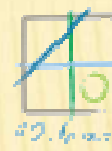




ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ



Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων

“ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ”

Ενότητα 1: Γραμμικός προγραμματισμός (Γ.Π.)

Διδάσκων: Βασίλειος Ισχυρλής

Τηλ:6979948174, e-mail: vasismir@gmail.com
<http://vasilis-ismyrlis.webnode.gr/>

Περιεχόμενα

1. Στοιχεία ενός προβλήματος Γ.Π.
2. Τυπική μορφή ενός προβλήματος Γ.Π. και παραδείγματα
3. Μαθηματική διατύπωση προβλήματος Γ.Π. και παραδείγματα
4. Ερωτήσεις

Γενικό πρότυπο Γραμ.προγραμματισμού

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

z είναι η αντικειμενική συνάρτηση

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq \text{ή} \geq b_1$$

Γραμμικοί περιορισμοί

.....

Συνήθως επίσης ισχύει $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

Περιορισμοί μη αρνητικότητας

$x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι μεταβλητές αποφάσεων

$b_1, b_2, \dots, b_n$ είναι οι σταθερές

Ιδιότητες προβλημάτων Γ.Π.

- ✖ Αναλογικότητα: Αν για παράδειγμα μία μονάδα του προϊόντος 1 χρειάζεται ποσότητα a_{1i} της πρώτης ύλης i , τότε x_1 μονάδες του προϊόντος 1 χρειάζονται ποσότητα $a_{1i} x_1$.
- ✖ Προσθετικότητα: η συνολική ποσότητα της πρώτης ύλης προκύπτει από την πρόσθεση των επιμέρους ποσοτήτων που απαιτούνται για κάθε προϊόν.
- ✖ Διαιρετότητα: γίνονται αποδεκτές δεκαδικές τιμές για τις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$, με την προϋπόθεση ότι αυτές οι τιμές έχουν νόημα. Αν δεν έχουμε δεκαδικούς έχουμε πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού.
- ✖ Βεβαιότητα: Οι συντελεστές a_{ij} , b_i και c_i είναι γνωστοί και σταθεροί.

Τυπική μορφή προβλήματος Γ.Π.

Η τυπική μορφή ενός προβλήματος Γ.Π. πρέπει να έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Να είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης(max)
- Οι γραμμικοί περιορισμοί να είναι ισότητες (=)
- Οι μεταβλητές του προβλήματος να μην είναι αρνητικές, δηλαδή να είναι ≥ 0 .
- Οι σταθεροί όροι b του προβλήματος να μην είναι αρνητικοί, δηλαδή να είναι ≥ 0 .

Τυπική μορφή

Τυπική μορφή προβλήματος Γ.Π.

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0.$$

Τυπική μορφή

Οδηγίες μετατροπής στην τυπική μορφή

- ✖ Το $\min z$ γίνεται $-\max z$ και αλλάζουν τα πρόσημα
- ✖ Στην ανισότητα $\geq$, προσθέτουμε περιθώρια (ή βοηθητική) μεταβλητή που έχει αρνητικό πρόσημο (π.χ. $-x_3$)
Στην ανισότητα $\leq$, προσθέτουμε περιθώρια μεταβλητή που έχει θετικό πρόσημο (π.χ. $+x_3$).
- ✖ Αν $x_2 \leq 0$, θέτουμε $x_2 = -x'_2$, όπου $x'_2 \geq 0$
- ✖ Αν $x_3 \in \mathbb{R}$, θέτουμε $x_3 = x'_3 - x''_3$, όπου $x'_3, x''_3 \geq 0$

Παράδειγμα 2.1 σελ.25

Να τεθεί σε τυπική μορφή το παρακάτω πρόβλημα Γ.Π.

$$\min z = 3x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq -7$$

$$2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 2.1 σελ.25

Να τεθεί σε τυπική μορφή το παρακάτω πρόβλημα Γ.Π. (**bold και υπογραμμισμένα αυτά που πρέπει να αλλάξουν**)

$$\times \underline{\min} z = 3x_1 - x_2 + 4x_3 \Leftrightarrow -\max -z = -3x_1 + x_2 - 4x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$$

$$\times 3x_1 + x_2 - x_3 \leq \underline{-7} \Leftrightarrow -3x_1 - x_2 + x_3 \geq 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 7$$

$$\times 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \leq 6 \Leftrightarrow 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_5 = 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \underline{\mathbf{E} \mathbf{R}}, \Leftrightarrow \text{θέτω } x_2 = -x'_2, \quad x_3 = x'_3 - x''_3$$

Παράδειγμα 2.1 σελ.25

Τελική Λύση

$$\times -\max -z = -3x_1 - x'_2 - 4(x'_3 - x''_3) = -3x_1 - x'_2 - 4x'_3 + x''_3$$

$$\times x_1 - 2x'_2 + (x'_3 - x''_3) = 15$$

$$\times -3x_1 + x'_2 + (x'_3 - x''_3) - x_4 = 7$$

$$\times 2x_1 + 7x'_2 + 3(x'_3 - x''_3) + x_5 = 6$$

$$\times x_1, x'_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$(\text{Έχω θέσει } x_2 = -x'_2, \quad x_3 = x'_3 - x''_3)$$

Παραδείγματα σελ. 26

1. $\max z = -3x_1 + 4x_2$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 40 \Leftrightarrow 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 40$$

$$2x_1 + 6x_2 \geq 28 \Leftrightarrow 2x_1 + 6x_2 - x_4 = 28$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (προστίθενται οι } x_3, x_4)$$

4. $\max z = 6x_1 + 10x_2$

$$2x_1 + 4x_2 \geq -17 \Leftrightarrow -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 17$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 25 \Leftrightarrow 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 25$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (προστίθενται οι } x_3, x_4)$$

Παραδείγματα σελ. 26

$$5. \max z = 7x_1 - 3x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 = 40$$

$$x_1 + 3x_2 \underline{\underline{\geq}} 25$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \underline{\underline{\in \mathbb{R}}}$$

Λύση

Θέτω $x_2 = x'_2 - x''_2$, όπου $x'_2, x''_2 \geq 0$. Επομένως:

$$\times \max z = 7x_1 - 3(x'_2 - x''_2) \Leftrightarrow \max z = 7x_1 - 3x'_2 + 3x''_2$$

$$\times 2x_1 + 4(x'_2 - x''_2) = 30 \Leftrightarrow 2x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 = 30$$

$$\times x_1 + 3(x'_2 - x''_2) - x_3 = 25 \Leftrightarrow x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 - x_3 = 25$$

$$\times x_1, x'_2, x''_2, x_3 \geq 0$$

Παρ. 2.2 μαθηματική διατύπωση προβλήματος

- ✖ Σε μια μονάδα εκτροφής ζώων δίνεται καθημερινά σε κάθε ζώο ένα μείγμα τροφής που αποτελείται από **4 διαφορετικά είδη τροφών**. Ένα κιλό από κάθε είδος τροφής περιέχει συγκεκριμένες μονάδες **θρεπτικών συστατικών** και έχει διαφορετικό κόστος. Επιπλέον, το μείγμα τροφής πρέπει να περιέχει κάποιες **ελάχιστες μονάδες από κάθε θρεπτικό συστατικό**, προκειμένου κάθε ζώο να αναπτύσσεται σωστά. Να προσδιοριστούν οι ποσότητες από κάθε είδος τροφής, που πρέπει να περιλαμβάνονται στο μείγμα, ώστε να καλύπτονται οι ημερήσιες διατροφικές ανάγκες με το **ελάχιστο δυνατό κόστος**.

Παρ. 2.2 μαθηματική διατύπωση προβλήματος

- ✖ Πόσες και ποιες είναι οι μεταβλητές απόφασης;
- ✖ Είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης;
- ✖ Οι γραμμικοί περιορισμοί θα έχουν $\leq$ ή $\geq$;
- ✖ Πόσοι γραμμικοί περιορισμοί θα υπάρχουν;

Παρ. 2.2 μαθηματική διατύπωση προβλήματος

	Είδη τροφής				
Θρ.συστ	A	B	Γ	Δ	Ελ.ημερ.α νάγκες
I	90	95	68	35	250
II	45	60	65	67	190
III	15	20	35	42	120
IV	4	7	5	6	30
Κόστος	0,25	0,30	0,28	0,20	

x_1 =ποσότητα Τροφής Α κλπ

$$\begin{aligned} \min z &= 0,25x_1 + 0,30x_2 + 0,28x_3 + 0,20x_4 \\ 90x_1 + 95x_2 + 68x_3 + 35x_4 &\leq 250 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2 στο Excel

Παράμετροι παραγωγικής διαδικασίας

Πόροι	Απαιτ.ποσότητα πόρου για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος				Διαθεσιμότητα
	P1	P2	P3	P4	
R1	90	95	68	35	250
R2	45	60	65	67	190
R3	15	20	35	42	120
R4	4	7	5	6	30
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	0,25	0,3	0	0,2	

Θεωρητική διατύπωση προβλήματος

Σε μια μονάδα εκτροφής ζώων δίνεται καθημερινά σε κάθε ζώο ένα μείγμα τροφής που αποτελείται από 4 διαφορετικά είδη τροφών. Ένα κιλό από κάθε είδος τροφής περιέχει συγκεκριμένες μονάδες θρεπτικών συστατικών και έχει διαφορετικό κόστος. Επιπλέον, το μείγμα τροφής πρέπει να περιέχει κάποιες ελάχιστες μονάδες από κάθε θρεπτικό συστατικό, προκειμένου κάθε ζώο να αναπτύσσεται σωστά. Να προσδιοριστούν οι ποσότητες από κάθε είδος τροφής, που πρέπει να περιλαμβάνονται στο μείγμα, ώστε να καλύπτονται οι ημερήσιες διατροφικές ανάγκες με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Μαθηματική διατύπωση προβλήματος

1. Μεταβλητές απόφασης

x_1 =ποσότητα τροφής Α σε kg

x_2 =ποσότητα τροφής Β σε kg

x_3 =ποσότητα τροφής Γ σε kg

x_4 =ποσότητα τροφής Δ σε kg

2. Αντικ.συνάρτηση F ή z

min z=

$$0,25 \cdot x_1 + 0,3 \cdot x_2 + 0,28 \cdot x_3 + 0,2 \cdot x_4$$

3. Περιορισμοί

90 x_1	+	95 x_2	+	35 x_3	+	35 x_4	>=	250
45 x_1	+	60 x_2	+	67 x_3	+	67 x_4	>=	190
15 x_1	+	20 x_2	+	42 x_3	+	42 x_4	>=	120
4 x_1	+	7 x_2	+	6 x_3	+	6 x_4	>=	30

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Παρ. 2.3 μαθηματική διατύπωση προβλήματος

Μηχανουργείο παράγει 3 προϊόντα με τη χρήση 4 μηχανών. Αναζητείται το εβδομαδιαίο κέρδος.

✖ Πόσες και ποιες είναι οι μεταβλητές απόφασης;

✖ Είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης;

✖ Οι γραμμικοί περιορισμοί θα έχουν $\leq$ ή $\geq$;

✖ Πόσοι γραμμικοί περιορισμοί θα υπάρχουν;

Παρ. 2.3 μαθηματική διατύπωση προβλήματος

	Προϊόντα			
Μηχανές	A	B	Γ	Διαθ.ώρες
I	0,5	0,8	1	40
II	2,5	3	2	70
III	2	1,5	0	35
IV	2	1,5	0	35
Κέρδος	39	45	48	

$$\begin{aligned} \max z &= 39x_1 + 45x_2 + 48x_3 \\ 0,5x_1 + 0,8x_2 + 1,0x_3 &\leq 40 \\ 2,5x_1 + 3,0x_2 + 2,0x_3 &\leq 28 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Παρ. 2.4 μαθηματική διατύπωση προβλήματος

Παραγωγή 3 προϊόντων με τη χρήση 4 πρώτων υλών. Είναι πρόβλημα μεγιστοποίηση κέρδους.

✖ Έστω x_1 μονάδες του προϊόντος Α

✖ Έστω x_2 μονάδες του προϊόντος Β

✖ Έστω x_3 μονάδες του προϊόντος Γ

✖ Κέρδος προϊόντος Α: $45 - [(2*3) + (1,5*7) + (0,8*6,5) + (3*4)] = 45 - 33,7 = 11,3$ κέρδος πρ.Α

✖ Κέρδος προϊόντος Β: $39 - [(1,5*3) + (2*7) + (1*6,5) + (0,5*4)] = 12$.

✖ Κέρδος προϊόντος Γ: $41 - [(1*3) + (3*7) + (0*6,5) + (0,5*4)] = 15$.

Παρ. 2.4 μαθηματική διατύπωση προβλήματος

	Ποσότητα πρώτων υλών ανά προϊόν					Υπολογίστηκε
Προϊόντα	$\pi\upsilon_1$	$\pi\upsilon_2$	$\pi\upsilon_3$	$\pi\upsilon_4$	Τιμές πώλησης	Κέρδος
A	2,0	1,5	0,8	3,0	45	11,3
B	1,5	2,0	1,0	0,5	39	12
Γ	1,0	3,0	0	0,5	41	15
Διαθ.ποσότητες	800	400	430	650		
Κόστος αγοράς	3	7	6,5	4		

$$\begin{aligned} \max z &= 11,3x_1 + 12x_2 + 15x_3 \\ 2,0x_1 + 1,5x_2 + 1,0x_3 &\leq 800 \\ 1,5x_1 + 2,0x_2 + 3,0x_3 &\leq 400 \end{aligned}$$

.....
.....

$$x_2 \geq 15$$

$$x_3 \geq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Παρ. 2.5 μαθηματική διατύπωση προβλήματος

3 εργοστάσια προμηθεύουν 4 αγορές. Ελαχιστοποίηση κόστους μεταφοράς. Πρόβλημα μεταφοράς

	Αγορές				
Εργοστάσια	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	Προσφορά
A1	(x ₁₁) 19	(x ₁₂) 7	3	21	100
A2	(x ₂₁) 15	21	18	6	300
A3	11	14	15	22	200
Ζήτηση	150	100	200	150	

$$\min z = 19x_{11} + 7x_{12} + \dots + 22x_{34}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100$$

.....

Πρόβλημα προς επίλυση 1, σελ.49

	Τύποι επίπλων		
Τμήματα	A (x_1)	B (x_2)	Διαθ.ώρες εργασίας
I	2	2	50
II	4	2	60
III	2	3	60
Κέρδος	100	140	

$$\max z = 100x_1 + 140x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 50$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Πρόβλημα προς επίλυση 3, σελ.49

Προϊόντα	Τύπος ξύλου I	Τύπος ξύλου II	Ωρες	Κέρδος
Τραπέζια(x_1)	5	2	3	35
Καρέκλες(x_2)	1	3	2	15
Γραφεία(x_3)	9	4	5	44
Βιβλιοθήκες(x_4)	12	1	10	29
Διαθ.πόροι	1500	1000	800	

$$\max z = 35x_1 + 15x_2 + 44x_3 + 29x_4$$

$$5x_1 + 1x_2 + 9x_3 + 12x_4 \leq 1500$$

.....

.....

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Ερωτήσεις

Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να εφαρμοστεί στη διαχείριση αγροτικής παραγωγής για τη βέλτιστη κατανομή πόρων όπως....., με τρόπο που να οδηγεί στη μεγιστοποίηση των κερδών.

A) διαθέσιμης προς καλλιέργειας γης

B) εργασίας

Γ) υδάτινων πόρων και κεφαλαίων

Δ) όλων των παραπάνω

Ερωτήσεις

Τα μοντέλα Γ.Π. έχουν τις ιδιότητες της.....

.....

A) αναλογικότητας

B) προσθετικότητας

Γ) διαιρετότητας

Δ) όλες τις παραπάνω

Ερωτήσεις

Οι τιμές των μεταβλητών αποφάσεων:

A) δηλώνουν τις ποσότητες που, ανάλογα με το πρόβλημα, θα παραχθούν, επενδυθούν, αγορασθούν, κατασκευασθούν κ.λπ.

B) απεικονίζουν τις ποσότητες των περιορισμών

Γ) δηλώνουν την τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτ

Δ) πρέπει να οριστούν για κάθε περιορισμό

Ερωτήσεις

Ποια από τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις αποτελεί μία αποδεκτή αντικειμενική συνάρτηση για ένα πρόβλημα Γ.Π.;

A) $\max 5xy$

B) $\min 4x + 3y + (2/3)z$

Γ) $\max 5x^2 + 6y^2$

Δ) $\min (x_1 + x_2)/x_3$

Ερωτήσεις

Στα προβλήματα Γ.Π. οι.....

περιγράφονται με τη μορφή ανισοτήτων ή/και ισοτήτων

A) περιορισμοί

B) αντικειμενικές συναρτήσεις

Γ) περιορισμοί και αντικειμενικές συναρτήσεις

Δ) κανένα από τα παραπάνω

Ερωτήσεις

Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί
είναι γραμμικές σχέσεις των.....

A) μεταβλητών

B) περιορισμών

Γ) συναρτήσεων

Δ) όλων των παραπάνω

Ερωτήσεις

Ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης αλλάζοντας το πρόσημο των συντελεστών:

A) των περιορισμών

B) της αντικειμενικής συνάρτησης

Γ) και των δύο (α) και (β)

Δ) τίποτα από τα παραπάνω

Ερωτήσεις

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα Γ.Π.

Μεγιστοποίηση $z=6x+5y$,

Με τους περιορισμούς: $4x+3y \leq 48$

$x+2y \leq 18$

$x, y \geq 0$

Ποιος από τους ακολουθούμενους συνδυασμούς (x,y) θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε μια κορυφή της εφικτής περιοχής;

A) $(10,8)$

B) $(12,0)$

Γ) $(0,18)$

Δ) $(6,12)$

ΤΕΛΟΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ