

Κεφ.5 Δυϊκό πρόβλημα

Σε κάθε πρόβλημα ΓΠ που στο εξής θα ονομάζεται **πρωτεύον**, αντιστοιχεί ένα πρόβλημα που ονομάζεται **δυϊκό**. Αποδεικνύεται ότι το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον. Με δεδομένο το πρωτεύον η διατύπωση του δυϊκού διευκολύνεται σημαντικά αν αυτό τεθεί σε **κανονική** μορφή:

Ένα πρόβλημα ΓΠ είναι σε κανονική μορφή όταν:

- i. Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
- ii. Οι γραμμικοί περιορισμοί του προβλήματος είναι ανισότητες $\leq$
- iii. Οι μεταβλητές του προβλήματος έχουν μη αρνητικό πρόσημο ≥ 0 .

ή όταν:

- i. Είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης
- ii. Οι γραμμικοί περιορισμοί του προβλήματος είναι ανισότητες $\geq$
- iii. Οι μεταβλητές του προβλήματος έχουν μη αρνητικό πρόσημο ≥ 0 .

Οι σταθεροί όροι του προβλήματος δεν είναι απαραίτητο να είναι μη αρνητικοί (σε αντίθεση με την τυπική μορφή).

Κανόνες μετασχηματισμού

- Όταν η **αντικειμενική συνάρτηση** του πρωτεύοντος είναι συνάρτηση μεγιστοποίησης, η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού του είναι συνάρτηση ελαχιστοποίησης.
- Όταν το πρωτεύον πρόβλημα έχει n **μεταβλητές**, το δυϊκό έχει n **περιορισμούς**. Η πρώτη μεταβλητή του πρωτεύοντος αντιστοιχεί στον πρώτο περιορισμό του δυϊκού, η δεύτερη στο δεύτερο κ.ο.κ.
- Όταν το πρωτεύον πρόβλημα έχει m **περιορισμούς**, το δυϊκό έχει m **μεταβλητές**. Ο πρώτος περιορισμός του πρωτεύοντος αντιστοιχεί στην πρώτη μεταβλητή του δυϊκού, ο δεύτερος στη δεύτερη κ.ο.κ.
- Οι **σταθεροί όροι των περιορισμών** του πρωτεύοντος είναι οι **συντελεστές των μεταβλητών** στην αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού.
- Οι συντελεστές των μεταβλητών του στην αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος είναι οι σταθεροί όροι των περιορισμών του δυϊκού.
- Η μήτρα των συντελεστών των γραμμικών περιορισμών του δυϊκού προβλήματος είναι η ανάστροφη μήτρα των συντελεστών των περιορισμών του προβλήματος.
- Όταν οι περιορισμοί του πρωτεύοντος είναι ανισώσεις μορφής (π.χ. $\leq$), οι περιορισμοί του δυϊκού είναι ανισώσεις αντίθετης φοράς.

Παράδειγμα 5.1 Να βρεθεί το δυϊκό του προβλήματος:

$$\begin{aligned}\max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα για μετασχηματισμό, οπότε το δυϊκό πρόβλημα είναι :

$$\begin{aligned}\min v &= 4y_1 + 6y_2 + 18y_3 \\ y_1 + 3y_3 &\geq 3 \\ y_2 + 2y_3 &\geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.2 Να βρεθεί το δυϊκό του προβλήματος

$$\begin{aligned}\min z &= 6x_1 + 8x_2 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Το δυϊκό πρόβλημα είναι :

$$\begin{aligned}\max v &= 4y_1 + 7y_2 \\ 3y_1 + 5y_2 &\leq 6 \\ y_1 + 2y_2 &\leq 8 \\ y_1, y_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.3 Να βρεθεί το δυϊκό του προβλήματος

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 4x_2 \\ x_1 + 5x_2 &\geq 8 \\ -6x_1 + 7x_2 &\geq 3 \\ x_1 - 2x_2 &= -2 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ } x_2 \text{ χωρίς περιορισμό} \end{aligned}$$

Πρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή:

- Θέτουμε $x_2 = x'_2 - x''_2$, όπου $x'_2, x''_2 \geq 0$.
- Μετατρέπουμε την εξίσωση $x_1 - 2x_2 = 2$ σε δύο ανισώσεις: $x_1 - 2x_2 \geq -2$ και $x_1 - 2x_2 \leq -2$.
- Αντικαθιστούμε την νέα τιμή για το x_2 , οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 4x'_2 + 4x''_2 \\ x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 &\geq 8 \\ -6x_1 + 7x'_2 - 7x''_2 &\geq 3 \\ x_1 - 2x'_2 + 2x''_2 &\geq -2 \\ -x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 &\geq 2 \text{ (αλλάζοντας τη φορά της ανίσωσης)} \\ x_1, x'_2, x''_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Τελικά, το δυϊκό πρόβλημα είναι :

$$\begin{aligned} \max v &= 8y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 2y_4 \\ y_1 - 6y_2 + y_3 - y_4 &\leq 2 \\ 5y_1 + 7y_2 - 2y_3 + 2y_4 &\leq -4 \\ -5y_1 - 7y_2 + 2y_3 - 2y_4 &\geq 4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.4 Να βρεθεί το δυϊκό του προβλήματος

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 5x_1 - x_2 &\geq 1 \\ x_1 \leq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Πρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή:

- Θέτουμε $x_1 = -x'_1$, όπου $x'_1 \geq 0$
- Μετατρέπουμε την ανίσωση $\geq$ σε $\leq$, αντιστρέφοντας: $-5x_1 + x_2 \leq -1$

- Αντικαθιστούμε την νέα τιμή για το x_1 , οπότε έχουμε:

$$\max z = -4x'_1 + 3x_2$$

$$-x'_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$5x'_1 + x_2 \leq -1$$

$$x'_1, x_2 \geq 0$$

Το δυϊκό πρόβλημα είναι :

$$\min v = 4y_1 - y_2$$

$$-y_1 + 5y_2 \geq -4$$

$$2y_1 + y_2 \geq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Παράδειγμα 5.5 Να βρεθεί το δυϊκό του προβλήματος

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

$$7x_1 + 7x_2 \geq 24$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

Πρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή:

- Θέτουμε $x_2 = -x'_2$, όπου $x'_2 \geq 0$.
- Αντικαθιστούμε την νέα τιμή για το x_2 , οπότε έχουμε:

$$\min z = 3x_1 - 2x'_2$$

$$3x_1 - 2x'_2 \geq 18$$

$$7x_1 - 7x'_2 \geq 24$$

$$x_1, x'_2 \geq 0$$

Το δυϊκό πρόβλημα είναι :

$$\max v = 18y_1 + 24y_2$$

$$3y_1 + 7y_2 \leq 3$$

$$-2y_1 - 7y_2 \leq -2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$