

ΚΕΦ.8 ΕΙΔΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ιδιαίτερη κατηγορία των προβλημάτων ΓΠ είναι τα προβλήματα δικτυακής ροής. Σε αυτά ανήκουν τα προβλήματα μεταφοράς και εκχώρησης.

8.1 Πρόβλημα μεταφοράς

Σε m πηγές (κέντρα προσφοράς) είναι διαθέσιμες οι ποσότητες a_i ενός προϊόντος, ενώ σε n προορισμούς (κέντρα ζήτησης) ζητούνται οι ποσότητες b_j από το ίδιο προϊόν.

Βασικό πρόβλημα: Αν το κόστος ανά μονάδα μεταφερόμενου προϊόντος είναι c_{ij} (i =πηγή, j =προορισμός) και επιπλέον ισχύει ότι η συνολική προσφορά είναι ίση με τη συνολική ζήτηση, τότε ζητείται να προσδιοριστούν οι **ποσότητες** του προϊόντος που πρέπει να μεταφερθούν από κάθε πηγή σε κάθε προορισμό, έτσι ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση με το **ελάχιστο** δυνατό **κόστος** μεταφοράς.

Πίνακας του προβλήματος

Παράδειγμα 8.1

Αρχικός πίνακας όπου η συνολική προσφορά είναι 300 και είναι μεγαλύτερη της ζήτησης που είναι 250. (Οι πηγές προσφέρουν προϊόντα, οι προορισμοί ζητάνε).

		Προορισμοί			Προσφορά
		1	2	3	
Π η γ έ ς	1	c<sub>11</sub>	c<sub>12</sub>	c<sub>13</sub>	120
	2	c<sub>21</sub>	c<sub>22</sub>	c<sub>23</sub>	80
	3	c<sub>31</sub>	c<sub>32</sub>	c<sub>33</sub>	100
Ζήτηση		80	60	110	

Τροποποιημένος πίνακας, όπου προσφορά ίση με τη ζήτηση με την προσθήκη εικονικού προορισμού.

		Προορισμοί				Προσφορά
		1	2	3	4*	
Π η γ έ ς	1	c<sub>11</sub>	c<sub>12</sub>	c<sub>12</sub>	0	120
	2	c<sub>21</sub>	c<sub>22</sub>	C<sub>23</sub>	0	80
	3	c<sub>31</sub>	c<sub>32</sub>	c<sub>33</sub>	0	100
Ζήτηση		80	60	110	50	300

* εικονικός προορισμός.

Παράδειγμα 8.3

Μια βιομηχανία πρέπει να προγραμματίσει την παραγωγή της σε κάθε μία από τις τέσσερις περιόδους ενός έτους, με τρόπο ώστε να καλύψει την αντίστοιχη ζήτηση με το ελάχιστο δυνατό κόστος παραγωγής και

αποθήκευσης. Η κανονική παραγωγή (ΚΠ), η υπερωριακή παραγωγή(ΥΠ) και η ζήτηση κάθε περιόδου παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

	Περίοδοι			
	I	II	III	IV
Ζήτηση	280	340	370	500
Καν.παραγωγή(ΚΠ)	250	350	350	-
Υπερ.παραγωγή(ΥΠ)	100	80	100	120

Το κόστος ανά μονάδα προϊόντος της κανονικής παραγωγής είναι 56€, ενώ το κόστος της υπερωριακής παραγωγής είναι 80€. Η επιχείρηση έχει την πρώτη περίοδο αρχικό απόθεμα (ΑΑ) 150 μονάδες προϊόντος. Οι ποσότητες που παράγονται σε μία περίοδο μπορούν να πουληθούν τόσο στην ίδια περίοδο όσο και στις επόμενες. Στην περίπτωση που δεν πουληθούν στην ίδια περίοδο, τότε προστίθενται στο υπάρχον απόθεμα με ένα κόστος αποθήκευσης 10€ ανά μονάδα και ανά περίοδο.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως **πρόβλημα μεταφοράς**, παίρνοντας υπόψη τα εξής:

1. Θεωρούνται ως κέντρα προσφοράς (8 συνολικά) : η κανονική παραγωγή κάθε περιόδου, η υπερωριακή παραγωγή κάθε περιόδου και το αρχικό απόθεμα, ενώ ως κέντρα ζήτησης (4 συνολικά): η ζήτηση κάθε περιόδου.
2. Η συνολ.προσφορά είναι μεγαλύτερη από τη συνολική ζήτηση κατά 10 μονάδες και κατά συνέπεια είναι απαραίτητο να προστεθεί ένα **πλασματικό κέντρο ζήτησης(=V)**, με ζήτηση 10 μονάδων και κόστος προσφοράς προς αυτό ίσο με μηδέν.
3. Για να αποφευχθεί η περίπτωση μέρος του αρχικού αποθέματος, (που την πρώτη περίοδο έχει κόστος μηδέν), να μεταφερθεί στο πλασματικό κέντρο ζήτησης (V), τίθεται στο αντίστοιχο τετράγωνο ένα **κόστος προσφοράς απαγορευτικό, δηλαδή ίσο με M**.

Ο πίνακας μεταφοράς (στα κελιά υπάρχουν τα κόστη) διαμορφώνεται ως εξής:

	Περίοδοι					
	I	II	III	IV	V*	
						Προσφορά
ΚΠ I	56	66	76	86	0	250
ΚΠ II	M	56	66	76	0	350
ΚΠ III	M	M	56	66	0	350
ΥΠ I	80	90	100	110	0	100
ΥΠ II	M	80	90	100	0	80
ΥΠ III	M	M	80	90	0	100
ΥΠ IV	M	M	M	80	0	120
ΑΑ	0	10	20	30	M	150
Ζήτηση	280	340	370	500	10	1500

Προσδιορισμός βασικής λύσης-μέθοδος βορειοδυτικής γωνίας

Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Όταν έχουμε έναν πίνακα ενός προβλήματος μεταφοράς, όπου η προσφορά είναι ίση με τη ζήτηση, εξετάζεται το βορειοδυτικό τετράγωνο (1,1) του πίνακα, δηλαδή το τετράγωνο στο οποίο αντιστοιχεί η μεταβλητή x_{11} , και συγκρίνονται οι ποσότητες a_1 και b_1 που βρίσκονται στα περιθώρια του συγκεκριμένου τετραγώνου. Όταν $a_1 < b_1$, τότε τοποθετείται στο τετράγωνο ποσότητα ίση με a_1 , στα υπόλοιπα τετράγωνα της γραμμής ποσότητα ίση με μηδέν και η διαφορά $b_1 - a_1$ στη θέση της ποσότητας b_1 . Όταν αντίθετα $a_1 > b_1$, τότε τοποθετείται στο τετράγωνο ποσότητα ίση με b_1 , στα υπόλοιπα τετράγωνα της στήλης ποσότητα ίση με μηδέν και η διαφορά $a_1 - b_1$ στη θέση της ποσότητας a_1 . Τέλος όταν $a_1 = b_1$, τοποθετείται στο τετράγωνο ποσότητα ίση με $a_1 = b_1$ και ποσότητα μηδέν στα υπόλοιπα τετράγωνα τόσο της γραμμής όσο και της στήλης.
2. Στον πίνακα που προκύπτει από το προηγούμενο βήμα, διαγράφονται: η πρώτη γραμμή όταν $a_1 < b_1$, η πρώτη στήλη όταν $a_1 > b_1$, τόσο η γραμμή όσο και η στήλη όταν $a_1 = b_1$, και επαναλαμβάνεται η διαδικασία του πρώτου βήματος. Η μέθοδος τερματίζει όταν τοποθετηθούν σε όλα τα $m \times n$ τετράγωνα του πίνακα ποσότητες μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός (≥ 0).

Παράδειγμα 8.4

Να βρεθεί μια αρχική βασική λύση με τη μέθοδο της βορειοδυτικής γωνίας στο παρακάτω πρόβλημα μεταφοράς:

		Προορισμοί				Προσφορά
		1	2	3	4	
Πηγές	1	x_{11} 23	x_{12} 27	x_{13} 16	x_{14} 18	$30 = a_1$
	2	12	17	20	51	40
	3	22	28	12	32	53
Ζήτηση		$22 = b_1$	35	25	41	123

Η μεταβλητή της βορειοδυτικής γωνίας, δηλαδή η x_{11} , γίνεται $x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(30, 22) = 22$. Οι υπόλοιπες μεταβλητές της πρώτης στήλης γίνονται 0, ενώ ταυτόχρονα το b_1 αφαιρείται από την προσφορά και τη ζήτηση: $a'_1 = a_1 - b_1 = 30 - 22 = 8$ και $b'_1 = b_1 - b_1 = 22 - 22 = 0$. στη συνέχεια **διαγράφεται η πρώτη στήλη**, γιατί έχουν προσδιοριστεί όλα τα στοιχεία της.

	1	2	3	4	
1	$\min(22, 30) = 22$				$30 - 22 = 8$
2	0				40
3	0				53
	$22 - 22 = 0$	35	25	41	123

Στη βορειοδυτική γωνία βρίσκεται η μεταβλητή x_{12} , η οποία γίνεται $\min(8,35)=8$. Οι υπόλοιπες μεταβλητές της πρώτης γραμμής μηδενίζονται, η προσφορά της πρώτης πηγής γίνεται 0 και η ζήτηση του δεύτερου προορισμού 27 (35-8) και βέβαια διαγράφεται η πρώτη γραμμή.

	1	2	3	4	
1	22	$\min(8,35)=8$	0	0	$8-8=0$
2	0				40
3	0				53
	0	$35-8=27$	25	41	

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν διαδοχικά οι παρακάτω πίνακες:

Διαγραφή 2^{ης} στήλης

	1	2	3	4	
1	22	8	0	0	0
2	0	27			$40-27=13$
3	0	0			53
	0	$27-27=0$	25	41	

Διαγραφή 2^{ης} γραμμής

	1	2	3	4	
1	22	8	0	0	0
2	0	27	13	0	$13-13=0$
3	0	0			53
	0	0	$25-13=12$	41	

Διαγραφή 3^{ης} στήλης

	1	2	3	4	
1	22	8	0	0	0
2	0	27	13	0	0
3	0	0	12		$53-12=41$
	0	0	$12-12=0$	41	

Διαγραφή 3^{ης} γραμμής

	1	2	3	4	
1	22	8	0	0	0
2	0	27	13	0	0
3	0	0	12	41	$41-41=0$
	0	0	0	$41-41=0$	

Επειδή σε όλα τα τετράγωνα έχουν τοποθετηθεί ποσότητες ≥ 0 , η διαδικασία ολοκληρώθηκε και η αρχική λύση είναι αυτή που παρουσιάζεται στον επόμενο πίνακα.

Πηγή (i)	Προορισμός (j)	Μεταφερόμενη ποσότητα(x_{ij})
1	1	22
1	2	8
2	2	27
2	3	13
3	3	12
3	4	41

Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη το κόστος ανά μονάδα μεταφερόμενου προϊόντος.

Το κόστος αυτής της λύσης είναι: $(22 * 23) + (8 * 27) + (27 * 17) + (13 * 20) + (12 * 12) + (41 * 32) = 2897$.

Μέθοδος μικρότερου κόστους

Για την εφαρμογή της μεθόδου είναι απαραίτητο να συμπληρωθεί ο αρχικός πίνακας τοποθετώντας σε κάθε τετράγωνο (i,j) το κόστος c_{ij} . Η διαδικασία που εφαρμόζεται είναι ίδια με αυτήν της μεθόδου της βορειοδυτικής γωνίας. Η μόνη διαφορά είναι ότι εξετάζεται κάθε φορά το τετράγωνο στο οποίο αντιστοιχεί το μικρότερο κόστος, αντί του βορειοδυτικού τετραγώνου. Αν έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης τότε επιλέγουμε το τετράγωνο που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη απόδοση.

Παράδειγμα 8.5

Να βρεθεί μια αρχική βασική λύση με τη μέθοδο μικρότερου κόστους του Προβλήματος 8.4.

	1	2	3	4	Προσφορά
1	23	27	0 16	18	30
2	12	17	0 20	51	40
3	22	28	25 12	32	53-25=28
Ζήτηση	22	35	25-25=0	41	

Συνεχίζοντας τη διαδικασία προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες:

	1	2	3	4	
1	0 23	27	0 16	18	30
2	22 12	17	0 20	51	40-22=18
3	0 22	28	25 12	32	28
	22-22=0	35	0	41	

	1	2	3	4	
1	0 23	27	0 16	18	30
2	22 12	18 17	0 20	0 51	18-18=0
3	0 22	28	25 12	32	28
	0	35-18=17	0	41	

	1	2	3	4	
1	0 23	0 27	0 16	30 18	30-30=0
2	22 12	18 17	0 20	0 51	0
3	0 22	28	25 12	32	28
	0	17	0	41-30=11	

	1	2	3	4	
1	0 23	0 27	0 16	30 18	0
2	22 12	18 17	0 20	0 51	0
3	0 22	17 28	25 12	32	28-17=11
	0	17-17=0	0	11	

	1	2	3	4	
1	0 23	0 27	0 16	30 18	0
2	22 12	18 17	0 20	0 51	0
3	0 22	17 28	25 12	11 32	11-11=0
	0	0	0	11-11=0	

Σε όλα τα τετράγωνα έχουν τοποθετηθεί ποσότητες ≥ 0 , οπότε η αρχική βασική λύση είναι:

Πηγή (i)	Προορισμός (j)	Μεταφερόμενη ποσότητα(x_{ij})
1	4	30
2	1	22
2	2	18
3	2	17
3	3	25
3	4	11

8.2 Πρόβλημα εκχώρησης

Διατύπωση προβλήματος: σε n εργαζόμενους πρέπει να ανατεθούν n εργασίες. Αν είναι γνωστό το κόστος c_{ij} της εκχώρησης του εργαζόμενου i στην εργασία j , να ανατεθεί σε κάθε εργαζόμενο μία και μόνο μία εργασία και να εκχωρηθεί σε κάθε εργασία ένας και μόνο ένας εργαζόμενος, έτσι ώστε να **ελαχιστοποιείται** το συνολικό κόστος.

Αποδεικνύεται ότι είναι πρόβλημα **δυναδικού** ΓΠ και θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν στον εργαζόμενο } i \text{ ανατίθεται η εργασία } j \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η δομή του προβλήματος είναι ίδια με τη δομή του προβλήματος μεταφοράς και κατά συνέπεια, μπορεί να επιλυθεί με μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για το πρόβλημα μεταφοράς.

Παράδειγμα 8.14

Τα δεδομένα του επόμενου πίνακα δείχνουν το κόστος των εκχωρήσεων. Να βρεθεί η αρχική λύση με τη μέθοδο του μικρότερου κόστους και στη συνέχεια η βέλτιστη λύση με τη μέθοδο stepping stone.

Εργαζόμενος (i)	Εργασία (j)	Κόστος (c_{ij})
1	1	7
1	2	13
1	3	6
2	1	5
2	2	6
2	3	3

Αρχική λύση με τη μέθοδο του μικρότερου κόστους

	1	2	3	
1	1 7	0 13	0 6	1
2	0 5	0 6	1 3	1
3*	0 0	1 0	0 0	1
	1	1	1	

Βέλτιστη λύση με τη μέθοδο stepping stone

	1	2	3	
1	1 7	0 13	0 6	1
2	ϵ 5	0 6	1 3	1
3*	ϵ 0	1 0	0 0	1
	1	1	1	

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ σελ.237

1. Σε τρία κέντρα προσφοράς παράγεται ένα προϊόν με το οποίο τροφοδοτούνται τέσσερα κέντρα ζήτησης.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται: η μέγιστη δυνατότητα προσφοράς των κέντρων προσφοράς, η ελάχιστη μηνιαία ζήτηση των κέντρων ζήτησης και το κόστος μεταφοράς για κάθε μονάδα προϊόντος που μεταφέρεται μεταξύ των κέντρων προσφοράς και των κέντρων ζήτησης.

	1	2	3	4	
1	23	27	0 16	18	2500
2	12	17	0 20	51	5000
3	22	28	25 12	32	2000
	1500	2600	3200	1800	

Να προσδιοριστεί μια αρχική λύση του προβλήματος με τις μεθόδους Α) βορειοδυτικής γωνίας Β) μικρότερου κόστους.

Λύση:

Επειδή η προσφορά ($9500=2500+5000+2000$) είναι μεγαλύτερη της ζήτησης ($9100=1500+2600+3200+1800$) προστίθεται ένα εικονικός προορισμός (5) με ζήτηση 400 μονάδων.

Διαγραφή 1^{ης} στήλης

	1	2	3	4	5	Προσφορά
1	1500 = (min 1500,2500)					2500- 1500=1000
2	0					5000
3	0					2000
Ζήτηση	1500-1500=0	2600	3200	1800	400	

Διαγραφή 1^{ης} γραμμής

	1	2	3	4	5	
1	1500	1000	0	0	0	1000- 1000=0
2	0					5000
3	0					2000
	0	2600- 1000=1600	3200	1800	400	

Διαγραφή 2^{ης} στήλης

	1	2	3	4	5	
1	1500	1000	0	0	0	0
2	0	1600				5000- 1600=3400
3	0	0				2000
	0	1600- 1600=0	3200	1800	400	

Διαγραφή 3^{ης} στήλης

	1	2	3	4	5	
1	1500	1000	0	0	0	0
2	0	1600	3200			3400- 3200=200
3	0	0	0			2000
	0	0	3200-3200=0	1800	400	

Διαγραφή 2^{ης} γραμμής

	1	2	3	4	5	
1	1500	1000	0	0	0	0
2	0	1600	3200	200	0	200-200=0
3	0	0	0			2000
	0	0	0	1800- 200=1600	400	

Διαγραφή 4^{ης} στήλης

	1	2	3	4	5	
1	1500	1000	0	0	0	0
2	0	1600	3200	200	0	0
3	0	0	0	1600		2000- 1600=400
	0	0	0	1600- 1600=0	400	

Διαγραφή 3^{ης} γραμμής

	1	2	3	4	5	
1	1500	1000	0	0	0	0
2	0	1600	3200	200	0	200-200=0
3	0	0	0	1600	0	2000-1600=400
	0	0	0	1600-1600=0	400	

Διαγραφή 5^{ης} στήλης

	1	2	3	4	5	Προσφορά
1	1500	1000	0	0	0	0
2	0	1600	3200	200	0	0
3	0	0	0	1600	0	400-400=0
Ζήτηση	0	0	0	0	400-400=0	

Αρχική λύση ανά γραμμή: $x_{11}=1500$, $x_{12}=1000$, $x_{13}=0$, $x_{14}=0$, $x_{15}=0$

$x_{21}=0$, $x_{22}=1600$, $x_{23}=3200$, $x_{24}=200$, $x_{25}=0$

$x_{31}=0$, $x_{32}=0$, $x_{33}=0$, $x_{34}=1600$, $x_{35}=400$.

Κόστος λύσης: $(1500 * 23) + (1000 * 27) + (1600 * 17) + (3200 * 20) + (200 * 51) + (1600 * 32) + (400 * 0) = 214100$.