό της δεύτερης στήλης ($10 \times 4 = 40$)
- πολλαπλασιάστε τον δεύτερο αριθμό της πρώτης στήλης επί το πρώτο αριθμό της δεύτερης στήλης ($2 \times 5 = 10$)
- αφαιρέστε το δεύτερο γινόμενο από το πρώτο ($40 - 10 = 30$)

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 30$$

Βήμα 2: Φτιάξτε την ορίζουσα του I_1 , αντικαθιστώντας τους συντελεστές του I_1 στην 1^η στήλη της ορίζουσας των συντελεστών με τους σταθερούς αριθμούς που είναι στο δεξιό μέλος των εξισώσεων

$$\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

και υπολογίστε την $\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 15 \cdot 4 - 8 \cdot 5 = 20$

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης με ορίζουσες (συνέχεια)

Βήμα 3: Λύνουμε για το ρεύμα I_1 διαιρώντας την ορίζουσα του I_1 με την ορίζουσα των συντελεστών

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{20}{30} = \mathbf{0.667 \text{ A}}$$

Βήμα 4: Κατασκευάζουμε την ορίζουσα του I_2 , αντικαθιστώντας τους συντελεστές του I_2 στη 2^η στήλη της χαρακτηριστικής ορίζουσας με τους σταθερούς αριθμούς που είναι στο δεξιό μέλος των εξισώσεων

$$\begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

την υπολογίζουμε $\begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 10 \cdot 8 - 2 \cdot 15 = 50$

και λύνουμε για το ρεύμα I_2 : $I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{30} = \frac{50}{30} = \mathbf{1.67 \text{ A}}$

Ένα παράδειγμα συστήματος εξισώσεων 2^{ης} τάξης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Λύστε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων για τα άγνωστα ρεύματα:

$$2I_1 - 5I_2 = 10$$

$$6I_1 + 10I_2 = 20$$

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε την τιμή της χαρακτηριστικής ορίζουσας των συντελεστών:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = (2)(10) - (-5)(6) = 50$$

Λύνουμε για το ρεύμα I_1 :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 20 & 10 \end{vmatrix}}{50} = \frac{(10)(10) - (-5)(6)}{50} = \frac{100 - (-100)}{50} = \frac{200}{50} = \mathbf{4 \text{ A}}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Ομοίως, λύνουμε για το ρεύμα I_2 :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}{50} = \frac{(2)(20) - (6)(10)}{50} = \frac{40 - 60}{50} = -\mathbf{0.4 \text{ A}}$$

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης με ορίζουσες

Ας βρούμε τα άγνωστα ρεύματα I_1 , I_2 και I_3 στο παρακάτω σύστημα τριων εξισώσεων

$$I_1 + 3I_2 - 2I_3 = 7$$

$$4I_2 + I_3 = 8$$

$$-5I_1 + I_2 + 6I_3 = 9$$

Η σπάνταρ μορφή του συστήματος είναι

$$1I_1 + 3I_2 - 2I_3 = 7$$

$$0I_1 + 4I_2 + 1I_3 = 8$$

$$-5I_1 + 1I_2 + 6I_3 = 9$$

Η χαρακτηριστική **ορίζουσα** των συντελεστών των άγνωστων ρευμάτων.

Συντελεστές του I_1 Συντελεστές του I_2 Συντελεστές του I_3

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης με ορίζουσες (συνέχεια)

Βήμα 1: Ξαναγράψτε τις πρώτες δύο στήλες αμέσως στα δεξιά της ορίζουσας

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 6 & -5 & 1 \end{array} \right|$$

Βήμα 2: Πολλαπλασιάστε τους τρεις αριθμούς στην κάθε μια από τις τρεις προς τα κάτω διαγωνίους και προσθέστε τα τρία γινόμενα, $(1)(4)(6) + (3)(1)(-5) + (-2)(0)(1) = 9$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 6 & -5 & 1 \end{array} \right|$$

Πολλαπλασιάστε τους τρεις αριθμούς στην κάθε μια από τις τρεις προς τα πάνω διαγωνίους και προσθέστε τα τρία γινόμενα, $(-5)(4)(-2) + (1)(1)(1) + (6)(0)(3) = 41$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 6 & -5 & 1 \end{array} \right|$$

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης με ορίζουσες (συνέχεια)

Αφαιρέστε τα δύο παραπάνω αποτελέσματα, $9 - 41 = -32$. Αυτή είναι η τιμή της ορίζουσας των συντελεστών.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -32$$

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε την ορίζουσα για το ρεύμα I_1 (όπως στα συστήματα 2^{ης} τάξης)

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

και η τιμή της υπολογίζεται όπως παραπάνω

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (7)(4)(6) + (3)(1)(9) + (-2)(8)(1) - (9)(4)(-2) - (1)(1)(7) - (6)(8)(3) = 100$$

Λύση ενός συστήματος εξισώσεων 3ης τάξης με ορίζουσες (συνέχεια)

Βήμα 4: Λύνουμε για το ρεύμα I_1 διαιρώντας την ορίζουσα του I_1 με την ορίζουσα των συντελεστών.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{100}{-32} = -\mathbf{3.125 \text{ A}}$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε τα ρεύματα I_2 και I_3 .

Ένα παράδειγμα συστήματος εξισώσεων 3^{ης} τάξης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: Βρείτε την τιμή του ρεύματος I_2 από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων α:

$$2I_1 + 0.5I_2 + I_3 = 0$$

$$0.75I_1 + 0I_2 + 2I_3 = 1.5$$

$$3I_1 + 0.2I_2 + 0I_3 = -1$$

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε την τιμή της χαρακτηριστικής ορίζουσας των συντελεστών ως εξής:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.75 & 0 & 2 \\ 3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.75 & 0 \\ 3 & 0.2 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(0)(0) + (0.5)(2)(3) + (1)(0.75)(0.2) - (3)(0)(1) - (0.2)(2)(2) + (0)(0.75)(0.5)$$

$$= 3.15 - 0.8 = 2.35$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Υπολογίζουμε την ορίζουσα για το ρεύμα I_2 .

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0.75 & 1.5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0.75 & 1.5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(1.5)(0) + (0)(2)(3) + (1)(0.75)(-1) - (3)(1.5)(1) - (-1)(2)(2) - (0)(0.75)(0) = 0.75 - 0.5 = -1.25$$

Τελικά, βρίσκουμε το I_2 διαιρώντας τις δύο ορίζουσες

$$I_2 = \frac{-1.25}{2.35} = -\mathbf{0.532\text{ A}} = -\mathbf{532\text{ mA}}$$

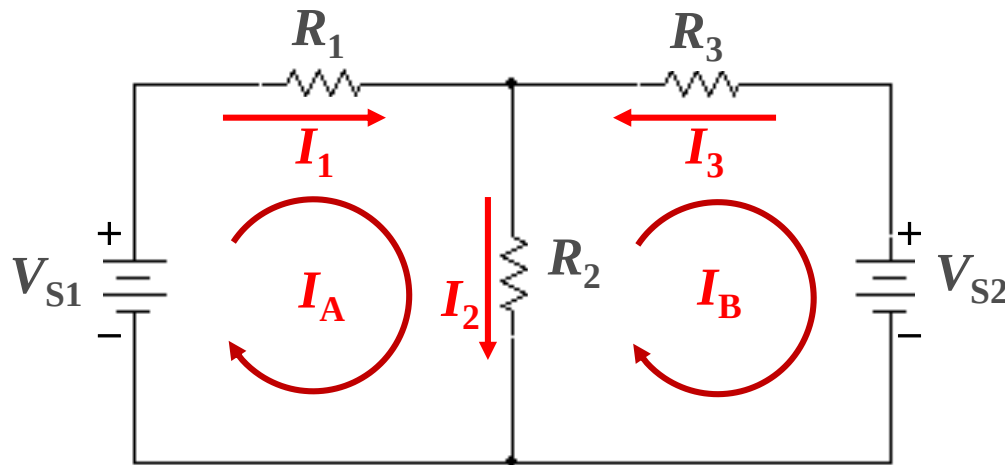
Μέθοδοι ανάλυσης κυκλωμάτων –

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων

Που θα το βρείτε: R. J. Fowler, “ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ AC-DC”, σελ. 149-159

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων

- Εργαζόμαστε με τα **ρεύματα βρόχων** αντί για τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων
 - I_1 , I_2 και I_3 : πραγματικά ρεύματα κλάδων
 - I_A και I_B : ρεύματα βρόχων

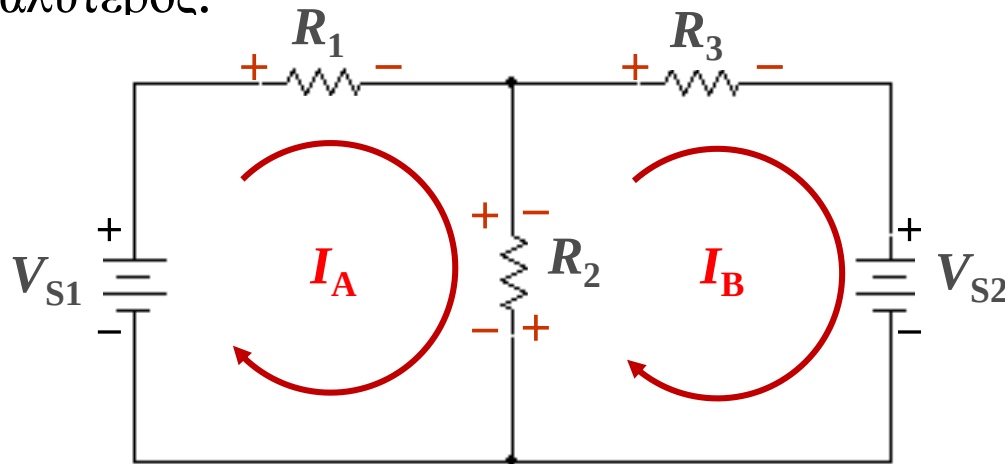


- Τα ρεύματα βρόχων είναι μαθηματικές ποσότητες
 - Χρησιμοποιούν για την ευκολότερη ανάλυση του κυκλώματος

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων: Τα βήματα

Βήμα 1. Σημειώνουμε ένα ρεύμα σε κάθε έναν βρόχο του κυκλώματος

- Η διεύθυνση είναι αυθαίρετη (συνηθίζουμε διεύθυνση CW)
- Μπορεί να μην είναι η πραγματική φορά του ρεύματος
- Ο αριθμός των ρευμάτων βρόχων πρέπει να είναι επαρκής, όχι μεγαλύτερος.



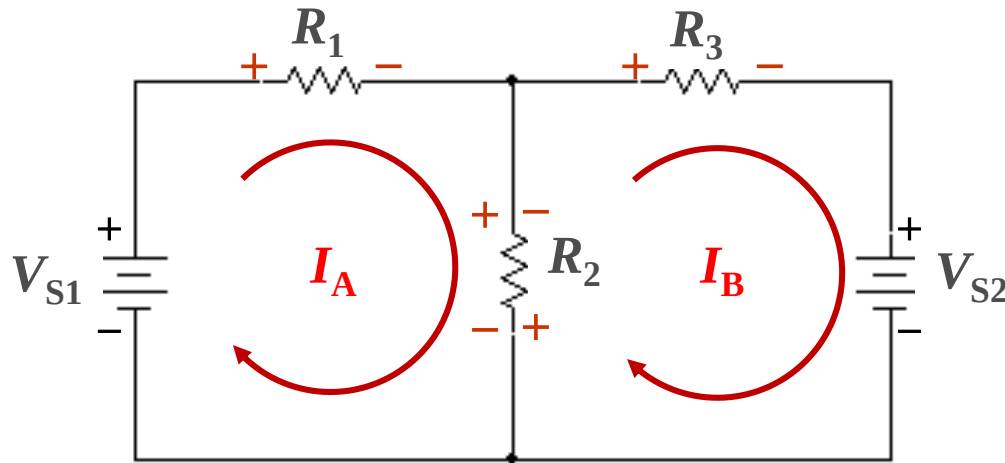
Βήμα 2. Σημειώνουμε την πολικότητα (+ και -) της πτώσης τάσης σε κάθε αντίσταση

- Καθορίζεται από τις διευθύνσεις των ρευμάτων βρόχων

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων: Τα βήματα (συνέχεια)

Βήμα 3. Εφαρμόζουμε το νόμο των τάσεων του Kirchhoff σε κάθε βρόχο.

- Αν ένα στοιχείο (π.χ., R_2) διαρρέεται από περισσότερα από ένα ρεύματα βρόχων, τα περιλαμβάνουμε όλα.
- Προκύπτει μια εξίσωση για κάθε βρόχο.



- Για βρόχο A: $V_{S1} - R_1 I_A - R_2 I_A + R_2 I_B = 0$
- Για βρόχο B: $-V_{S2} - R_2 I_B + R_2 I_A - R_3 I_B = 0$

Η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων: Τα βήματα (συνέχεια)

Βήμα 4. Συνδυάζουμε τους όμοιους όρους

- Φέρνουμε το σύστημα των εξισώσεων σε στάνταρ μορφή.
- Δεν ξεχνάμε: οι άγνωστες ποσότητες είναι τα ρεύματα βρόχων I_A και I_B .

$$\begin{array}{lcl} V_{S1} - R_1 I_A - R_2 I_A + R_2 I_B = 0 & \Rightarrow & (R_1 + R_2) I_A - R_2 I_B = V_{S1} \\ -V_{S2} - R_2 I_B + R_2 I_A - R_3 I_B = 0 & \Rightarrow & -R_2 I_A + (R_2 + R_3) I_B = -V_{S2} \end{array}$$

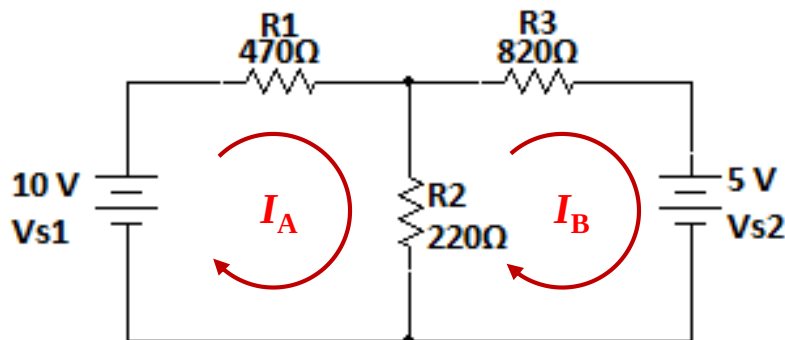
Τέλος, λύνουμε το σύστημα και υπολογίζουμε τα ρεύματα των βρόχων

Συνοπτικός κανόνας για την εφαρμογή των βημάτων 1 – 4:

(Άθροισμα αντιστάσεων στο βρόχο) × (ρεύμα βρόχου) – (κάθε αντίσταση κοινή σε δύο βρόχους) × (ρεύμα γειτονικού βρόχου) = (τάση πηγής στο βρόχο)

Ένα παράδειγμα της μεθόδου των βρόχων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5: Βρείτε τα ρεύματα των κλάδων στο παρακάτω κύκλωμα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων



ΛΥΣΗ

Σημειώνουμε τα ρεύματα βρόχων I_A και I_B δεξιόστροφα (CW)

Οι τιμές των αντιστάσεων είναι σε Ohm και των τάσεων σε Volts.

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα για να φτιάξουμε τις εξισώσεις των δύο βρόχων:

$$(470 + 220)I_A - 220I_B = 10$$

$$690I_A - 220I_B = 10 \quad \text{για το βρόχο A}$$

$$-220I_A + (220 + 820)I_B = -5$$

$$-220I_A + 1040I_B = -5 \quad \text{για το βρόχο B}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Χρησιμοποιούμε ορίζουσες για να βρούμε το ρεύμα I_A .

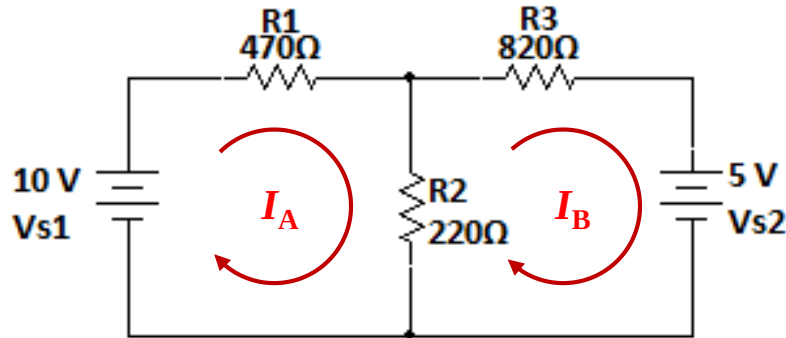
$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -220 \\ -5 & 1040 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 690 & -220 \\ -220 & 1040 \end{vmatrix}} = \frac{(10)(1040) - (-5)(-220)}{(690)(1040) - (-220)(-220)} = \frac{10400 - 1100}{717600 - 48400} = \frac{102900}{669200} = 13.9 \text{ mA}$$

Για το I_B έχουμε:

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 690 & 10 \\ -220 & -5 \end{vmatrix}}{669200} = \frac{(690)(-5) - (-220)(10)}{669200} = \frac{-3450 - (-2200)}{717600 - 48400} = -1.87 \text{ mA}$$

Το αρνητικό πρόσημο του I_B σημαίνει ότι η φορά που σχεδιάσαμε είναι αντίθετη από την πραγματική

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

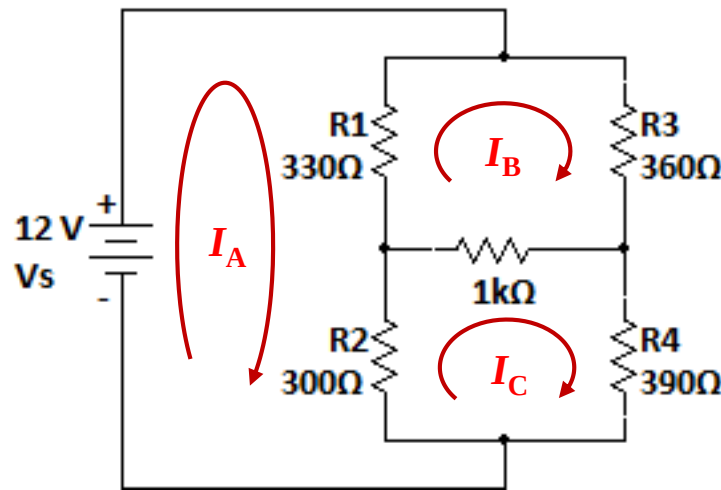


Βρίσκουμε τα πραγματικά ρεύματα των κλάδων.

- Στην R1, $I_1 = I_A = \mathbf{13.9\text{ mA}}$
- Στην R3, $I_3 = I_B = \mathbf{-1.87\text{ mA}}$. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει αντίθετη φορά από αυτή που σχεδιάσαμε αρχικά για το I_B .
- Στην R2, $I_2 = I_A - I_B = 13.9\text{ mA} - (-1.87\text{ mA}) = \mathbf{15.8\text{ mA}}$.
 - Γνωρίζοντας τα ρεύματα των κλάδων, μπορούμε να βρούμε τις τάσεις από το νόμο του Ohm.

Ένα παράδειγμα της μεθόδου των βρόχων για κύκλωμα με περισσότερους από δύο βρόχους

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6: Για το κύκλωμα γέφυρας Wheatstone της εικόνας, βρείτε το ρεύμα σε κάθε αντίσταση (ρεύμα κλάδου), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων βρόχων

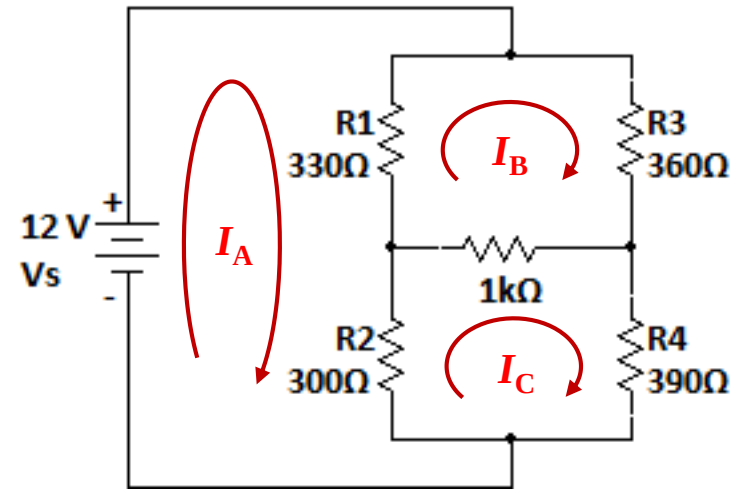


ΛΥΣΗ

Σημειώνουμε τρία δεξιόστροφα (CW) ρεύματα βρόχων I_A , I_B και I_C .

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα, γράφουμε τις εξισώσεις των τριών βρόχων.

ΛΥΣΗ (συνέχεια)



- Για το βρόχο A: $(330 + 300)I_A - 330I_B - 300I_C = 12$
 $630I_A - 330I_B - 300I_C = 12$
- Για το βρόχο B: $-330I_A + (330 + 360 + 1000)I_B - 1000I_C = 0$
 $-330I_A + 1690I_B - 1000I_C = 0$
- Για το βρόχο C: $-300I_A - 1000I_B + (300 + 390 + 1000)I_C = 0$
 $-300I_A - 1000I_B + 1690I_C = 0$

Η χαρακτηριστική ορίζουσα των συντελεστών είναι

$$\begin{vmatrix} 630 & -330 & -300 \\ -330 & 1690 & -1000 \\ -300 & -1000 & 1690 \end{vmatrix}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Υπολογίζουμε την τιμή της χαρακτηριστικής ορίζουσας των συντελεστών

$$\begin{vmatrix} 630 & -330 & -300 \\ -330 & 1690 & -1000 \\ -300 & -1000 & 1690 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 630 & -330 \\ -330 & 1690 \\ -300 & -1000 \end{vmatrix}$$

$$= (630)(1690)(1690) + (-330)(-1000)(-300) + (-300)(-330)(-1000) - (-300)(1690)(-300) - (-1000)(-1000)(630) - (1690)(-330)(-330) = 635202000$$

Λύνουμε για το I_A :

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -330 & -300 \\ 0 & 1690 & -1000 \\ 0 & -1000 & 1690 \end{vmatrix}}{635202000} = \frac{(12)(1690)(1690) - (12)(-1000)(-1000)}{-32} = 0.0351 \text{ A} = 35.1 \text{ mA}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Λύνουμε για το I_B :

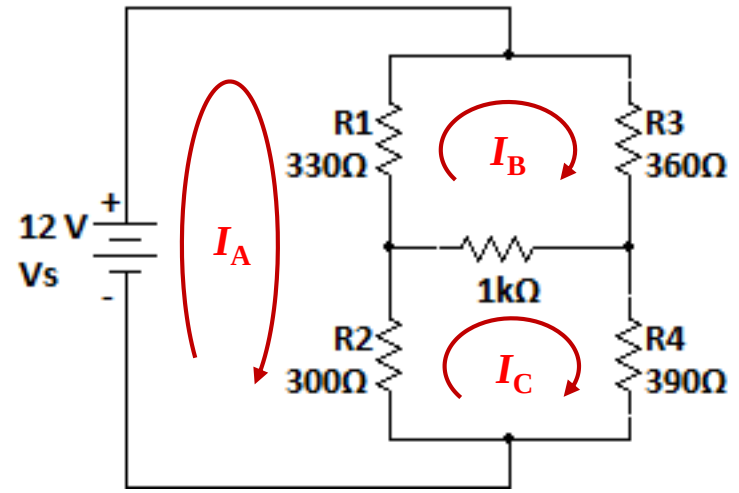
$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 630 & 12 & -300 \\ -330 & 0 & -1000 \\ -300 & 0 & 1690 \end{vmatrix}}{635202000} = \frac{(12)(-1000)(-300) - (-330)(12)(1690)}{635202000} = 0.0162 \text{ A} = 16.2 \text{ mA}$$

Λύνουμε για το I_C :

$$I_C = \frac{\begin{vmatrix} 630 & -330 & 12 \\ -330 & 1690 & 0 \\ -300 & -1000 & 0 \end{vmatrix}}{635202000} = \frac{(12)(-330)(-1000) - (-300)(1690)(12)}{635202000} = 0.0158 \text{ A} = 15.8 \text{ mA}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Έχουμε: $I_A = 35.1 \text{ mA}$
 $I_B = 16.2 \text{ mA}$
 $I_C = 15.8 \text{ mA}$



Το ρεύμα στην αντίσταση R_1 είναι: $I_1 = I_A - I_B = 35.1 \text{ mA} - 16.2 \text{ mA} = \mathbf{18.9 \text{ mA}}$

Το ρεύμα στην R_2 είναι: $I_2 = I_A - I_C = 35.1 \text{ mA} - 15.8 \text{ mA} = \mathbf{19.3 \text{ mA}}$

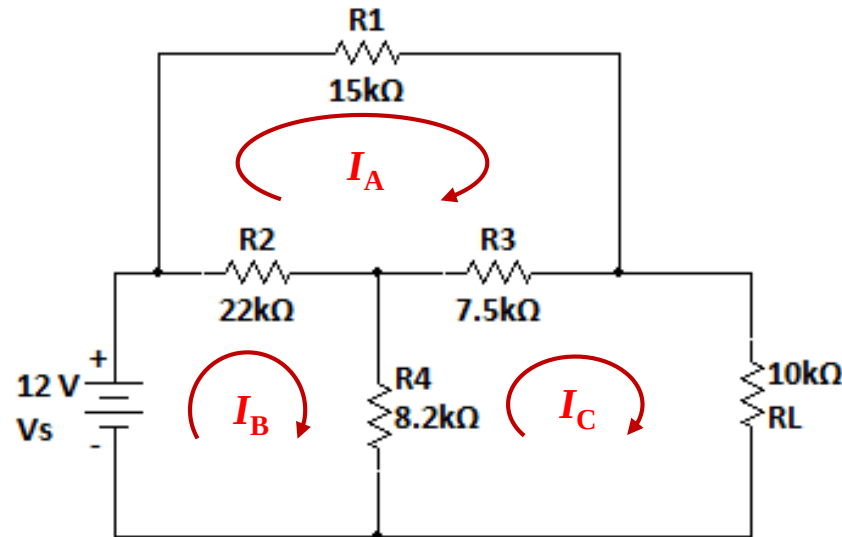
Το ρεύμα στην R_3 είναι: $I_3 = I_B = \mathbf{16.2 \text{ mA}}$

Το ρεύμα στην R_4 είναι: $I_4 = I_C = \mathbf{15.8 \text{ mA}}$

Το ρεύμα στην R_L είναι: $I_L = I_B - I_C = 16.2 \text{ mA} - 15.8 \text{ mA} = \mathbf{0.4 \text{ mA}}$

Ένα άλλο χρήσιμο παράδειγμα κυκλώματος με τρεις βρόχους: Το κύκλωμα γέφυρας T

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7: Η εικόνα δείχνει ένα κύκλωμα γέφυρας T (bridged-T circuit) τριών βρόχων. Κατασκευάστε τη στάνταρ μορφή των εξισώσεων και βρείτε το ρεύμα σε κάθε αντίσταση.



ΛΥΣΗ

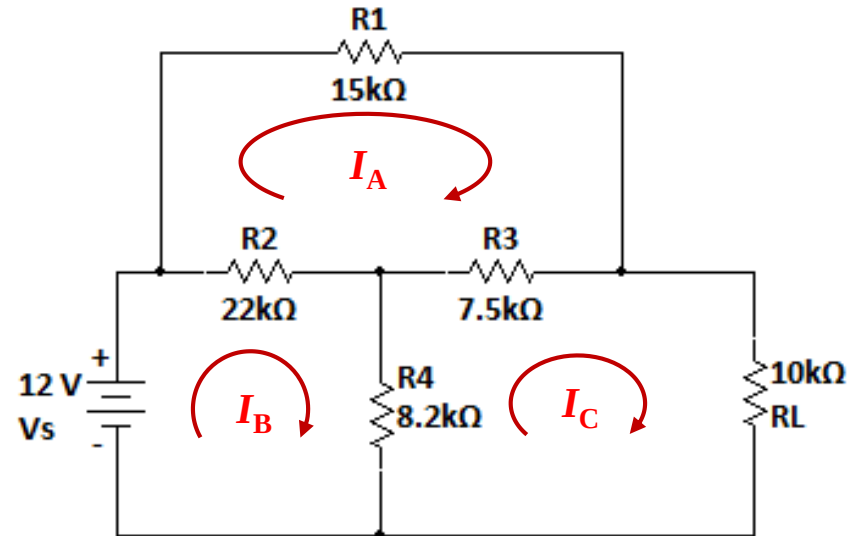
Σημειώνουμε τρία δεξιόστροφα (CW) ρεύματα βρόχων I_A , I_B και I_C .

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα, γράφουμε τις εξισώσεις των τριών βρόχων.

Οι τιμές των αντιστάσεων είναι σε kΩ

Το ρεύμα θα είναι σε mA



- Για το βρόχο A: $(15 + 7.5 + 22)I_A - 22I_B - 7.5I_C = 0$
 $44.5I_A - 22I_B - 7.5I_C = 0$
- Για το βρόχο B: $-22I_A + (22 + 8.2)I_B - 8.2I_C = 12$
 $-22I_A + 30.2I_B - 8.2I_C = 12$
- Για το βρόχο C: $-7.5I_A - 8.2I_B + (8.2 + 7.5 + 10)I_C = 0$
 $-7.5I_A - 8.2I_B + 25.7I_C = 0$

Η χαρακτηριστική ορίζουσα των συντελεστών είναι

$$\begin{vmatrix} 44.5 & -22 & -7.5 \\ -22 & 30.2 & -8.2 \\ -7.5 & -8.2 & 25.7 \end{vmatrix}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Υπολογίζουμε την τιμή της χαρακτηριστικής ορίζουσας των συντελεστών

$$\begin{vmatrix} 44.5 & -22 & -7.5 \\ -22 & 30.2 & -8.2 \\ -7.5 & -8.2 & 25.7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 44.5 & -22 \\ -22 & 30.2 \\ -7.5 & -8.2 \end{vmatrix}$$

$$= (44.5)(30.2)(25.7) + (-22)(-8.2)(-7.5) + (-7.5)(-22)(-8.2) - (-7.5)(30.2)(-7.5) - (-8.2)(-8.2)(44.5) - (27.5)(-22)(-22) = 13831.3$$

Λύνουμε για το I_A :

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -22 & -7.5 \\ 12 & 30.2 & -8.2 \\ 0 & -8.2 & 25.7 \end{vmatrix}}{13831.3} = \frac{(-7.5)(12)(-8.2) - (25.7)(12)(-22)}{13831.3} = 0.512 \text{ mA}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Λύνουμε για το I_B :

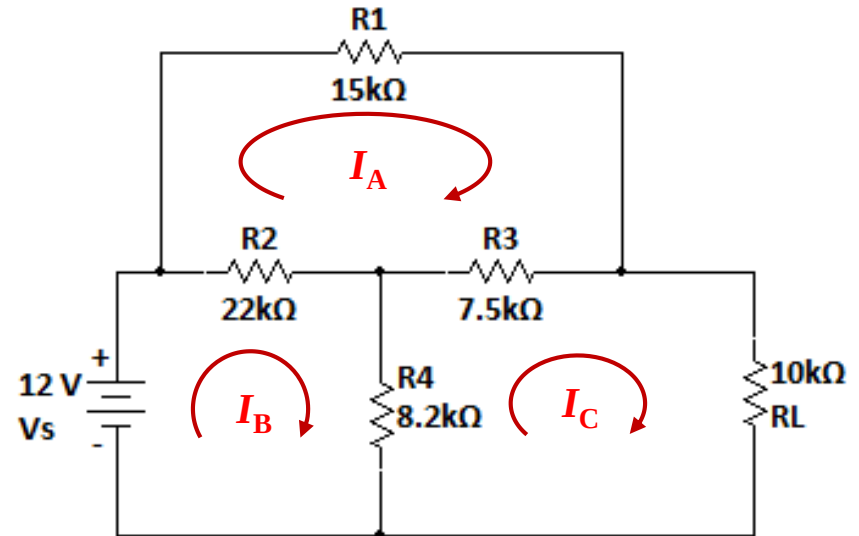
$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 44.5 & 0 & -7.5 \\ -22 & 12 & -8.2 \\ -7.5 & 0 & 25.7 \end{vmatrix}}{13831.3} = \frac{(44.5)(12)(25.7) - (-7.5)(12)(-7.5)}{13831.3} = 0.887 \text{ mA}$$

Λύνουμε για το I_C :

$$I_C = \frac{\begin{vmatrix} 44.5 & -22 & 0 \\ -22 & 30.2 & 12 \\ -7.5 & -8.2 & 0 \end{vmatrix}}{13831.3} = \frac{(-22)(12)(-7.5) - (-8.2)(12)(44.5)}{13831.3} = 0.432 \text{ mA}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Έχουμε: $I_A = 0.512 \text{ mA}$
 $I_B = 0.887 \text{ mA}$
 $I_C = 0.432 \text{ mA}$



Το ρεύμα στην αντίσταση R_1 είναι: $I_1 = I_A = \mathbf{0.512 \text{ mA}}$

Το ρεύμα στην R_2 είναι: $I_2 = I_A - I_B = 0.512 \text{ A} - 0.887 \text{ mA} = \mathbf{-0.375 \text{ mA}}$

- Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το ρεύμα I_2 είναι στην αντίθετη κατεύθυνση από αυτή του I_A : Η θετική πλευρά της αντίστασης R_2 είναι η αριστερή πλευρά.

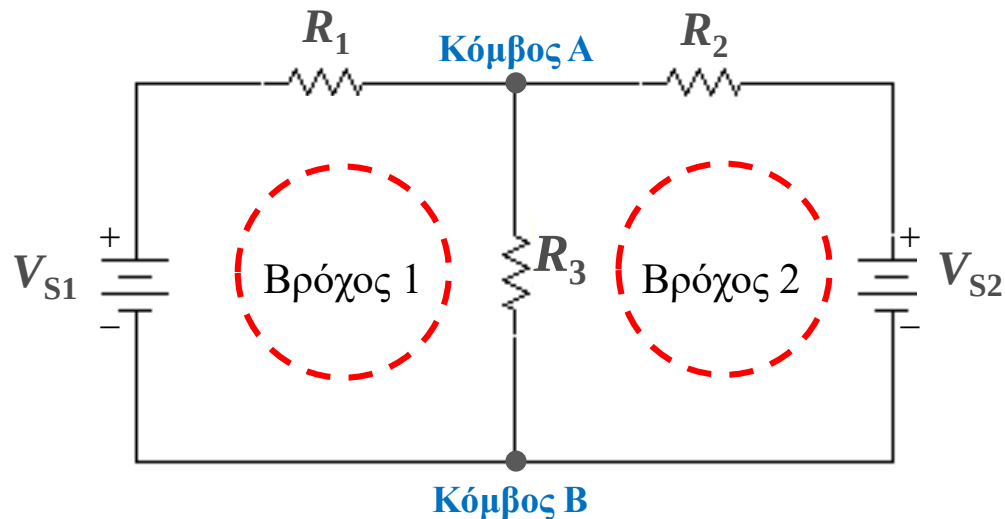
Το ρεύμα στην R_3 είναι: $I_3 = I_A - I_C = 0.512 \text{ A} - 0.432 \text{ mA} = \mathbf{0.08 \text{ mA}}$

Το ρεύμα στην R_4 είναι: $I_4 = I_B - I_C = 0.887 \text{ mA} - 0.432 \text{ mA} = \mathbf{0.455 \text{ mA}}$

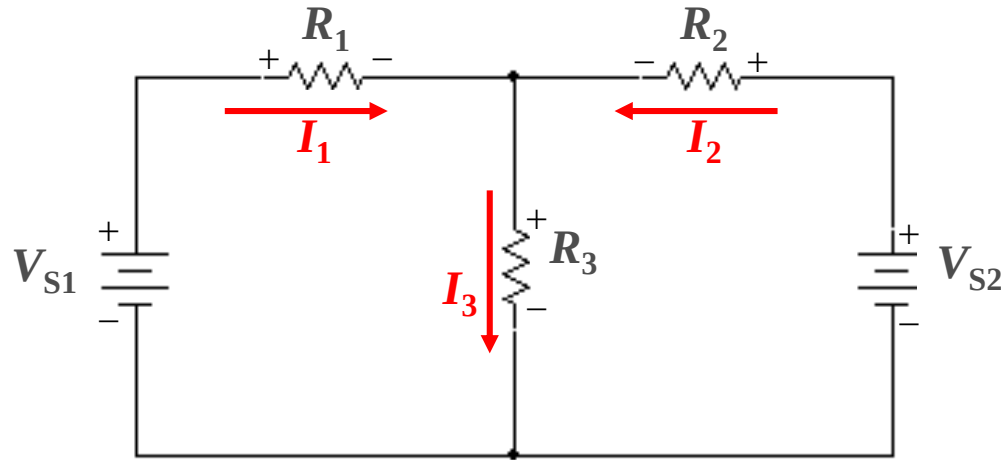
Το ρεύμα στην R_L είναι: $I_L = I_C = \mathbf{0.432 \text{ mA}}$

Η μέθοδος των ρευμάτων των κλάδων

- Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί τους νόμους τάσης και ρεύματος του Kirchhoff για να βρει το ρεύμα σε κάθε κλάδο ενός κυκλώματος
 - Το κύκλωμα (παράδειγμα) έχει δύο ανεξάρτητους **βρόχους**
 - Υπάρχουν δύο **κόμβοι**: κόμβος A και κόμβος B
 - **Κλάδος** είναι κάθε διαδρομή που συνδέει δύο κόμβους (το κύκλωμα έχει τρεις κλάδους)



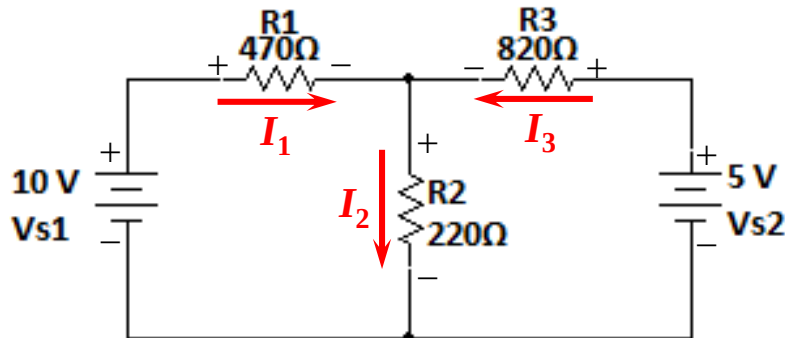
Η μέθοδος των ρευμάτων των κλάδων: Τα βήματα



- Βήμα 1.** Σχεδιάζουμε ένα ρεύμα με αυθαίρετη κατεύθυνση σε κάθε κλάδο του κυκλώματος
- Βήμα 2.** Σημειώνουμε τις πολικότητες των τάσεων στις αντιστάσεις σύμφωνα με την κατεύθυνση των ρευμάτων κλάδων που επιλέξαμε στο Βήμα 1.
- Βήμα 3.** Εφαρμόζουμε τον κανόνα των τάσεων του Kirchhoff γύρω από κάθε κλειστό βρόχο (αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων ίσο με μηδέν)
- Βήμα 4.** Εφαρμόζουμε τον κανόνα των ρευμάτων του Kirchhoff στον ελάχιστο αριθμό κόμβων έτσι ώστε να περιλαμβάνονται όλα τα ρεύματα των κλάδων (αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε ένα κόμβο ίσο με μηδέν).
- Βήμα 5.** Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει από τα βήματα 3 και 4.

Ένα παράδειγμα της μεθόδου των ρευμάτων των κλάδων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των ρευμάτων των κλάδων για να βρείτε το ρεύμα κάθε κλάδου στο παρακάτω κύκλωμα.



ΛΥΣΗ

Βήμα 1. Σχεδιάζουμε τα ρεύματα των κλάδων με αυθαίρετη κατεύθυνση.

Βήμα 2. Σημειώνουμε τις πολικότητες των τάσεων στις αντιστάσεις.

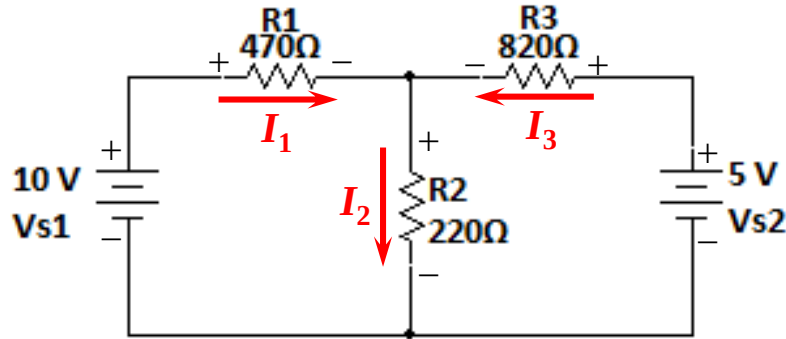
Βήμα 3. Εφαρμόζουμε τον κανόνα των τάσεων του Kirchhoff γύρω από τον αριστερό βρόχο (διατρέχοντάς τον, π.χ., δεξιόστροφα),

$$10 - 470I_1 - 220I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 470I_1 + 220I_2 = 10$$

και γύρω από το δεξιό βρόχο (διατρέχοντάς τον, π.χ., αριστερόστροφα),

$$5 - 820I_3 - 220I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 820I_3 + 220I_2 = 5$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)



Βήμα 4. Εφαρμόζουμε τον κανόνα των ρευμάτων του Kirchhoff, π.χ., στον κόμβο A.

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Βήμα 5. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων με αντικατάσταση. Πρώτα, λύνουμε την εξίσωση των ρευμάτων ως προς I_1

$$I_1 = I_2 - I_3$$

και αντικαθιστούμε στην εξίσωση του αριστερού βρόχου $470I_1 + 220I_2 = 10$

$$470(I_2 - I_3) + 220I_2 = 10$$

$$470I_2 - 470I_3 + 220I_2 = 10$$

$$690I_2 - 470I_3 = 10$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Παίρνοντας την εξίσωση του δεξιού βρόχου και λύνοντας ως προς I_2 , έχουμε

$$220I_2 = 5 - 820I_3$$

$$I_2 = \frac{5 - 820I_3}{220}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση για το I_2 στην εξίσωση $690I_2 - 470I_3 = 10$, παίρνουμε

$$690 \left(\frac{5 - 820I_3}{220} \right) - 470I_3 = 10$$

$$\frac{3450 - 565800I_3}{220} - 470I_3 = 10$$

$$15.68 - 2571.8I_3 - 470I_3 = 10$$

$$-3041.8I_3 = -5.68$$

$$I_3 = \frac{-5.68}{-3041.8} = 0.00187 \text{ A} = \mathbf{1.87 \text{ mA}}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Αντικαθιστώντας την τιμή του I_3 στην εξίσωση του δεξιού βρόχου, έχουμε

$$I_2 = \frac{5 - 820(0.00187)}{220} = \frac{3.47}{220} = 0.0158 = \mathbf{15.8\text{ A}}$$

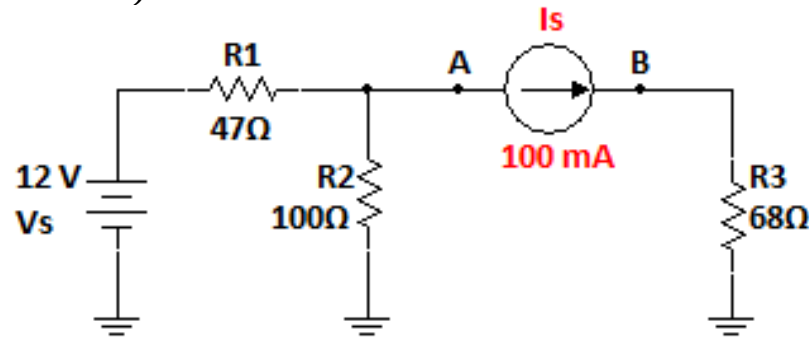
Τέλος, αντικαθιστώντας τα I_2 και I_3 στην εξίσωση των ρευμάτων, βρίσκουμε

$$I_1 = I_2 - I_3 = 0.0158 - 0.00187 = 0.0139\text{ A} = \mathbf{13.9\text{ mA}}$$

Πρόβλημα: Βρείτε τα ρεύματα των κλάδων λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων με τη μέθοδο των οριζουσών.

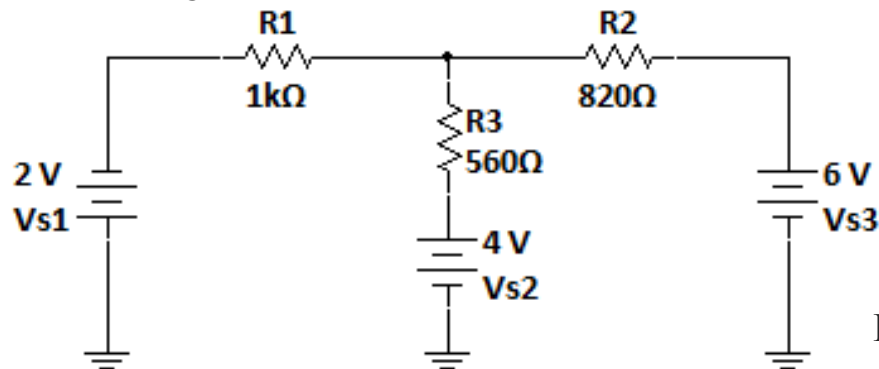
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ρευμάτων των κλάδων, βρείτε το ρεύμα μέσω κάθε αντίστασης στο κύκλωμα της Εικ. Π.1
(Απ.: $I_1 = 150 \text{ mA}$, $I_2 = 50 \text{ mA}$, $I_3 = 100 \text{ mA}$)
- Προσδιορίστε την τάση στα άκρα της πηγής ρεύματος I_S (σημεία A και B) της Εικ. Π.1
(Απ.: $V_{AB} = V_A - V_B = -1.85 \text{ V}$)



Εικόνα Π.1

- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των βρόχων, βρείτε τα ρεύματα των κλάδων στην Εικ. Π.3
(Απ.: $I_1 = 5.1 \text{ mA}$, $I_2 = 3.5 \text{ mA}$, $I_3 = 1.6 \text{ mA}$)



Εικόνα Π.3

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (συνέχεια)

4. Προσδιορίστε τις τάσεις και τις πολικότητές τους σε κάθε αντίσταση στο κύκλωμα της Εικ. Π.3

(Απ.: $V_1 = 5.1 \text{ V}$, $V_2 = 2.9 \text{ V}$, $V_3 = 0.9 \text{ V}$)