

## Ασκήσεις γραφικής επίλυσης

### Άσκηση 1- (Παράδειγμα 3.4 βιβλίου)

Σε ένα πτηνοτροφείο χρησιμοποιείται για την καθημερινή διατροφή ενός συνόλου πτηνών ένα μείγμα αποτελούμενο από δύο είδη δημητριακών: το είδος Α και το είδος Β. Το μείγμα πρέπει να περιέχει **τουλάχιστον**: 20 μονάδες υδατάνθρακες, 15 μονάδες πρωτεΐνες και 6 μονάδες βιταμίνες. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται το περιεχόμενο ανά kg σε υδατάνθρακες, πρωτεΐνες και βιταμίνες των δημητριακών Α και Β, όπως και το κόστος τους. Πόσα kg από κάθε δημητριακό πρέπει να χρησιμοποιούνται καθημερινά στο μείγμα, ώστε να καλύπτονται οι διατροφικές ανάγκες των πτηνών με το **ελάχιστο δυνατό κόστος**;

|               | <b>A</b>    | <b>B</b>    |
|---------------|-------------|-------------|
| Υδατάνθρακες  | 4           | 5           |
| Πρωτεΐνες     | 4           | 3           |
| Βιταμίνες     | 1           | 2           |
| <b>Κόστος</b> | <b>0,15</b> | <b>0,12</b> |

### Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

$\min z = 0,15x_1 + 0,12x_2$  Αντικειμενική συνάρτηση

$4x_1 + 5x_2 \geq 20$  (1) Γραμμικός περιορισμός

$4x_1 + 3x_2 \geq 15$  (2) Γραμμικός περιορισμός

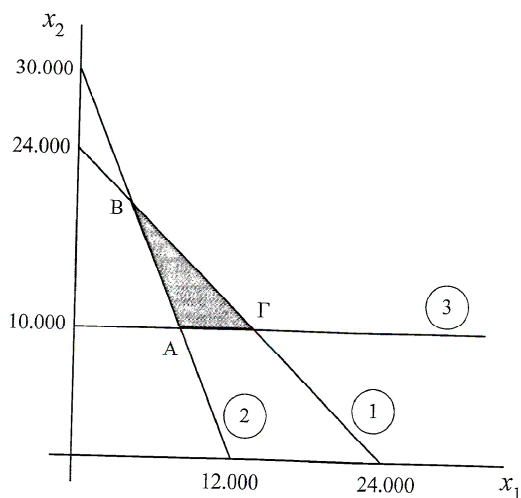
$x_1 + 2x_2 \geq 6$  (3) Γραμμικός περιορισμός

$x_1, x_2 \geq 0$  (4) Περιορισμός μη αρνητικότητας

### Εύρεση σημείων για το σχεδιασμό των τριών (3) ευθειών.

|          | 1 <sup>ο</sup> σημείο |         |       | 2 <sup>ο</sup> σημείο |         |           |
|----------|-----------------------|---------|-------|-----------------------|---------|-----------|
| Ευθεία 1 | $x_1=0$               | $x_2=4$ | (0,4) | $x_1=5$               | $x_2=0$ | (5,0)     |
| Ευθεία 2 | $x_1=0$               | $x_2=5$ | (0,5) | $x_1=3,66$            | $x_2=0$ | (3,67, 0) |
| Ευθεία 3 | $x_1=0$               | $x_2=3$ | (0,3) | $x_1=6$               | $x_2=0$ | (6,0)     |

### Σχεδιασμός εφικτής περιοχής



Σχήμα 3.6: Εφικτή περιοχή προβλήματος 3

### Κορυφές πολυγώνου εφικτής περιοχής

| Κορυφή | Συντεταγμένες | Ευθείες που τέμνονται στο σημείο | Τιμή της z           |
|--------|---------------|----------------------------------|----------------------|
| A      | (0,5)         | (2)                              | 0,60                 |
| B      | (1,88 , 2,5)  | (1),(2)                          | <b>0,58</b> ελάχιστο |
| Γ      | (3,33, 1,33)  | (1),(3)                          | 0,66                 |
| Δ      | (6,0)         | (3)                              | 0,90                 |

### Μαθηματική επίλυση

Εξισώσεις ευθειών που τέμνονται στο σημείο B:

$$4x_1 + 5x_2 = 20 \quad (1)$$

$$4x_1 + 3x_2 = 15 \quad (2)$$

Αφαιρούμε την (2) από την (1) και γίνεται:  $2x_2 = 5$ , επομένως  $x_2 = 2,5$ .

Αντικαθιστούμε στην (2):  $4x_1 + (3 \cdot 2,5) = 15$ , επομένως  $4x_1 = 7,5$ , επομένως  $x_1 = 1,88$ .

Βέλτιστη λύση:  $x_1 = 1,88$ ,  $x_2 = 2,5$ .

Βέλτιστη τιμή:  $z = 0,58$

## Άσκηση 2

Να βρεθούν η εφικτή περιοχή και η βέλτιστη λύση του παρακάτω προβλήματος:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

με τους περιορισμούς δομής

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$

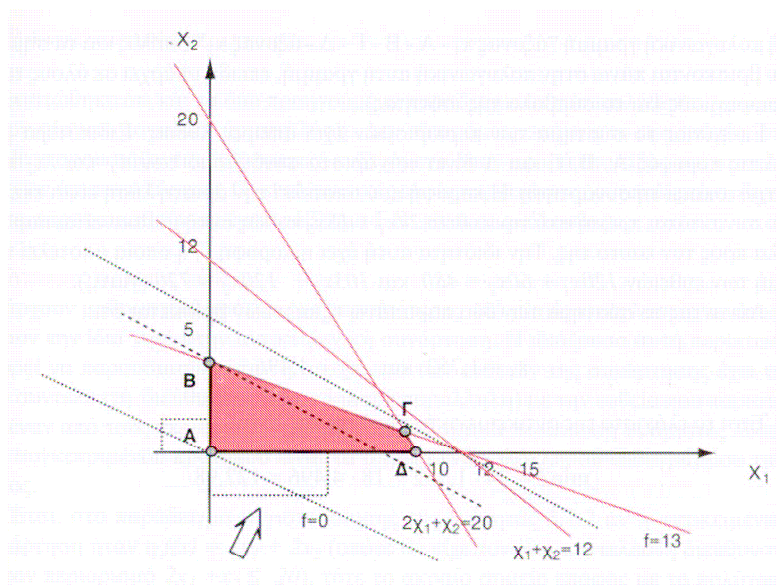
και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Εύρεση σημείων για το σχεδιασμό των ευθειών

|          | 1 <sup>ο</sup> σημείο |          |        | 2 <sup>ο</sup> σημείο |         |         |
|----------|-----------------------|----------|--------|-----------------------|---------|---------|
| Ευθεία 1 | $x_1=0$               | $x_2=20$ | (0,20) | $x_1=10$              | $x_2=0$ | (10,0)  |
| Ευθεία 2 | $x_1=0$               | $x_2=12$ | (0,12) | $x_1=12$              | $x_2=0$ | (12, 0) |
| Ευθεία 3 | $x_1=0$               | $x_2=5$  | (0,5)  | $x_1=15$              | $x_2=0$ | (15,0)  |

Σχεδιασμός εφικτής περιοχής



Κορυφές πολυγώνου εφικτής περιοχής

| Κορυφή | Συντεταγμένες | Ευθείες που τέμνονται στο σημείο | Τιμή της z |
|--------|---------------|----------------------------------|------------|
| A      | (0,0)         | -                                | 0          |
| B      | (0,5)         | (3)                              | 10         |

|   |        |         |                   |
|---|--------|---------|-------------------|
| Γ | (9,2)  | (1),(3) | 13 <b>μέγιστο</b> |
| Δ | (10,0) | (1)     | 10                |

### Μαθηματική επίλυση

Εξισώσεις ευθειών που τέμνονται στο σημείο Γ

$$2x_1 + x_2 = 20 \quad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 = 15 \quad (3)$$

Προσθέτουμε την (3) στην (1), αφού την έχουμε πολλαπλασιάσει με  $-2$ : Δηλαδή η (3) γίνεται :  $-2x_1 - 6x_2 = -30$  και προσθέτοντας στην (1) έχουμε:  $-5x_2 = -10$ , επομένως  $x_2 = -10/-5 = 2$ .

Αντικαθιστούμε στην (1):  $2x_1 + 2 = 20$ , επομένως  $2x_1 = 18$ , επομένως  $x_1 = 9$ .

Βέλτιστη λύση:  $x_1=9, x_2=2$ .

Βέλτιστη τιμή:  $z=13$ .

### **Άσκηση 3**

Να βρεθούν η εφικτή περιοχή και η βέλτιστη λύση του παρακάτω προβλήματος:

#### Μαθηματική διατύπωση

$$\min z(x) = 24x_1 + 18x_2$$

με τους περιορισμούς δομής

$$120x_1 + 60x_2 \geq 480$$

$$56x_1 + 112x_2 \geq 440$$

$$103x_1 + 120x_2 \geq 720$$

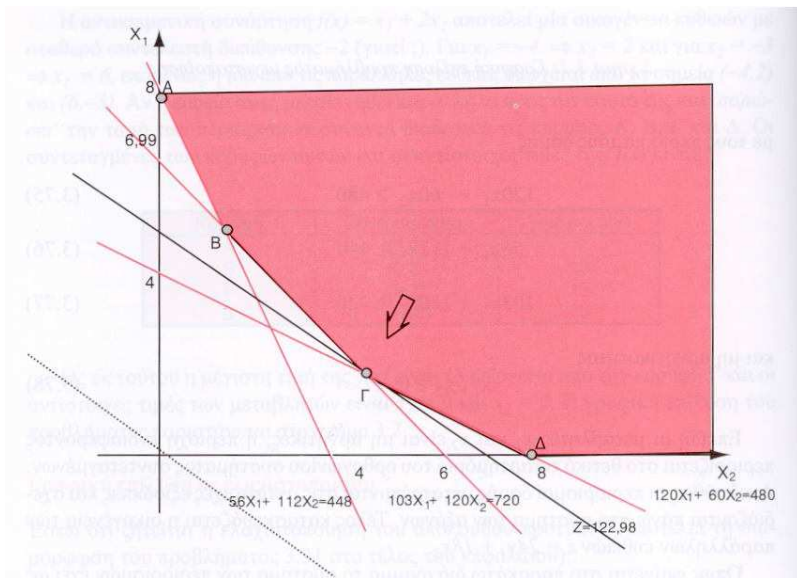
και περιορισμούς μη αρνητικότητας

$$x_1, x_2 \geq 0$$

#### Εύρεση σημείων για το σχεδιασμό των ευθειών

|          | Σημείο 1 <sup>ο</sup> |            |           | Σημείο 2 <sup>ο</sup> |         |            |
|----------|-----------------------|------------|-----------|-----------------------|---------|------------|
| Ευθεία 1 | $x_1=0$               | $x_2=8$    | (0,8)     | $x_1=4$               | $x_2=0$ | (4,0)      |
| Ευθεία 2 | $x_1=0$               | $x_2=3,93$ | (0, 3,93) | $x_1=7,85$            | $x_2=0$ | (7,85 , 0) |
| Ευθεία 3 | $x_1=0$               | $x_2=6$    | (0,6)     | $x_1=6,99$            | $x_2=0$ | (6,99 , 0) |

#### Σχεδιασμός εφικτής περιοχής



### Κορυφές πολυγώνου εφικτής περιοχής

| Κορυφή | Συντεταγμένες  | Ευθείες που τέμνονται στο σημείο | Τιμή της z             |
|--------|----------------|----------------------------------|------------------------|
| A      | (0,8)          | 1                                | 144                    |
| B      | (1,75 , 4,49 ) | 1,3                              | 122,98 <b>ελάχιστο</b> |
| Γ      | (4 , 2)        | 2, 3                             | 132                    |
| Δ      | (8,0)          | 1                                | 192                    |

### Μαθηματική επίλυση

Εξισώσεις ευθειών που τέμνονται στο σημείο B:

$$120x_1 + 60x_2 = 480 \quad (1)$$

$$103x_1 + 120x_2 = 720 \quad (3)$$

Προσθέτουμε την (1) στην (3), αφού την έχουμε πολλαπλασιάσει με  $-2$ : Δηλαδή η (1) γίνεται :  $-240x_1 - 120x_2 = -960$ . Και προσθέτοντας στην (3) έχουμε:  $-137x_1 = -240$ , επομένως  $x_1 = -240/-137 = 1,75$ .

Αντικαθιστούμε στην (3):  $(103 * 1,75) + 120x_2 = 720$ , επομένως  $120x_2 = 539,75$ , επομένως  $x_2 = 4,49$ .

Βέλτιστη λύση:  $x_1=1,75$ ,  $x_2=4,49$ .

Βέλτιστη τιμή:  $z=122.98$ .

#### Άσκηση 4

Μια από τις εταιρείες γάλακτος στην προσπάθειά της να διεισδύσει στην αγορά του παγωτού πολυτελείας επενδύει σε μια μικρή πιλοτική γραμμή παραγωγής δύο προϊόντων της κατηγορίας αυτής. Πρόκειται για οικογενειακές συσκευασίες παγωτού κρέμας με άρωμα πραγματικής βανίλιας (προϊόν Α) και παγωτού με πραγματική σοκολάτα (προϊόν Β). Αν και είναι φανερό ότι η παραγωγική διαδικασία είναι αρκετά πολύπλοκη, θα θεωρήσουμε εδώ ότι για την παραγωγή αυτών των προϊόντων η εταιρεία δεσμεύει ανά εβδομάδα ένα μικρό μέρος των παραγωγικών της συντελεστών: γάλα (βασική πρώτη ύλη), εργασία (παραλαβή πρώτων υλών, ποιοτικός έλεγχος, συσκευασία, διανομή, κτλ.), καθώς επίσης και διαθεσιμότητα στη μονάδας παστερίωσης και ψύξης.

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τα δεδομένα του προβλήματος που έχουν προσδιοριστεί κι αφορούν την παραγωγή ενός τεμαχίου του κάθε προϊόντος:

|                | Προϊόν Α | Προϊόν Β | Διαθεσιμότητα |
|----------------|----------|----------|---------------|
| Γάλα           | 1        | 1        | 550           |
| Εργασία        | 1        | 3        | 1000          |
| Επεξεργασία    | 2        | 5        | 2000          |
| Μέγιστη ζήτηση | 400      | -        |               |
| Κέρδος/τεμάχιο | 150      | 200      |               |

#### Μαθηματική διατύπωση

maximize  $z = (150x_1 + 200x_2)$

κάτω από τους περιορισμούς:

$$x_1 + x_2 \leq 550 \text{ (διαθέσιμο γάλα, lit)} \quad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 1000 \text{ (χρόνος εργασίας, min)} \quad (2)$$

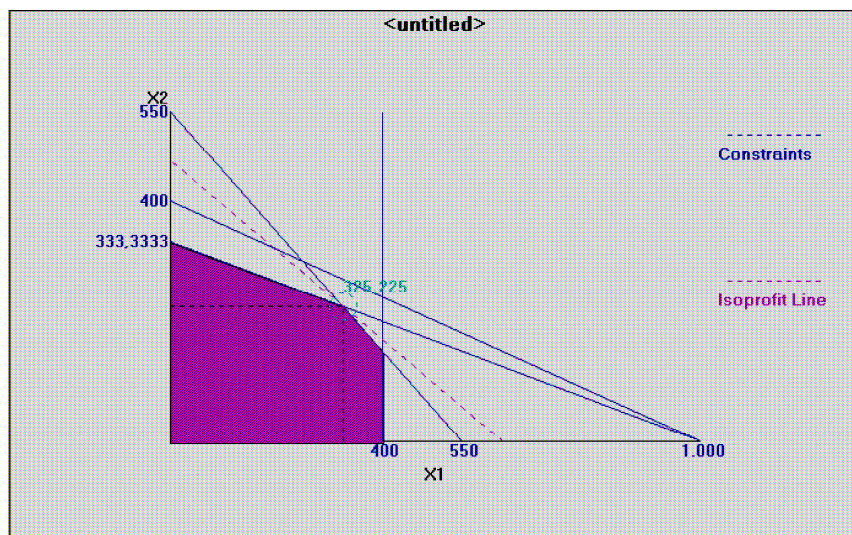
$$2x_1 + 5x_2 \leq 2000 \text{ (διαθεσιμότητα μονάδων, min)} \quad (3)$$

$$x_1 \leq 400 \text{ (ζήτηση αγοράς)} \quad (4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

#### Εύρεση σημείων για το σχεδιασμό των ευθειών

|          | Σημείο 1° |              |             | Σημείο 2°  |         |            |
|----------|-----------|--------------|-------------|------------|---------|------------|
| Ευθεία 1 | $x_1=0$   | $x_2=550$    | (0,550)     | $x_1=550$  | $x_2=0$ | (550,0)    |
| Ευθεία 2 | $x_1=0$   | $x_2=333,33$ | (0, 333,33) | $x_1=1000$ | $x_2=0$ | (1000 , 0) |
| Ευθεία 3 | $x_1=0$   | $x_2=400$    | (0,400)     | $x_1=1000$ | $x_2=0$ | (1000 , 0) |
| Ευθεία 4 | $x_1=400$ | $x_2=0$      | (400,0)     |            |         |            |



### Μαθηματική επίλυση

Εξισώσεις ευθειών που τέμνονται στο σημείο Δ:

$$x_1 + x_2 = 550 \quad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 = 1000 \quad (2)$$

Αφαιρούμε την (1) από την (2), οπότε έχουμε:  $2x_2 = 450$ , επομένως  $x_2 = 450/2 = 225$ .

Αντικαθιστούμε στην (1):  $x_1 + 225 = 550$ , επομένως  $x_1 = 550 - 225$ , επομένως  $x_1 = 325$ .

### Κορυφές πολυγώνου εφικτής περιοχής

| Κορυφή | Συντεταγμένες      | Ευθείες που τέμνονται στο σημείο | Τιμή της z   |
|--------|--------------------|----------------------------------|--------------|
| A      | (0,0)              | -                                | 0            |
| B      | (400 , 0 )         | (4)                              | 60000        |
| Γ      | (400 , 150)        | (1), (4)                         | 90000        |
| Δ      | <b>(325 , 225)</b> | <b>(1), (2)</b>                  | <b>93750</b> |
| E      | (0, 333,33)        | (2)                              | 66666,66     |

### Άσκηση 5

Η κατασκευαστική εταιρεία 'ΕΜΕΙΣ' προγραμματίζει μια διαφημιστική εκστρατεία για να προωθήσει τις πωλήσεις των εξοχικών της. Η προβολή θα γίνει από την τηλεόραση, αγοράζοντας διαφημιστικό χρόνο για τη μετάδοση ενός συγκεκριμένου μηνύματος σε δύο διαφημιστικές ζώνες: την πρωινή και τη βραδινή.

Το κόστος προβολής του μηνύματος στην πρωινή ζώνη ανέρχεται σε 1,500,000 χ.μ. ενώ στη βραδινή σε 2,500,000.

Έχει υπολογιστεί ότι ένα μήνυμα που προβάλλεται το πρωί το βλέπουν (κατά μέσο όρο) 300,000 γυναίκες και μόνον 50,000 άντρες, ενώ ένα μήνυμα που προβάλλεται στη βραδινή ζώνη το παρακολουθούν κατά μέσο όρο 200,000 γυναίκες και 250,000 άντρες.

Η κατασκευαστική εταιρεία (για το διάστημα που συμφώνησε να γίνεται η διαφημιστική καμπάνια) θα ήθελε, να δουν τα μηνύματα αυτά τουλάχιστον 15,000,000 γυναίκες και τουλάχιστον 9,000,000 άντρες. Επιθυμητό είναι επίσης, οι προβολές τουλάχιστον 20 διαφημίσεων να γίνουν στη βραδινή ζώνη.

**Το ερώτημα είναι πόσα μηνύματα θα πρέπει να μπουν σε κάθε ζώνη ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος.**

$x_1$  τα διαφημιστικά μηνύματα που θα προβληθούν το πρωί

$x_2$  τα διαφημιστικά μηνύματα που θα προβληθούν το βράδυ

Περιορισμοί (τίθεται  $1.000.000=1$ )

i) τουλάχιστον 15,000,000 γυναίκες να δουν το μήνυμα:

(σύνολο γυναικών που θα δουν το μήνυμα)  $\geq$  (ελάχιστη απαίτηση για γυναίκες τηλεθεατές)

(σύνολο γυναικών που θα δουν το μήνυμα στην πρωινή ζώνη) + (σύνολο γυναικών που θα δουν το μήνυμα στη βραδινή ζώνη)  $\geq$  (ελάχιστη απαίτηση για γυναίκες τηλεθεατές)  $300,000 x_1 + 200,000 x_2 \geq 15,000,000 \Rightarrow 0.3x_1 + 0.2x_2 \geq 15$ .

ii) τουλάχιστον 9,000,000 άντρες να δουν το μήνυμα:  $50,000 x_1 + 250,000 x_2 \geq 9,000,000 \Rightarrow 0.05x_1 + 0.25x_2 \geq 9$ .

iii) τουλάχιστον 20 μηνύματα να γίνουν στη βραδινή ζώνη:  $x_2 \geq 20$ .

iv) Έχουμε επιπλέον και τον (λογικό) περιορισμό της μη αρνητικότητας των μεταβλητών:  $x_1, x_2 \geq 0$ .

Μαθηματική διατύπωση

minimize  $z = (1.5x_1 + 2.5x_2)$

κάτω από τους περιορισμούς:

$0.3x_1 + 0.2x_2 \geq 15$  (απαίτηση για τηλεθέαση σε γυναίκ., εκατομ.) (1)

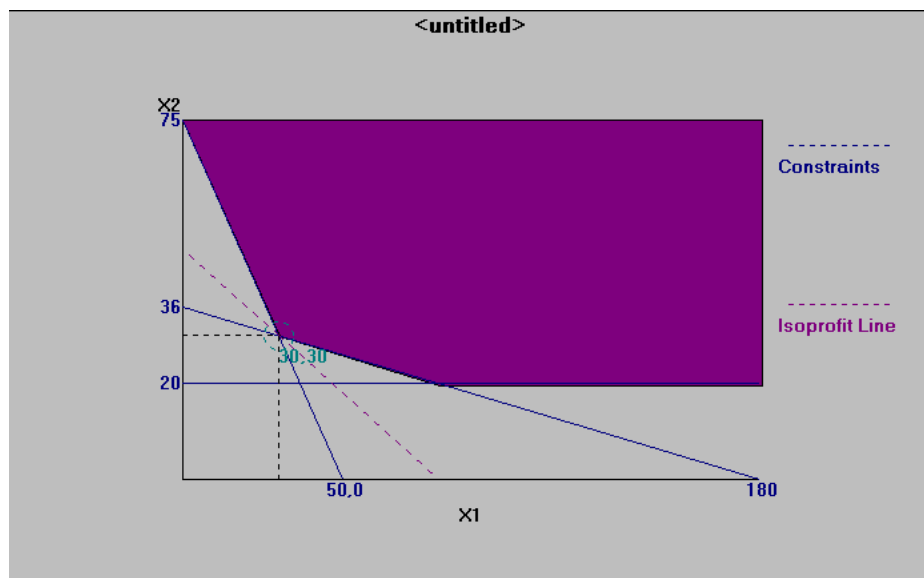
$0.05x_1 + 0.25x_2 \geq 9$  (απαίτηση για τηλεθέαση σε άντρες, εκατομ.) (2)

$x_2 \geq 20$  (απαίτηση για μηνύματα στη βραδινή ζώνη) (3)

$x_1, x_2 \geq 0$

Εύρεση σημείων για το σχεδιασμό των ευθειών

|          | Σημείο 1° |          |         | Σημείο 2° |         |           |
|----------|-----------|----------|---------|-----------|---------|-----------|
| Ευθεία 1 | $x_1=0$   | $x_2=75$ | (0,75)  | $x_1=50$  | $x_2=0$ | (50,0)    |
| Ευθεία 2 | $x_1=0$   | $x_2=36$ | (0, 36) | $x_1=180$ | $x_2=0$ | (180 , 0) |
| Ευθεία 3 | $x_1=0$   | $x_2=20$ | (0,20)  |           |         |           |



### Μαθηματική επίλυση

Εξισώσεις ευθειών που τέμνονται στο σημείο B:

$$0.3x_1 + 0.2x_2 = 15 \quad (1)$$

$$0.05x_1 + 0.25x_2 = 9 \quad (2)$$

Προσθέτουμε την (2) στην (1), αφού την έχουμε πολλαπλασιάσει με  $-6$ : Δηλαδή η (2) γίνεται :  $-0,3x_1 - 1,5x_2 = -54$ . Και προσθέτοντας στην (1) έχουμε:  $-1,3x_2 = -39$ , επομένως  $x_2 = -39/-1,3 = 30$ .

Αντικαθιστούμε στην (1):  $0,3x_1 + (0,2 * 30) = 15$ , επομένως  $0,3x_1 = 9$ , επομένως  $x_1 = 30$ .

### Κορυφές πολυγώνου εφικτής περιοχής

| Κορυφή   | Συντεταγμένες    | Ευθείες που τέμνονται στο σημείο | Τιμή της z                 |
|----------|------------------|----------------------------------|----------------------------|
| A        | (0 , 75)         | (1)                              | 187,5                      |
| <b>B</b> | <b>(30 , 30)</b> | <b>(1), (2)</b>                  | <b>120</b> <b>ελάχιστο</b> |
| Γ        | (80 , 20 )       | (2)                              | 170                        |