

Άλυτες Ασκήσεις ΓΠ

A. Μέρη ενός προβλήματος ΓΠ - Λυμένο πρόβλημα 1 , Άσκηση 1.

B. Τυπική μορφή (κανόνες μετατροπής, προβλήματα μετατροπής) - Λυμένο πρόβλημα 2 , Ασκήσεις 2,3,4,5.

Γ. Διατύπωση μαθηματικού προβλήματος (πίνακας δεδομένων, μαθηματική διατύπωση προβλήματος)-
Λυμένο πρόβλημα 3 , Ασκήσεις 6,7,8.

A. Μέρη ενός προβλήματος ΓΠ

Λυμένο Πρόβλημα 1. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα Γ.Π.

$\min z=3x-5y,$	...Αντ.συνάρτηση.....
$2x+3y \leq 48$	...Γραμ.περιορισμός.....
$2x+2y \leq 18$	...Γραμ.περιορισμός.....
$x,y \geq 0$	...Περιορισμός μη αρνητικότητας...

Μεταβλητές απόφασης είναι οι x,y .

Άσκηση 1. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα Γ.Π.

$\max z=6x+5y,$	
$4x+3y \leq 48$	
$x+2y \leq 18$	
$x,y \geq 0$	

Ποιες είναι η αντικειμενική συνάρτηση;

Συμπληρώστε στα παραπάνω κενά:

Ποιοι είναι οι γραμμικοί περιορισμοί;

Ποιοι οι περιορισμοί μη αρνητικότητας;

Επίσης ποιες είναι οι μεταβλητές απόφασης;.....

B. Τυπική μορφή

Κανόνες μετατροπής σε τυπική μορφή

Μέρος του προβλήματος	Πρόβλημα	Μετατροπή
Αντικειμενική συνάρτηση	Ελαχιστοποίηση: π.χ. $\min z = 2x_1 + 4x_2$	γίνεται: $-\max z = -2x_1 - 4x_2$
Γραμμικός περιορισμός	Υπάρχει $\geq$	Γίνεται εξίσωση, προσθέτοντας περιθώρια μεταβλητή: $-x_3$, όπου $x_3 \geq 0$
Γραμμικός περιορισμός	Υπάρχει $\leq$	Γίνεται εξίσωση, προσθέτοντας περιθώρια μεταβλητή: $+x_4$, όπου $x_4 \geq 0$
Γραμμικός περιορισμός	Η σταθερά του γραμμικού περιορισμού είναι αρνητικός αριθμός. Π.χ. $2x_1 + x_2 \leq -7$.	Αλλάζει το πρόσημο του συντελεστή και επίσης η φορά της ανίσωσης και όλα τα πρόσημα του α'μέρους. $-2x_1 - x_2 \geq 7$.
Περιορισμοί μη αρνητικότητας	Αρνητική τιμή μεταβλητής, Π.χ. $x_2 \leq 0$	θέτω $x_2 = -x'_2$, όπου $x'_2 \geq 0$
Περιορισμοί μη αρνητικότητας	Μεταβλητή $\in \mathbb{R}$, Π.χ. $x_2 \in \mathbb{R}$	θέτω $x_2 = x'_2 - x''_2$, όπου $x'_2, x''_2 \geq 0$

Προβλήματα μετατροπής σε τυπική μορφή:

Αρχικά κυκλώστε τα λάθη, και μετά μετατρέψτε τα προβλήματα στην τυπική μορφή. Προσοχή στις αντικαταστάσεις μεταβλητών που έχουν πάρει άλλες τιμές. Πχ. αν η x_2 αντικαταστάθηκε με την $-x'_2$, αυτό πρέπει να γίνει σε όλες τις εξισώσεις.

Λυμένο πρόβλημα 2

Αρχικό πρόβλημα	Διαδικασία μετατροπής σε τυπική μορφή				Τελική μορφή
$\max z = 6x_1 + 10x_2$	-	-	-	-	$\max z = 6x_1 + 10x_2$
$2x_1 + 4x_2 \geq -17$	$-2x_1 - 4x_2 \leq 17$	$-2x_1 - 4x_2 + x_4 = 17$	-		$-2x_1 - 4x_2 + x_4 = 17$
$6x_1 + 10x_2 \leq 25$	$6x_1 + 10x_2 + x_3 = 25$	-			$6x_1 + 10x_2 + x_3 = 25$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$			$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
Αντικατάσταση	(π.χ. $x_2 = -x'_2$)				

Άσκηση 2.

Αρχικό πρόβλημα	Διαδικασία μετατροπής σε τυπική μορφή			Τελική μορφή
$\min z = 3x_1 + 4x_2$				
$5x_1 + x_2 \leq 20$				
$x_1 + x_2 \leq 8$				
$x_1 \geq 2$				
$x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$				
Αντικατάσταση				

Άσκηση 3. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα ΓΠ, το οποίο πρέπει να γραφτεί σε τυπική μορφή:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ -2x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 + 5x_2 &\geq 8 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ερώτημα: Ποια είναι η σωστή τυπική μορφή;

A. $\max z = 3x_1 + 5x_2$ $-2x_1 - 3x_2 - x_3 = 5$ $2x_1 + 5x_2 - x_4 = 8$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$	B. $\max z = 3x_1 + 5x'_2$ $-2x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 + x_3 = 5$ $2x_1 + 5x'_2 - x_4 = 8$ $x_1, x'_2, x_3, x_4 \geq 0.$	Γ. $\max z = 3x_1 - 5x'_2$ $-2x_1 - 3x'_2 - x_3 = 5$ $2x_1 - 5x'_2 + 5x''_2 - x_4 = 8$ $x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4 \geq 0.$	Δ. $\max z = 3x_1 + 5x'_2 + 5x''_2$ $-2x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 + x_3 = 5$ $2x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 - x_4 = 8$ $x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4 \geq 0.$
--	---	--	--

Άσκηση 4. Ποια στοιχεία στο παρακάτω πρόβλημα “χαλάνε” την τυπική μορφή;

$$\min z = 3x_1 + 4x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \geq -5$$

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Α. Ελαχιστοποίηση αντικειμενικής, Ανισότητες γραμμικών περιορισμών, Μεταβλητές απόφασης αρνητικές, Σταθεροί όροι αρνητικοί.

Β. Ελαχιστοποίηση αντικειμενικής, Ανισότητες γραμμικών περιορισμών, Σταθεροί όροι αρνητικοί

Γ. Ελαχιστοποίηση αντικειμενικής, Μεταβλητές απόφασης αρνητικές, Σταθεροί όροι αρνητικοί.

Δ. Ανισότητες γραμμικών περιορισμών, Μεταβλητές απόφασης αρνητικές, Σταθεροί όροι αρνητικοί.

Άσκηση 5. Ποια στοιχεία στο παρακάτω πρόβλημα “χαλάνε” την τυπική μορφή;

$$\max z = 3x_1 - 4x_2$$

$$x_1 + x_2 = -5$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

Α. Ελαχιστοποίηση αντικειμενικής, Ανισότητες γραμμικών περιορισμών, Μεταβλητές απόφασης αρνητικές, Σταθεροί όροι αρνητικοί.

Β. Ελαχιστοποίηση αντικειμενικής, Ανισότητες γραμμικών περιορισμών, Σταθεροί όροι αρνητικοί.

Γ. Ελαχιστοποίηση αντικειμενικής, Μεταβλητές απόφασης αρνητικές, Σταθεροί όροι αρνητικοί.

Δ. Ανισότητες γραμμικών περιορισμών, Μεταβλητές απόφασης αρνητικές, Σταθεροί όροι αρνητικοί.

Γ. Διατύπωση μαθηματικού προβλήματος (πίνακας δεδομένων, μαθηματική διατύπωση προβλήματος)

Λυμένο Πρόβλημα 3

Μία επιχείρηση κατασκευάζει δύο νέα μοντέλα υπερσύγχρονων ηλεκτρικών ψυγείων, με αντίστοιχες ονομασίες “no frost” και “freezer”. Ο χώρος παραγωγής είναι χωρισμένος στο τμήμα μορφοποίησης (Μ) όπου διαμορφώνονται οι τελικές επιφάνειες, στο τμήμα συναρμολόγησης (Σ) και στο βαφείο (Β) όπου γίνονται τα τελικά φινιρίσματα και η βαφή των ψυγείων. Ο κάθε τύπος ψυγείου χρειάζεται διαφορετικό αριθμό εργατοωρών σε κάθε τμήμα. Έτσι η κάθε παρτίδα 12 ψυγείων “no frost” χρειάζεται 60, 80 και 20 εργατοώρες στα τμήματα Μ, Σ και Β αντίστοιχα, ενώ η αντίστοιχη παρτίδα 12 ψυγείων “freezer” 70, 85 και 10 εργατοώρες σε καθένα από τα τρία τμήματα αντίστοιχα. Η επάνδρωση των τμημάτων είναι τέτοια ώστε οι **εργατοώρες** που υπάρχουν σε καθένα από αυτά είναι 2400, 3000 και 600 αντίστοιχα κατά τη διάρκεια ενός εργάσιμου μήνα. Ζητείται ο σχεδιασμός ενός μηνιαίου προγράμματος παραγωγής, το οποίο θα **ελαχιστοποιεί** σε όλα τα τμήματα το **νεκρό χρόνο (χρόνος μη παραγωγικότητας)** του προσωπικού. Να γίνει ο πίνακας με τα δεδομένα.

Α. Μεταβλητές απόφασης: Αριθμοί παρτίδων των 2 τύπων ψυγείων : x_{NF} , x_F

Β. Περιορισμοί στις διαθέσιμες εργατοώρες κάθε τμήματος:

Μορφοποίηση (Μ): $60x_{NF} + 70x_F \leq 2400$

Συναρμολόγηση (Σ): $80x_{NF} + 85x_F \leq 3000$

Βαφείο (Β): $20x_{NF} + 10x_F \leq 600$

Εδώ η δυσκολία έγκειται στη δημιουργία της αντικειμενικής συνάρτησης, που στόχος της είναι η ελαχιστοποίηση του νεκρού χρόνου. Αρχικά ακολουθεί ο πίνακας με τα δεδομένα:

Τμήματα/ Ποσότητες	Προϊόντα				Διαθ.ώρες εργασίας(<=)
	A (x_{NF})	B (x_F)			
I (...Μ...)	60	70			2400
II (...Σ...)	80	85			3000
III (...Β.....)	20	10			600
Νεκ.χρόνος(min)	160	165			6000

Παρατηρώντας τη σύσταση των 3 περιορισμών που αναφέρονται στις ανθρωποώρες, προκύπτει ότι ο νεκρός χρόνος κάθε τμήματος αποτελεί τη διαφορά μεταξύ του δεξιού (διαθέσιμες εργατοώρες) και του αριστερού (πραγματικές εργατοώρες) μέλους του αντίστοιχου περιορισμού.

Κατά συνέπεια μπορούν να ορισθούν νέες μεταβλητές x_1 , x_2 , και x_3 που συμβολίζουν τους νεκρούς χρόνους των τμημάτων Μ, Σ και Β αντίστοιχα. Στην τελευταία γραμμή υπολογίζονται τα σύνολα πραγματοποιηθεισών ωρών (ανά τύπο ψυγείου) και των διαθέσιμων ωρών κάθε τμήματος.

Νεκροί χρόνοι τμημάτων:

Τμήμα	Περιορισμός	Περιορ. με νεκρούς χρόνους	
		Πραγμ.ώρες	Διαθέσιμες
Μ	$60x_{NF} + 70x_F \leq 2400$	$60x_{NF} + 70x_F + x_1 =$	2400
Σ	$80x_{NF} + 85x_F \leq 3000$	$80x_{NF} + 85x_F + x_2 =$	3000
Β	$20x_{NF} + 10x_F \leq 600$	$20x_{NF} + 10x_F + x_3 =$	600
Σύνολα		160 165	6000

Διαμόρφωση τελικού μοντέλου ΓΠ :

$$\min F = 6000 - 160x_{NF} - 165x_F$$

$$60x_{NF} + 70x_F \leq 2400$$

$$80x_{NF} + 85x_F \leq 3000$$

$$20x_{NF} + 10x_F \leq 600$$

Άσκηση 6 (επιλογή επενδυτικού προγράμματος)

Μια εταιρεία προτίθεται να επενδύσει 80 εκατομμύρια νομισματικές μονάδες σε κοινές και σε προνομιούχες μετοχές εταιρειών εισηγμένων στο χρηματιστήριο, καθώς και σε ομόλογα του δημοσίου.

Η αναμενόμενη ετήσια απόδοση των τριών αυτών τύπων επένδυσης είναι, κατά σειρά, 15%, 17% και 12%. Δεδομένου ότι οι επενδύσεις σε κοινές και σε προνομιούχες μετοχές κρίνονται υψηλού κινδύνου, η εταιρεία έχει αποφασίσει να επενδύσει σε τέτοιες μετοχές όχι παραπάνω από το 25% του επενδυόμενου συνολικά κεφαλαίου. Επιπλέον, το επενδυόμενο ποσό σε προνομιούχες μετοχές δεν πρέπει να υπερβαίνει το 75% της συνολικής επένδυσης σε μετοχές, ενώ τουλάχιστον το 20% του επενδυόμενου κεφαλαίου πρέπει να είναι σε ομόλογα του δημοσίου. Η εταιρεία ενδιαφέρεται να επιλέξει εκείνο το επενδυτικό σχήμα που **μεγιστοποιεί την απόδοση** του κεφαλαίου της.

A. Μεταβλητές απόφασης

Έστω x_1 , x_2 και x_3 , αντίστοιχα, το ποσό σε εκατομμύρια νομισματικές μονάδες, που θα επενδυθεί σε κοινές μετοχές, σε προνομιούχες μετοχές και σε ομόλογα του δημοσίου.

B. Αντικειμενική συνάρτηση

.....
.....

Γ. Γραμμικοί Περιορισμοί

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Δ. Πρότυπο δημιουργίας μαθηματικού μοντέλου

1. Μεταβλητές απόφασης: x_1 :....., x_2 :....., x_3 :....., x_4 :.....,

2. Αντικειμενική συνάρτηση: $\max/\min z = \dots x_1 +/\dots x_2 +/\dots x_3 +/\dots x_4$

3. Γραμμικοί περιορισμοί:

.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	<=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	>=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	<=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	>=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	<=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	>=	
.....											<=	
											>=	

4. Περιορισμοί μη αρνητικότητας: $x_1, x_2, \dots \geq 0$

Άσκηση 7 (σύνθεση ζωοτροφών – το πρόβλημα της δίαιτας)

Μια βιομηχανία παραγωγής ζωοτροφών πρέπει να παραδώσει σε κάποιον πελάτη της μια ποσότητα ζωοτροφής με περιεκτικότητα τουλάχιστον 21% σε πρωτεΐνες και 5% σε λιπαρά. Το Κριθάρι κοστίζει 800 ν.μ., η Βρώμη 850, το Σησάμι 1200 και το Καλαμποκάλευρο 1500 αντίστοιχα. Η περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες και σε λιπαρά των πρώτων υλών είναι: το Κριθάρι έχει περιεκτικότητα 12 σε πρωτεΐνες και 2 σε λιπαρά, Η Βρώμη έχει περιεκτικότητα 11 σε πρωτεΐνες και 5 σε λιπαρά, το Σησάμι έχει περιεκτικότητα 41 σε πρωτεΐνες και 11 σε λιπαρά, το Καλαμποκάλευρο έχει περιεκτικότητα 52 σε πρωτεΐνες και 1 σε λιπαρά. Το ζητούμενο είναι η **ελαχιστοποίηση του κόστους** των πρώτων υλών για την παραγωγή ζωοτροφής με την ελάχιστη επιθυμητή περιεκτικότητα σε πρωτεΐνες και λιπαρά. Επίσης να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας δεδομένων.

Θρεπτικά συστατικά	Περιεκτικότητα				Ελαχ.επιθ. Περιεκτικότητα ≥
	(x_1) Κριθάρι	(x_2) Βρώμη	(x_3) Σησάμι	(x_4) Καλαμποκάλευρο	
Πρωτεΐνες					
Λιπαρά					
Κόστος(min)					

A. Μεταβλητές απόφασης

Έστω x_1 , x_2 , x_3 και x_4 , αντίστοιχα, η ποσότητα κριθαριού, βρώμης, σησαμιού και καλαμποκάλευρου που θα περιέχεται σε ένα κιλό ζωοτροφής που πληροί τις διατροφικές απαιτήσεις.

B. Αντικειμενική συνάρτηση

.....

.....

Γ. Περιορισμοί

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Δ. Πρότυπο δημιουργίας μαθηματικού μοντέλου

1. Μεταβλητές απόφασης: x_1 :....., x_2 :....., x_3 :....., x_4 :.....,

2. Αντικειμενική συνάρτηση: $\max/\min z = \dots x_1 +/\dots x_2 +/\dots x_3 +/\dots x_4$

3. Γραμμικοί περιορισμοί:

.....	x_1	$+/-$		x_2	$+/-$		x_3	$+/-$		x_4	$\leq$	
.....	x_1	$+/-$		x_2	$+/-$		x_3	$+/-$		x_4	$\geq$	
.....	x_1	$+/-$		x_2	$+/-$		x_3	$+/-$		x_4	$\leq$	
.....	x_1	$+/-$		x_2	$+/-$		x_3	$+/-$		x_4	$\geq$	
.....	x_1	$+/-$		x_2	$+/-$		x_3	$+/-$		x_4	$\leq$	
.....	x_1	$+/-$		x_2	$+/-$		x_3	$+/-$		x_4	$\geq$	
.....											$\leq$	
.....											$\geq$	

4. Περιορισμοί μη αρνητικότητας: $x_1, x_2, \dots \geq 0$

Άσκηση 8

Μια ελεγκτική εταιρεία πραγματοποιεί δύο τύπους ελέγχου (A και B) σε καταστήματα τραπεζών. Η εταιρεία έχει 20 ελεγκτές που μπορούν να πραγματοποιήσουν ελέγχους τύπου A και 8 ελεγκτές τύπου B. Κάθε ελεγκτής τύπου A μπορεί να διεξάγει μηνιαίως 12 ελέγχους και κάθε ελεγκτής τύπου B, 6. Τον επόμενο μήνα η εταιρεία πρέπει να πραγματοποιήσει 180 ελέγχους, από τους οποίους τουλάχιστον 36 πρέπει να είναι τύπου B. Το κόστος ανά ελεγκτή τύπου A είναι 1000€ και τύπου B 2000€. Το πρόβλημα είναι πόσους ελεγκτές τύπου A και πόσους τύπου B πρέπει να επιλέξει ώστε να **ελαχιστοποιήσει το κόστος**. Να διατυπωθεί το πρότυπο γραμμικού προγραμματισμού.

A. Μεταβλητές απόφασης

Έστω : x_1 : αριθμός ελεγκτών για ελέγχους τύπου A και

x_2 : αριθμός ελεγκτών για ελέγχους τύπου B

B. Αντικειμενική συνάρτηση

.....

Γ. Γραμμικοί Περιορισμοί

.....

.....

.....

Δ. Πρότυπο δημιουργίας μαθηματικού μοντέλου

1. Μεταβλητές απόφασης: x_1 :....., x_2 :....., x_3 :....., x_4 :.....,

2. Αντικειμενική συνάρτηση: $\max/\min z = \dots x_1 +/\dots x_2 +/\dots x_3 +/\dots x_4$

3. Γραμμικοί περιορισμοί:

.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	<=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	>=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	<=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	>=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	<=	
.....	x_1	+/-		x_2	+/-		x_3	+/-		x_4	>=	

4. Περιορισμοί μη αρνητικότητας: $x_1, x_2, \dots \geq 0$