

Κεφάλαιο 2

η ανισότητα

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \text{ (όπου } x_{n+i} \geq 0)$$

και η ισότητα

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

είναι ισοδύναμη με το παρακάτω σύστημα ανισοτήτων.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

Κάθε μεταβλητή, η οποία παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες του μηδενός, μπορεί να αντικατασταθεί από μια θετική μεταβλητή. Για παράδειγμα, η αρνητική μεταβλητή x_k ($x_k \leq 0$) αντικαθίσταται από τη μεταβλητή $x'_k = -x_k$ και επομένως $x'_k \geq 0$. Τέλος, κάθε μεταβλητή, για την οποία δεν υπάρχει περιορισμός στο πρόσημο, μπορεί να αντικατασταθεί από τη διαφορά δυο θετικών μεταβλητών. Η x_k ($x_k \in R$) αντικαθίσταται ως εξής:

$$x_k = x'_k - x''_k, \quad x'_k, x''_k \geq 0$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να παρουσιαστεί, με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς και ανεξάρτητα από τη μορφή που έχει αρχικά, με τρόπο ώστε:

1. Να είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης.
2. Οι γραμμικοί περιορισμοί του προβλήματος να είναι ισότητες (=).
3. Οι μεταβλητές του προβλήματος να είναι μη αρνητικές (≥ 0).
4. Οι σταθεροί όροι b του προβλήματος να είναι μη αρνητικοί (≥ 0).

Έτσι, κάθε πρόβλημα γ.π. μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$(\pm) \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$b_1, b_2, \dots, b_m \geq 0$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Ένα πρόβλημα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά ονομάζεται πρόβλημα σε τυπική μορφή (standard form).

Παράδειγμα 2.1

Να τεθεί σε τυπική μορφή το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\min z = 3x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq -7$$

$$2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in R$$

Παρατηρείται ότι: το πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης, οι περιορισμοί δεν είναι όλοι ισότητες, υπάρχει κάποιος όρος b αρνητικός ($2^{\text{ος}}$ περιορισμός) και οι μεταβλητές δεν είναι όλες μη αρνητικές. Επομένως πρέπει να γίνουν οι κατάλληλοι μετασχηματισμοί έτσι ώστε το πρόβλημα να τεθεί σε τυπική μορφή. Συγκεκριμένα, μετατρέπεται το πρόβλημα ελαχιστοποίησης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης αλλάζοντας τα πρόσημα στην αντικειμενική συνάρτηση. Πολλαπλασιάζεται ο δεύτερος περιορισμός με -1 , αλλάζοντας συγχρόνως τη φορά της ανισότητας, για να γίνει ο σταθερός όρος θετικός. Εισάγονται οι περιθώριες μεταβλητές για να γίνουν οι ανισότητες ισότητες. Μετατρέπονται όλες οι μεταβλητές σε θετικές.

1. Μετατροπή του προβλήματος σε πρόβλημα μεγιστοποίησης.

$$-\max -z = -3x_1 + x_2 - 4x_3$$

2. Μετατροπή των αρνητικών σταθερών όρων σε θετικούς σταθερούς όρους.

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq -7 \Leftrightarrow -3x_1 - x_2 + x_3 \geq 7$$

3. Μετατροπή των περιορισμών σε εξισώσεις.

$$-3x_1 - x_2 + x_3 \geq 7 \Leftrightarrow -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 7$$

$$2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \leq 6 \Leftrightarrow 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_5 = 6$$

4. Μετατροπή των αρνητικών μεταβλητών και των μεταβλητών χωρίς περιορισμό στο πρόσημο σε θετικές μεταβλητές.

$$\begin{aligned} x_2 &= -x'_2, & x'_2 &\geq 0 \\ x_3 &= x'_3 - x''_3, & x'_3, x''_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Έπειτα από τους παραπάνω μετασχηματισμούς προκύπτει το πρόβλημα:

$$\begin{aligned} -\max -z &= -3x_1 - x'_2 - 4(x'_3 - x''_3) \\ x_1 - 2x'_2 + (x'_3 - x''_3) &= 15 \\ -3x_1 + x'_2 + (x'_3 - x''_3) - x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 7x'_2 + 3(x'_3 - x''_3) + x_5 &= 6 \\ x_1, x'_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα το πρόβλημα:

Κεφάλαιο 2

$$\begin{aligned}
 -\max -z &= -3x_1 - x'_2 - 4x'_3 + 4x''_3 \\
 x_1 - 2x'_2 + x'_3 - x''_3 &= 15 \\
 -3x_1 + x'_2 + x'_3 - x''_3 - x_4 &= 7 \\
 2x_1 + 7x'_2 + 3x'_3 - 3x''_3 + x_5 &= 6 \\
 x_1, x'_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται μερικά ακόμη παραδείγματα προβλημάτων γ.π. σε τυπική μορφή.

Αρχική μορφή

1. $\max z = 3x_1 + 4x_2$
 $5x_1 + 2x_2 \leq 40$
 $2x_1 + 6x_2 \geq 28$
 $x_1, x_2 \geq 0$
2. $\min z = 3x_1 + 4x_2$
 $x_1 + 2x_2 \geq 18$
 $x_1 + x_2 \geq 10$
 $x_1, x_2 \geq 0$
3. $\max z = 5x_1 + 4x_2$
 $3x_1 + 2x_2 \geq 40$
 $7x_1 + 6x_2 \geq 28$
 $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$
4. $\max z = 6x_1 + 10x_2$
 $2x_1 + 4x_2 \geq -17$
 $4x_1 + 3x_2 \leq 25$
 $x_1, x_2 \geq 0$
5. $\max z = 7x_1 - 3x_2$
 $2x_1 + 4x_2 = 30$
 $x_1 + 3x_2 \geq 25$
 $x_1 \geq 0, x_2 \in R$

Τυπική μορφή

$$\begin{aligned}
 \max z &= 3x_1 + 4x_2 \\
 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 40 \\
 2x_1 + 6x_2 - x_4 &= 28 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\
 -\max -z &= -3x_1 - 4x_2 \\
 x_1 + 2x_2 - x_3 &= 18 \\
 x_1 + x_2 - x_4 &= 10 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\
 \max z &= 5x_1 - 4x'_2 \\
 3x_1 - 2x'_2 - x_3 &= 40 \\
 7x_1 - 6x'_2 - x_4 &= 28 \\
 x_1, x'_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\
 \max z &= 6x_1 + 10x_2 \\
 -2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 17 \\
 4x_1 + 3x_2 + x_4 &= 25 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\
 \max z &= 7x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 \\
 2x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 &= 30 \\
 x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 - x_3 &= 25 \\
 x_1, x'_2, x''_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

φορετικό κόστος. Επιπλέον, το μείγμα τροφής πρέπει να περιέχει κάποιες ελάχιστες μονάδες από κάθε θρεπτικό συστατικό, προκειμένου κάθε ζώο να αναπτύσσεται σωστά. Τα δεδομένα αυτά παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα. Να προσδιοριστούν οι ποσότητες από κάθε είδος τροφής, που πρέπει να περιλαμβάνονται στο μείγμα, ώστε να καλύπτονται οι ημερήσιες διατροφικές ανάγκες με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Θρεπτικά συστατικά	Είδη τροφής				Ελάχιστες ημερήσιες ανάγκες
	A	B	Γ	Δ	
I	90	95	68	35	250
II	45	60	65	67	190
III	15	20	35	42	120
IV	4	7	5	6	30
Κόστος (€/kg)	0,25	0,30	0,28	0,20	

Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Μεταβλητές του προβλήματος: Έστω x_1 η ποσότητα της τροφής A (σε kg) που περιλαμβάνεται στο μείγμα, x_2 η ποσότητα (kg) της τροφής B, x_3 η ποσότητα (kg) της τροφής Γ και x_4 η ποσότητα (kg) της τροφής Δ.

Αντικειμενική συνάρτηση: Το συνολικό κόστος του μείγματος είναι $0,25x_1 + 0,30x_2 + 0,28x_3 + 0,20x_4$ και, επειδή στόχος του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίησή του, η αντικειμενική συνάρτηση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\min z = 0,25x_1 + 0,30x_2 + 0,28x_3 + 0,20x_4$$

Περιορισμοί: Οι περιορισμοί οφείλονται στις ελάχιστες ημερήσιες ανάγκες των θρεπτικών συστατικών που πρέπει να περιλαμβάνονται στην ημερήσια διατροφή των ζώων. Συγκεκριμένα, στο μείγμα τροφής θα πρέπει να περιλαμβάνονται: 250 μονάδες του θρεπτικού συστατικού I, 190 του II, 120 του III και 30 του IV. Επομένως οι περιορισμοί είναι:

$$90x_1 + 95x_2 + 68x_3 + 35x_4 \geq 250$$

$$45x_1 + 60x_2 + 65x_3 + 67x_4 \geq 190$$

$$15x_1 + 20x_2 + 35x_3 + 42x_4 \geq 120$$

$$4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 \geq 30$$

Τέλος, οι μεταβλητές του προβλήματος δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Γενικά, σε ένα πρόβλημα διατροφής (ή πρόβλημα διαίτης, όπως αλλιώς είναι γνωστό) υπάρχουν κάποια είδη διατροφής για τα οποία είναι γνωστές οι ποσότητες θρεπτικών συστατικών που περιέχουν και ο αντικειμενικός σκοπός είναι ο σχεδιασμός μιας δίαιτας, δηλαδή ο προσδιορισμός των ποσοτήτων των ειδών που πρέπει να καταναλωθούν, έτσι ώστε να ικανοποιούνται ορισμένες απαιτήσεις διατροφής με

Παράδειγμα 2.3 Ελάχιστο κόστος. Έστω:

■ είδη τροφών $T_1, T_2, \dots, T_n$

■ θρεπτικά συστατικά $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$

c_j η αξία (κόστος) της μονάδας T_j

b_i η ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα του συστατικού Σ_i

a_{ij} η ποσότητα του Σ_i που βρίσκεται σε μια μονάδα της T_j

Το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των ποσοτήτων $x_j = 1, 2, \dots, n$ των τροφών που πρέπει να περιλαμβάνονται στη διατροφή έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος. Κατά συνέπεια το γενικό πρότυπο είναι:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.3

Σε ένα μηχανουργείο μπορούν να παραχθούν τρία προϊόντα με τη χρησιμοποίηση τεσσάρων μηχανών. Κάθε προϊόν χρειάζεται ορισμένες ώρες επεξεργασίας σε κάθε μηχανή, ενώ η παραγωγή του συνεπάγεται συγκεκριμένο κέρδος. Η δυναμικότητα των μηχανών είναι περιορισμένη. Τα σχετικά δεδομένα παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα. Πόσες μονάδες πρέπει να παραχθούν από κάθε προϊόν για να μεγιστοποιηθεί το συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος;

Είδος μηχανής	Μηχανώρες ανά μονάδα			Διαθέσιμες ώρες ανά εβδομάδα
	Προϊόν Α	Προϊόν Β	Προϊόν Γ	
I	0,5	0,8	1,0	40
II	2,5	3,0	2,0	70
III	4,0	3,5	5,0	120
IV	2,0	1,5	0	35
Κέρδος (€/μονάδα)	39	45	48	

Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των μονάδων του κάθε προϊόντος που θα παράγονται σε εβδομαδιαία βάση. Έστω x_1 οι μονάδες προϊόντος Α, x_2 οι μονάδες προϊόντος Β και x_3 οι μονάδες προϊόντος Γ. Το συνολικό κέρδος θα είναι: $39x_1 + 45x_2 + 48x_3$ και οι περιορισμοί προκύπτουν από τις διαθέσιμες ώρες λειτουργίας των μηχανών. Έτσι, το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι το εξής:

Κεφάλαιο 2

$$\max z = 39x_1 + 45x_2 + 48x_3$$

$$0,5x_1 + 0,8x_2 + 1,0x_3 \leq 40$$

$$2,5x_1 + 3,0x_2 + 2,0x_3 \leq 70$$

$$4,0x_1 + 3,5x_2 + 5,0x_3 \leq 120$$

$$2,0x_1 + 1,5x_2 \leq 35$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Παράδειγμα 2.4

Μία επιχείρηση παράγει τα προϊόντα Α, Β και Γ, για τα οποία οι τιμές πώλησης ανά μονάδα είναι 45, 39 και 41€ αντίστοιχα. Η παραγωγή των προϊόντων απαιτεί τη χρησιμοποίηση των πρώτων υλών $\pi\upsilon_1$, $\pi\upsilon_2$, $\pi\upsilon_3$ και $\pi\upsilon_4$. Το κόστος αγοράς ανά μονάδα πρώτης ύλης είναι 3, 7, 6,5 και 4€, ενώ οι διαθέσιμες ποσότητες 800, 400, 430 και 650 μονάδες αντίστοιχα. Κάθε μονάδα προϊόντος χρειάζεται τις ποσότητες πρώτων υλών του παρακάτω πίνακα. Η επιχείρηση πρέπει να παράγει οπωσδήποτε 15 μονάδες από το προϊόν Β και 30 μονάδες από το προϊόν Γ. Πόσες μονάδες από κάθε προϊόν πρέπει να παραχθούν, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος;

Προϊόντα	Ποσότητα πρώτων υλών ανά προϊόν			
	$\pi\upsilon_1$	$\pi\upsilon_2$	$\pi\upsilon_3$	$\pi\upsilon_4$
Α	2,0	1,5	0,8	3,0
Β	1,5	2,0	1,0	0,5
Γ	1,0	3,0	0	0,5

Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Έστω x_1 οι μονάδες του προϊόντος Α, x_2 οι μονάδες του προϊόντος Β και x_3 οι μονάδες του προϊόντος Γ. Από κάθε προϊόν Α η επιχείρηση εισπράττει 45€ και ξοδεύει (για πρώτες ύλες) $2 \cdot 3 + 1,5 \cdot 7 + 0,8 \cdot 6,5 + 3 \cdot 4 = 33,7\text{€}$. Άρα το κέρδος της είναι $45 - 33,7 = 11,3\text{€}$. Αντίστοιχα, το κέρδος από κάθε προϊόν Β είναι: $39 - (1,5 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 6,5 + 0,5 \cdot 4) = 12\text{€}$ και από κάθε προϊόν Γ είναι: $41 - (3 + 3 \cdot 7 + 0,5 \cdot 4) = 15\text{€}$. Οι περιορισμοί οφείλονται στις διαθέσιμες ποσότητες των πρώτων υλών, καθώς και στη ζήτηση των προϊόντων Β και Γ. Επομένως, το πρόβλημα είναι το παρακάτω.

$$\max z = 11,3x_1 + 12x_2 + 15x_3$$

$$2,0x_1 + 1,5x_2 + 1,0x_3 \leq 800$$

$$1,5x_1 + 2,0x_2 + 3,0x_3 \leq 400$$

$$0,8x_1 + 1,0x_2 \leq 430$$

$$3,0x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 \leq 650$$

$$x_2 \geq 15$$

$$x_3 \geq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Πρόβλημα προς επίλυση

1. Μια βιοτεχνία έχει τρία τμήματα, με τα οποία κατασκευάζει δυο τύπους επίπλων: τον τύπο Α και τον τύπο Β. Κάθε έπιπλο τύπου Α χρειάζεται 2 ώρες επεξεργασίας στο πρώτο τμήμα, 4 ώρες στο δεύτερο και 2 ώρες στο τρίτο. Κάθε έπιπλο τύπου Β χρειάζεται 2 ώρες επεξεργασίας στο πρώτο τμήμα, 2 ώρες στο δεύτερο και 3 ώρες στο τρίτο. Οι διαθέσιμες ώρες εργασίας είναι: 50 στο πρώτο τμήμα, 60 στο δεύτερο και 60 στο τρίτο. Από κάθε έπιπλο τύπου Α η βιοτεχνία κερδίζει 100€ και από κάθε έπιπλο τύπου Β 140€. Πόσα έπιπλα από κάθε τύπο πρέπει να κατασκευαστούν, ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος; Να διαμορφωθεί το μαθηματικό πρότυπο.
2. Μια επιχείρηση πρέπει να παραδώσει σε κάθε ένα από τα επόμενα δυο έτη 1.000 μονάδες ενός προϊόντος. Η μέγιστη δυνατή ετήσια παραγωγή της επιχείρησης είναι 1.500 μονάδες. Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι 25€, αλλά αναμένεται να αυξηθεί στο δεύτερο έτος κατά 5€. Τα προϊόντα που δεν πωλούνται εντός του έτους που παράγονται έχουν κόστος αποθήκευσης 2€ ανά μονάδα. Η επιχείρηση έχει ένα αρχικό απόθεμα 300 μονάδων προϊόντος και επιθυμεί να έχει στο τέλος του δεύτερου έτους ένα απόθεμα 500 μονάδων προϊόντος. Ποια πρέπει να είναι η παραγωγή κάθε έτους, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος; Να διαμορφωθεί το μαθηματικό πρότυπο.
3. Ένας επιπλοποιός επιθυμεί να προσδιορίσει πόσα τραπέζια, καρέκλες, γραφεία και βιβλιοθήκες πρέπει να κατασκευάσει, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Τα έπιπλα απαιτούν δυο τύπους ξύλου και ο επιπλοποιός έχει στην αποθήκη του 1.500m του πρώτου τύπου και 1.000m του δεύτερου. Οι προβλεπόμενες πωλήσεις και οι υπάρχουσες παραγγελίες απαιτούν την κατασκευή τουλάχιστον: 40 τραπέζιων, 130 καρεκλών, 30 γραφείων, και το πολύ 10 βιβλιοθηκών. Κάθε τραπέζι, καρέκλα, γραφείο και βιβλιοθήκη απαιτεί 5, 1, 9 και 12m αντίστοιχα, από το πρώτο ξύλο, και 2, 3, 4 και 1m αντίστοιχα, από το δεύτερο. Ο επιπλοποιός δεν επιθυμεί να δουλέψει πάνω από 800 ώρες συνολικά κι έχει υπολογίσει ότι απαιτούνται 3 ώρες για ένα τραπέζι, 2 για μια καρέκλα, 5 για ένα γραφείο και 10 για μια βιβλιοθήκη. Αν το κέρδος από κάθε τραπέζι είναι 35€, από κάθε καρέκλα 15€, από κάθε γραφείο 44€ και από κάθε βιβλιοθήκη 29€, να υποδειχθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για την εύρεση του αριθμού τραπέζιων, καρεκλών, γραφείων και βιβλιοθηκών που πρέπει να κατασκευαστούν, ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Σε ένα ιδιωτικό κυνοτροφείο η τροφή που δίνεται στους σκύλους που φιλοξενοούνται εκεί παρασκευάζεται από τη μείξη δυο πολύ γνωστών προϊόντων του εμπορίου. Τα προϊόντα είναι το Α και Β και έχουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά.

Κεφάλαιο 2

Προϊόν	Κόστος/kg	Πρωτεΐνες (%)	Λίπος (%)
A	6	30	15
B	5	20	30

Υποθέτοντας ότι στην ημερήσια τροφή των σκύλων πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 1,5kg πρωτεΐνες και τουλάχιστον 0,9kg λίπους, να υποδειχθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό των ποσοτήτων των προϊόντων A και B που ελαχιστοποιούν το κόστος του κυνοτροφείου.

5. Μια βιοτεχνία χρωμάτων κατασκευάζει δυο είδη χρωμάτων, πλαστικά και υδροχρώματα, τα οποία στη συνέχεια διαθέτει χονδρικώς στην αγορά. Η παραγωγή τους γίνεται σχεδόν αποκλειστικά από τα υλικά A και B σύμφωνα με τα παρακάτω (ημερήσια) δεδομένα.

Υλικά	Τόνοι υλικού ανά τόνο χρώματος		Διαθέσιμες ποσότητες υλικών
	Πλαστικό	Υδροχρώμα	
A	1	2	6
B	2	1	8

Μια έρευνα αγοράς που πραγματοποιήθηκε για λογαριασμό της βιοτεχνίας έδειξε ότι οι ημερήσιες απαιτήσεις σε υδροχρώμα δεν ξεπερνούν κατά έναν τόνο τις απαιτήσεις σε πλαστικά χρώματα και ότι η μέγιστη ημερήσια ζήτηση του υδροχρώματος περιορίζεται στους δυο τόνους. Αν το κέρδος ανά τόνο πλαστικού χρώματος ανέρχεται στα 900€ και ανά τόνο υδροχρώματος στα 600€, να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό των ημερήσιων παραγόμενων ποσοτήτων για κάθε είδος χρώματος, ώστε να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά κέρδη της βιοτεχνίας.

6. Μια αγροτική επιχείρηση επιθυμεί να παρασκευάσει για τις καλλιέργειες της ένα νέο λίπασμα, αναμειγνύοντας προϊόντα που περιέχουν σε διαφορετικές αναλογίες ποτάσα, άζωτο και αμμωνιακό άλας. Η συνολική ποσότητα του λιπάσματος πρέπει να περιέχει τουλάχιστον: 80 τόνους ποτάσα, 20 τόνους αζώτου και 8 τόνους αμμωνιακού άλατος. Ο βασικός προμηθευτής της επιχείρησης διαθέτει δυο προϊόντα: το A και το B, με τιμές 120 και 180€ ανά μονάδα βάρους αντίστοιχα. Κάθε μονάδα βάρους είναι ίση περίπου με δυο τόνους. Μία μονάδα βάρους του προϊόντος A περιέχει 1,2 τόνους ποτάσα, 0,2 τόνους άζωτο και 0,1 τόνους αμμωνιακό άλας. Οι αντίστοιχες περιεκτικότητες για το προϊόν B είναι: 0,8 τόνους, 0,4 τόνους και 0,16 τόνους. Να κατασκευαστεί το μαθηματικό πρότυπο που να δείχνει την ποσότητα που πρέπει να αγοραστεί από κάθε προϊόν, ώστε η επιχείρηση να παρασκευάσει το απαιτούμενο λίπασμα με το ελάχιστο δυνατό κόστος.
7. Ένας επενδυτής διαθέτει 25.000€ για τη δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από δυο μετοχές: τη μετοχή A και τη μετοχή B. Η μετοχή A έχει τιμή

Να διαμορφωθούν σε τυπική μορφή τα παρακάτω προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ & x_1 - x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad & \min z = 4x_1 + x_2 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad & \min z = 4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad & \min z = -x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 20 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) \quad & \min z = 3x_1 + 4x_2 \\ & 5x_1 - x_2 \leq 20 \\ & x_1 - x_2 = 8 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau) \quad & \max z = x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + 2x_2 = -12 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta) \quad & \min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 40 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 30 \\ & x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq -50 \\ & x_2 + x_3 \geq 25 \\ & x_1 \leq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$