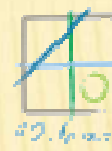




ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ



Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων

“ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ”

Ενότητα 2: Γραφική επίλυση προβλημάτων
γραμμικού προγραμματισμού (Γ.Π.)

Διδάσκων: Βασίλειος Ισχυρλής

Τηλ:6979948174, e-mail: vasismir@gmail.com
<http://vasilis-ismyrlis.webnode.gr/>

Περιεχόμενα

1. Τι είναι η γραφική μέθοδος επίλυσης
2. Βήματα εφαρμογής της γραφικής μεθόδου
3. Ανάλυση της γραφικής μεθόδου
4. Παραδείγματα βιβλίου 3.1.-3.3 (γραφική και μαθηματική επίλυση)

Γραφική μέθοδος

Γραφική μέθοδος επίλυσης ενός προβλήματος ΓΠ είναι η διαγραμματική παρουσίαση του προβλήματος σε ένα επίπεδο ή στο χώρο.

Η γραφική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα που περιέχουν μέχρι δύο μεταβλητές απόφασης, οι οποίες παρουσιάζονται σε δισδιάστατο επίπεδο. Με τρεις μεταβλητές η εφαρμογή είναι δύσκολη και με περισσότερες είναι τελείως αδύνατη.

Βήματα γραφικής μεθόδου

- ✖ 1^ο βήμα: Δημιουργία μιας εφικτής περιοχής η οποία περιλαμβάνει όλες τις εφικτές λύσεις του προβλήματος και προκύπτει από την απεικόνιση των γραμμικών περιορισμών γραφικά (με ευθείες).
- ✖ 2^ο βήμα: Αρχικός σχεδιασμός της αντικειμενικής συνάρτησης με βάση μια αυθαίρετη τιμή για τη μεταβλητή z .
- ✖ 3^ο βήμα: Παράλληλη μετατόπιση της αρχικής ευθείας της αντικ.συνάρτησης προς κατώτερες τιμές (αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης) μέχρι το σημείο που η ευθεία “αφήνει” την εφικτή περιοχή. Το σημείο αυτό προσδιορίζει και τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.
- ✖ Β' τρόπος: Υπάρχει επίσης ένας τρόπος που ακολουθείται μετά το 1^ο βήμα, όπου έχουν προκύψει οι κορυφές-σημεία της εφικτής περιοχής. Οδηγούμαστε στη βέλτιστη λύση, αντικαθιστώντας στην αντικ.συνάρτηση τις τιμές που έχουν οι μεταβλητές στις κορυφές.

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου

- ✖ Η λύση του προβλήματος γίνεται γραφικά στο 1^ο τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου αφού και οι δύο μεταβλητές x_1, x_2 παίρνουν τιμές ≥ 0 .
- ✖ Σχεδιάζονται στο τεταρτημόριο οι γραμμές των εξισώσεων των γραμμικών περιορισμών, βρίσκοντας δύο σημεία που τις ορίζουν.
- ✖ Αυτό γίνεται για όλους τους γραμμικούς περιορισμούς. Έτσι αν έχουμε 3 γραμ.περιορισμούς θα έχουμε 3 γραμμές.

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου

Ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στη φορά των ανισώσεων ($\leq$, $\geq$), καθώς αυτή καθορίζει την κατεύθυνση προς την οποία θα κινηθούμε για να έχουμε εφικτή λύση.

Η περιοχή που ικανοποιεί ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς και είναι η τομή των ημιεπιπέδων λέγεται εφικτή περιοχή. Αυτή περιλαμβάνει όλα τα σημεία-λύσεις του προβλήματος.

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου

- ✖ Η εύρεση της βέλτιστης λύσης γίνεται είτε με τα βήματα 2 και 3, είτε με το β' τρόπο.
- ✖ Η τελική λύση που έχει προσδιοριστεί διαγραμματικά, δεν έχει μεγάλη αριθμητική ακρίβεια. Μπορεί να προσδιοριστεί διαφορετικά, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων που τέμνονται στο τελευταίο σημείο της εφικτής περιοχής.

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου-βήματα

- ✖ Μετατρέπουμε τις εξισώσεις των γραμμικών περιορισμών σε εξισώσεις.
- ✖ Βρίσκουμε δύο σημεία (συνήθως θέτοντας $x_1=0$ και $x_2=0$ εναλλάξ) για κάθε ευθεία, τα οποία την ορίζουν και τη σχεδιάζουμε.
- ✖ Εντοπίζουμε την περιοχή στην οποία ισχύει ο αρχικός περιορισμός.

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου - βήματα

✖ Μετά χρησιμοποιούμε τη φορά της ανίσωσης $\leq$ ή $\geq$ των γραμμικών περιορισμών (για να βρούμε τη φορά αύξησης/μείωσης της αντικ/συνάρτησης). Προσπαθούμε να εντοπίσουμε την εφικτή περιοχή, (που είναι η τομή όλων των επιμέρους περιοχών ημιεπιπέδων) και όπου ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί.

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου - βήματα

- ✖ Εξετάζουμε τις λύσεις που αντιστοιχούν στις κορυφές (σημεία που τέμνονται δύο περιοριστικές ευθείες) της εφικτής περιοχής, βρίσκοντας τις συντεταγμένες τους.
- ✖ Αντικαθιστούμε τις τιμές των συντεταγμένων των μεταβλητών αποφάσεων στην αντικειμενική συνάρτηση.
- ✖ Η βέλτιστη λύση είναι αυτή που την μεγιστοποιεί, σε πρόβλημα μεγιστοποίησης (ή την ελαχιστοποιεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης).

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου-μαθηματική επίλυση Παρ. 3.1

✖ Στο παράδειγμα 3.1 του βιβλίου θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων που τέμνονται στο σημείο Γ, από όπου περνάει η βέλτιστη λύση.

✖ $70x_1 + 80x_2 = 2400 \quad (1)$

✖ $40x_1 + 70x_2 = 1800 \quad (2)$

✖ Λύνουμε την εξίσωση (1) ως προς x_1 : $70x_1 = 2400 - 80x_2 \Leftrightarrow x_1 = (2400 - 80x_2) / 70 \Leftrightarrow x_1 = 34,29 - 1,14x_2$

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου-μαθηματική επίλυση

✖ Αντικαθιστούμε αυτήν την τιμή του x_1 στην (2):

$$✖ 40 \times (34,29 - 1,14x_2) + 70x_2 = 1800 \Leftrightarrow 1371,60 -$$

$$456x_2 + 70x_2 = 1800 \Leftrightarrow 24,4x_2 = 428,80 \Leftrightarrow$$

$$x_2 = 17,57$$

$$✖ \text{Άρα: } x_1 = 34,29 - (1,14 \times 17,57) = 34,29 - 20,02 =$$

$$14,26$$

Παράδειγμα 3.1- Γραφική επίλυση

Γραφική Επίλυση

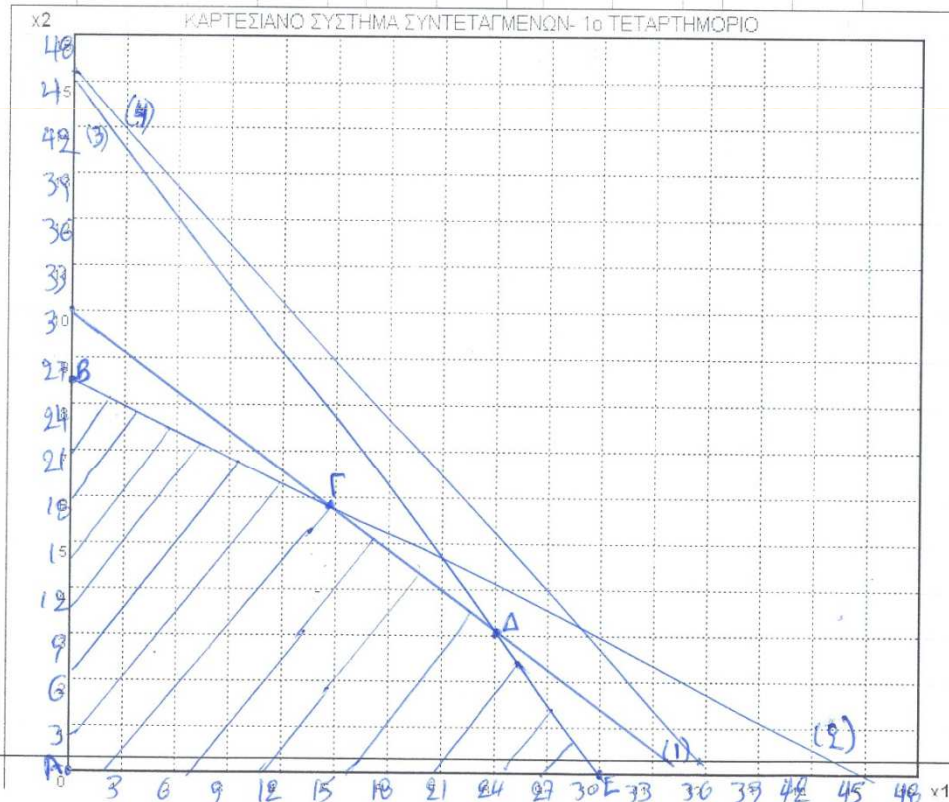
Παρ. 3.1

Εξισώσεις

70	x_1	+	80	x_2	$\leq$	2400
40	x_1	+	70	x_2	$\leq$	1800
30	x_1	+	90	x_2	$\leq$	900
130	x_1	+	100	x_2	$\leq$	4600

Εύρεση σημείων για τις ευθείες

Για $x_1=0, x_2=30$	Για $x_2=0, x_1=3420$	Σημεία: $(0, 30)$ $(3420, 0)$
Για $x_1=0, x_2=2571$	Για $x_2=0, x_1=2571$	Σημεία: $(0, 2571)$ $(2571, 0)$
Για $x_1=0, x_2=45$	Για $x_2=0, x_1=30$	Σημεία: $(0, 45)$ $(30, 0)$
Για $x_1=0, x_2=46$	Για $x_2=0, x_1=3538$	Σημεία: $(0, 46)$ $(3538, 0)$



Κλίμακα

1	3	10
2	6	20
3	9	30
4	12	40
5	15	50
6	18	60
7	21	70
8	24	80
9	27	90
10	30	100
11	33	110
12	36	
13	39	
14	42	

Κλίμακα

1	20
2	40
3	60
4	80
5	100
6	120
7	140
8	160
9	180

Εφικτή περιοχή

Κορυφή	Λύση (x_1, x_2)	Τιμή της z
A	$0, 0$	0
B	$0, 2571$	411,36
Γ	$14,18, 17,65$	422,6
Δ	$24, 9$	384
E	$30, 0$	300

Βέλτιστη λύση

$x_1 =$	14,18
$x_2 =$	17,65
$x_3 =$	
$x_4 =$	

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου-μαθηματική επίλυση Παρ. 3.2

✖ Στο παράδειγμα 3.2 του βιβλίου θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων που τέμνονται στο σημείο Γ, από όπου περνάει η βέλτιστη λύση.

✖ $1,5x_1 + 1,2x_2 = 180 \quad (1)$

✖ $0,5x_1 + 1,0x_2 = 120 \quad (2)$

✖ Λύνουμε την εξίσωση (1) ως προς x_1 : $1,5x_1 = 180 - 1,2x_2 \Leftrightarrow x_1 = (180 - 1,2x_2) / 1,5 \Leftrightarrow x_1 = 120 - 0,8x_2$

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου-μαθηματική επίλυση

✖ Αντικαθιστούμε αυτήν την τιμή του x_1 στην (2):

$$0,5 \times (120 - 0,8x_2) + x_2 = 120 \Leftrightarrow 60 - 0,4x_2 + x_2 = 120 \Leftrightarrow 0,6x_2 = 60 \Leftrightarrow x_2 = \mathbf{100}$$

✖ Άρα: $x_1 = 120 - (0,8 \times 100) = 120 - 80 = \mathbf{40}$

Παράδειγμα 3.2- γραφική επίλυση

Γραφική Επίλυση Παρ.3.2

Εξισώσεις

$1,5 x_1$	+	$1,5 x_2$	$\leq$	180
$0,5 x_1$	+	$1 x_2$	$\leq$	120
x_1			$\geq$	20

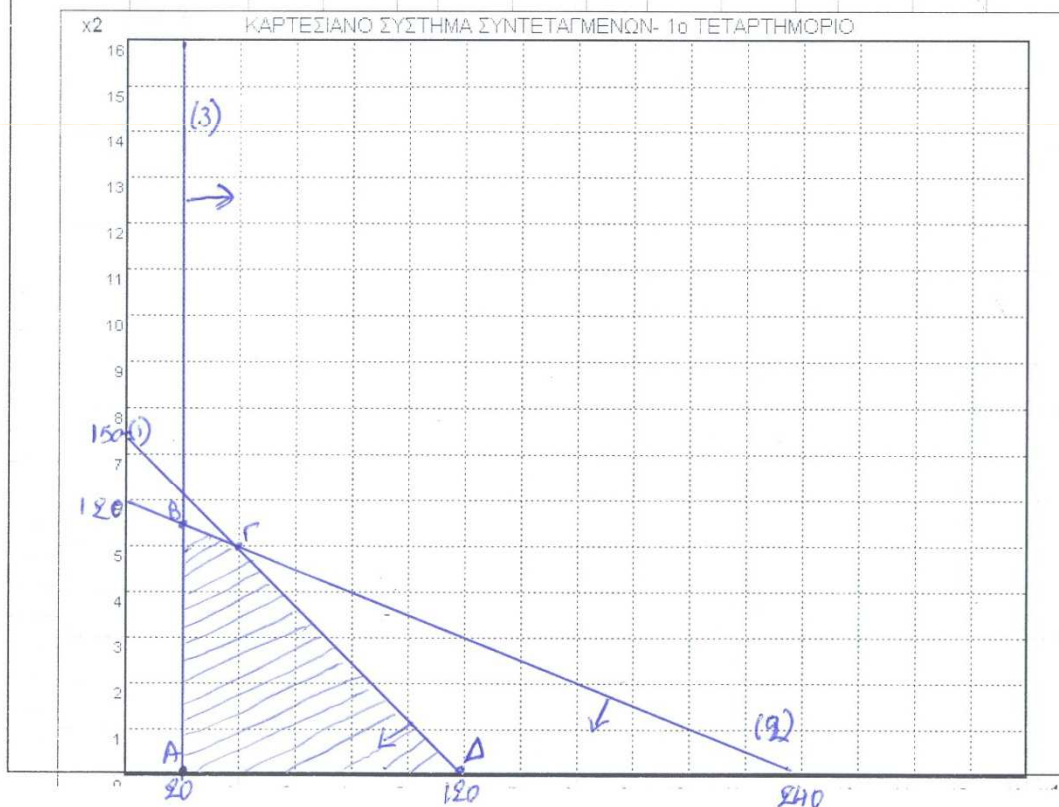
Εύρεση σημείων για τις ευθείες

Για $x_1=0$, $x_2=150$ Για $x_2=120$ Σημεία: (0,150) (120,0)Για $x_1=0$, $x_2=120$ Για $x_2=240$ Σημεία: (0,120) (240,0)Για $x_1=20$ Σημείο: (20,0)

Ευθ(1)

Ευθ(2)

Ευθ(3)



Κλίμακα

1	20
2	40
3	60
4	80
5	100
6	120
7	140
8	160
9	180
10	200
11	220
12	240
13	260
14	280
15	300
16	320

Εφικτή περιοχή

Κορυφή	Λύση(x_1, x_2)	Τιμή της z
A	20 0	240
B	20 110	2220
Γ	40 100	2280
Δ	120 0	1440

max 2280

Βέλτιστη λύση

$x_1=$	40
$x_2=$	100

Ανάλυση της γραφικής μεθόδου-μαθηματική επίλυση Παρ 3.3

✖ Στο παράδειγμα 3.3 του βιβλίου θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων που τέμνονται στο σημείο A, από όπου περνάει η βέλτιστη λύση.

✖ $0,20x_1 + 0,08x_2 = 2400 \quad (2)$

✖ $x_2 = 10000 \quad (3)$

✖ Θέτουμε στην (2) την τιμή του $x_2 = 10000$:

$$0,20x_1 + (0,08 \times 10000) = 2400 \Leftrightarrow 0,20x_1 + 800 = 2400 \Leftrightarrow 0,20x_1 = 1600 \Leftrightarrow x_1 = 8000$$

Παράδειγμα 3.3- Γραφική επίλυση

Γραφική Επίλυση

Παρ.3.3

Εξισώσεις

1	x_1	+	1,0	x_2	$\leq$	24000
0,2	x_1	+	0,08	x_2	$\geq$	2400
				x_2	$\geq$	10000

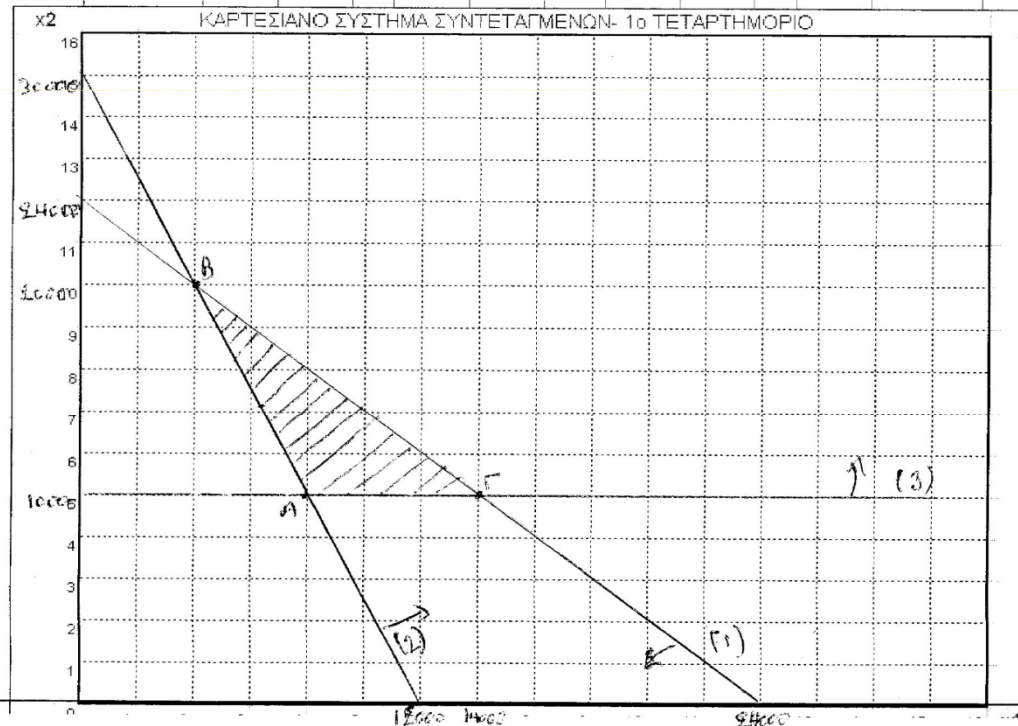
Εύρεση σημείων για τις ευθείες

Για $x_1=0$, $x_2=$	24000	Για $x_2=0$, $x_1=$	24000	Σημεία: (0,24000) (24000,0)
Για $x_1=0$, $x_2=$	30000	Για $x_2=0$, $x_1=$	12000	Σημεία: (0,30000) (12000,0)
$x_2=10000$				Σημείο: (0,10000)

Ευθ(1)

Ευθ(2)

Ευθ(3)



Κλίμακα

1	2000
2	4000
3	6000
4	8000
5	10000
6	12000
7	14000
8	16000
9	18000
10	20000
11	22000
12	24000
13	26000
14	28000
15	30000
16	32000

Εφικτή περιοχή

Κορυφή	Λύση(x_1 , x_2)	Τιμή της z
A	8000, 10000	146000
B	4000, 20000	148000
Γ	14000, 10000	218000

min 146000

Βέλτιστη λύση

$x_1=$	8000
$x_2=$	10000

ΤΕΛΟΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ