



Τεχνητή Νοημοσύνη

Αβεβαιότητα

Διδάσκων: Τσίπουρας Μάρκος
Εκπαιδευτικό Υλικό: Τσίπουρας Μάρκος
<http://ai.uom.gr/aima/>

Δράση υπό αβεβαιότητα (1/2)

- Οι πράκτορες σχεδόν ποτέ δεν έχουν πρόσβαση στην πλήρη αλήθεια σχετικά με το περιβάλλον τους.
- Κανένα πλάνο δεν εγγυάται ότι θα πετύχει το στόχο.
 - Πλάνο A_{90} : Ξεκίνα 90 λεπτά νωρίτερα για να προλάβεις την πτήση.
 - Το πλάνο A_{90} θα μας πάει στο αεροδρόμιο εγκαίρως, εφόσον το αυτοκίνητό μου δεν πάθει βλάβη ή μείνει από βενζίνη, δεν έχουμε εμείς ατύχημα, δεν υπάρξουν άλλα ατυχήματα σε κάποια από τις σήραγγες, το αεροπλάνο δεν φύγει νωρίτερα, και ..."
 - Πρόβλημα της εξειδίκευσης.

Δράση υπό αβεβαιότητα (2/2)

- Η ενδεδειγμένη δράση — η **ορθολογική απόφαση** (rational decision) — εξαρτάται τόσο από τη σχετική σημαντικότητα των διάφορων στόχων, όσο και από την πιθανότητα και το βαθμό κατά τον οποίο θα επιτευχθούν οι στόχοι αυτοί.

Χειρισμός της αβέβαιης γνώσης (1/2)

- Η διάγνωση — ανεξάρτητα από το αν αφορά την ιατρική, την επισκευή αυτοκινήτων, ή οτιδήποτε άλλο — είναι μια διεργασία που περιλαμβάνει σχεδόν πάντοτε αβεβαιότητα.
 - $\forall p \text{ Σύμπτωμα}(p, \text{Πονόδοντος}) \Rightarrow \text{Ασθένεια}(p, \text{Κοιλότητα})$
 - Λανθασμένος κανόνας
 - $\forall p \text{ Σύμπτωμα}(p, \text{Πονόδοντος}) \Rightarrow$
 $\text{Ασθένεια}(p, \text{Κοιλότητα}) \vee \text{Ασθένεια}(p, \text{Ουλίτιδα})$
 $\vee \text{Ασθένεια}(p, \text{Απόστημα}) \dots$
- Αιτιολογικοί κανόνες
 - $\forall p \text{ Ασθένεια}(p, \text{Κοιλότητα}) \Rightarrow \text{Σύμπτωμα}(p, \text{Πονόδοντος})$
 - Επίσης λανθασμένος κανόνας

Χειρισμός της αβέβαιης γνώσης (2/2)

- Η λογική αποτυγχάνει για τρεις κύριους λόγους:
 - Τεμπελιά
 - Θεωρητική άγνοια
 - Πρακτική άγνοια
- Βαθμός πεποίθησης: $[0,1]$
 - Διαφορετικός από τον βαθμό αληθείας (της ασαφούς λογικής)
- Θεωρία πιθανοτήτων
 - *Η πιθανότητα μας παρέχει έναν τρόπο για να **συναθροίσουμε** την αβεβαιότητα που προέρχεται από την τεμπελιά ή την άγνοιά μας.*
- Εκ των προτέρων πιθανότητες
- Μαρτυρίες (evidence), εκ των υστέρων πιθανότητες

Ορθολογικές αποφάσεις

- Αποτελέσματα
- Προτιμήσεις
- Θεωρία Χρησιμοτήτων
- Θεωρία αποφάσεων = θεωρία πιθανοτήτων + θεωρία χρησιμοτήτων
- Αρχή της **Μέγιστης Αναμενόμενης Χρησιμότητας**
 - Ένας πράκτορας είναι ορθολογικός αν και μόνο αν επιλέγει την ενέργεια που παρέχει την υψηλότερη αναμενόμενη χρησιμότητα, λαμβανόμενη ως το μέσο όρο για όλα τα δυνατά αποτελέσματα της ενέργειας.

Πράκτορας Θεωρίας Αποφάσεων

- Κατάσταση πεποίθησης: Αναπαράσταση των πιθανοτήτων για όλες τις δυνατές πραγματικές καταστάσεις του κόσμου.

function DT-Agent(*αίσθηση*) **returns** *μία ενέργεια*

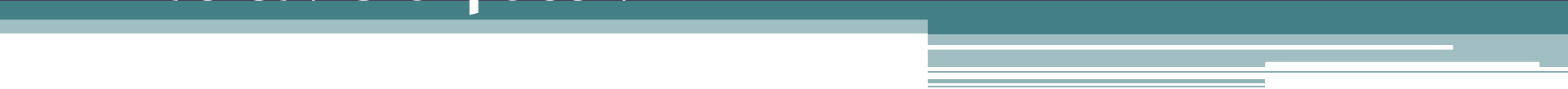
static: *κατάσταση_πεποίθησης, πιθανοτικές πεποιθήσεις για την
τρέχουσα κατάσταση του κόσμου
ενέργεια, η ενέργεια του πράκτορα*

*ενημερώνει την κατάσταση_πεποίθησης με βάση την ενέργεια και την αίσθηση
υπολογίζει τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων για τις ενέργειες,
με βάση τις περιγραφές ενεργειών και την τρέχουσα
κατάσταση_πεποίθησης*

*επιλέγει την ενέργεια με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη χρησιμότητα
με βάση τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων και
τις πληροφορίες χρησιμότητας*

return *ενέργεια*

Βασική Σημειογραφία Πιθανοτήτων



Προτάσεις (1/2)

- Τυχαία μεταβλητή
 - *Κοιλότητα*: Ο κάτω αριστερός φρονιμίτης μου έχει κοιλότητα
 - Θα γράφουμε πάντα τα ονόματα των τυχαίων μεταβλητών με κεφαλαίο το πρώτο γράμμα.
 - Παρόλα αυτά, θα χρησιμοποιούμε και πάλι πεζά γράμματα για τα ονόματα που αναπαριστούν αγνωστες τυχαίες μεταβλητές:
 - $P(a) = 1 - P(\neg a)$
- Πεδίο τιμών
 - π.χ. $\boxed{\equiv}$ αληθές, ψευδές $\boxed{\rightarrow}$
- Boolean, Διακριτές, Συνεχείς

Προτάσεις (2/2)

- Για την τυχαία μεταβλητή Κοιλότητα με πεδίο τιμών το $\{ \equiv \}$ αληθές, ψευδές $\{ \neg \}$:
 - Η πρόταση *Κοιλότητα* = αληθές θα γράφεται και ως *κοιλότητα*.
 - Η πρόταση *Κοιλότητα* = ψευδές θα γράφεται και ως $\neg$ κοιλότητα.
- Για την τυχαία μεταβλητή Καιρός με πεδίο τιμών το $\{ \equiv \}$ λιακάδα, βροχή, συννεφιά, χιόνι $\{ \neg \}$:
 - Η πρόταση *Καιρός* = χιόνι θα γράφεται και ως χιόνι.

Ατομικά Συμβάντα

- Το ατομικό συμβάν είναι ένας *πλήρης καθορισμός* της κατάστασης του κόσμου.
 - Για παράδειγμα, αν ο κόσμος μου συντίθεται μόνο από τις Boolean μεταβλητές *Κοιλότητα* και *Πονόδοντος*, τότε υπάρχουν μόνο τέσσερα διακριτά ατομικά συμβάντα.
 - Π.χ. η πρόταση $\text{Κοιλότητα} = \text{αληθές} \wedge \text{Πονόδοντος} = \text{ψευδές}$

Ιδιότητες ατομικών συμβάντων

- Είναι *αμοιβαία αποκλειόμενα*.
- Το σύνολό τους είναι *εξαντλητικό*.
- Οποιοδήποτε ατομικό συμβάν καλύπτει την αλήθεια ή το ψεύδος για κάθε πρόταση, είτε αυτή είναι απλή είτε σύνθετη.
- Οποιαδήποτε πρόταση είναι λογικά ισοδύναμη με τη διάζευξη όλων των ατομικών συμβάντων που συμπεραίνουν την αλήθεια αυτής της πρότασης.
 - Για παράδειγμα, το *κοιλότητα* είναι ισοδύναμο με το $\text{κοιλότητα} \wedge \text{πονόδοντος} \vee \text{κοιλότητα} \wedge \neg \text{πονόδοντος}$

Εκ των προτέρων πιθανότητα

- $P(\text{Κοιλότητα} = \text{αληθές}) = 0,1$ ή $P(\text{κοιλότητα}) = 0,1$
- $P(\text{Καιρός} = \text{λιακάδα}) = 0,7$
- $P(\text{Καιρός} = \text{βροχή}) = 0,2$
- $P(\text{Καιρός} = \text{συννεφιά}) = 0,08$
- $P(\text{Καιρός} = \text{χιόνι}) = 0,02$
- Κατανομή πιθανότητας
 - $\mathbf{P}(\text{Καιρός}) = [0,7, 0,2, 0,08, 0,02]$
- Συνδυασμένη κατανομή πιθανότητας
 - $\mathbf{P}(\text{Καιρός}, \text{Κοιλότητα})$
- Πλήρης συνδυασμένη κατανομή πιθανότητας

Πυκνότητα Πιθανότητας

- Έστω:
 - X = Αυριανή θερμοκρασία
- τότε, π.χ.:
 - $P(X = x) = U[18, 26](x)$ (ομοιόμορφη κατανομή)
- $P(X=20,5) = U[18, 26](20,5)=0,125/C$
- Υπολογίζουμε πιθανότητα για περιοχές τιμών.

Υπό συνθήκη πιθανότητα

- Π.χ.:

- $P(\text{κοιλότητα}|\text{πονόδοντος}) = 0,8$

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$

- Κανόνας γινομένου:

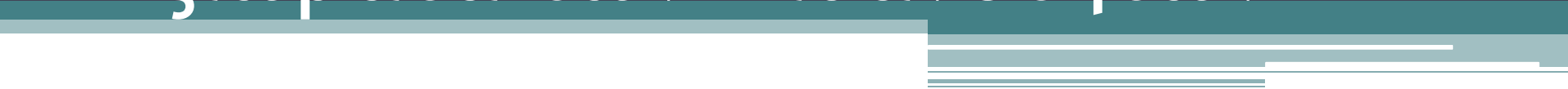
- $P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$

- Σε μορφή πίνακα:

- $P(X \wedge Y) = P(X|Y)P(Y)$

- ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν είναι πολλαπλασιασμός πινάκων!

Αξιώματα των πιθανοτήτων

A series of horizontal lines in teal and light blue colors, some solid and some dashed, extending across the width of the slide below the title.

Αξιώματα Kolmogorov (1/2)

- Andrei Kolmogorov: Ρώσος μαθηματικός (1903-1987)
- 1. Όλες οι πιθανότητες έχουν τιμή μεταξύ του 0 και του 1. Για οποιαδήποτε πρόταση α :
 - $0 \leq P(\alpha) \leq 1$.
- 2. Οι κατανάγκην αληθείς (δηλαδή έγκυρες) προτάσεις έχουν πιθανότητα 1, ενώ οι κατανάγκην ψευδείς (δηλαδή μη ικανοποιήσιμες) προτάσεις έχουν πιθανότητα 0:
 - $P(\alpha\lambda\eta\theta\acute{\epsilon}\varsigma) = 1 \quad P(\psi\epsilon\upsilon\delta\acute{\epsilon}\varsigma) = 0$.
- 3. Η πιθανότητα της διάζευξης δίνεται από τον τύπο:
 - $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$.

Αξιώματα Kolmogorov (2/2)

- Από το 3^ο αξίωμα προκύπτει ότι:
- Η πιθανότητα μιας πρότασης είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των ατομικών συμβάντων στα οποία ισχύει αυτή η πρόταση:

$$P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$$

- όπου $e(a)$ το σύνολο των ατομικών συμβάντων στα οποία ισχύει το a .
- Είναι παράλογο ένας πράκτορας να έχει μια κατάσταση πεποίθησης που παραβιάζει τα αξιώματα του Kolmogorov.

Συμπερασμοί Με Πλήρεις Συνδυασμένες Κατανομές Πιθανότητας

- Έστω ένα πεδίο που αποτελείται μόνο από τις τρεις Boolean μεταβλητές *Πονόδοντος*, *Κοιλότητα*, και *Λαβίδα*:

	πονόδοντος		¬πονόδοντος	
	λαβίδα	¬λαβίδα	λαβίδα	¬λαβίδα
κοιλότητα	0,108	0,012	0,072	0,008
¬κοιλότητα	0,016	0,064	0,144	0,576

- Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα οποιασδήποτε πρότασης (περιθώριος πιθανότητα)
 - π.χ. $P(\text{κοιλότητα} \vee \text{πονόδοντος}) = 0,108 + 0,012 + 0,072 + 0,008 + 0,016 + 0,064 = 0,28$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Από την πλήρη συνδυασμένη κατανομή πιθανότητας μπορούμε να πάρουμε κατανομές για λιγότερες μεταβλητές:

- Περιθωριοποίηση ή απαλοιφή με άθροιση:

$$P(Y) = \sum_z P(Y, z)$$

- ή ισοδύναμα:

$$P(Y) = \sum_z P(Y | z) P(z)$$

Υπολογισμός υπό-συνθήκη πιθανοτήτων

$$P(\text{κοιλότητα} | \text{πονόδοντος}) = \frac{P(\text{κοιλότητα} \wedge \text{πονόδοντος})}{P(\text{πονόδοντος})}$$

$$= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

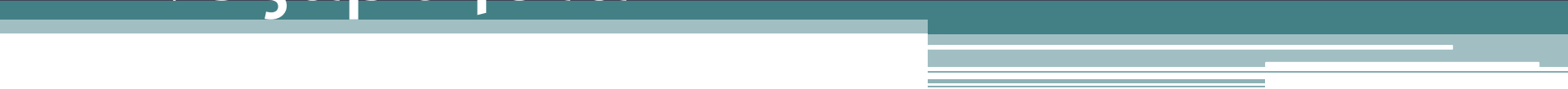
$$P(\neg \text{κοιλότητα} | \text{πονόδοντος}) = \frac{P(\neg \text{κοιλότητα} \wedge \text{πονόδοντος})}{P(\text{πονόδοντος})}$$

$$= \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

- Υπολογισμός με κανονικοποίηση:

- $P(\text{Κοιλότητα} | \text{πονόδοντος}) = \alpha P(\text{Κοιλότητα}, \text{πονόδοντος})$
 $= \alpha [P(\text{Κοιλότητα}, \text{πονόδοντος}, \text{λαβίδα}) + P(\text{Κοιλότητα}, \text{πονόδοντος}, \neg \text{λαβίδα})]$
 $= \alpha [\boxed{0.108, 0.016} + \boxed{0.012, 0.064}] = \alpha \boxed{0.12, 0.08}$
 $= \boxed{0.6, 0.4}$

Ανεξαρτησία



Ανεξαρτησία (1/3)

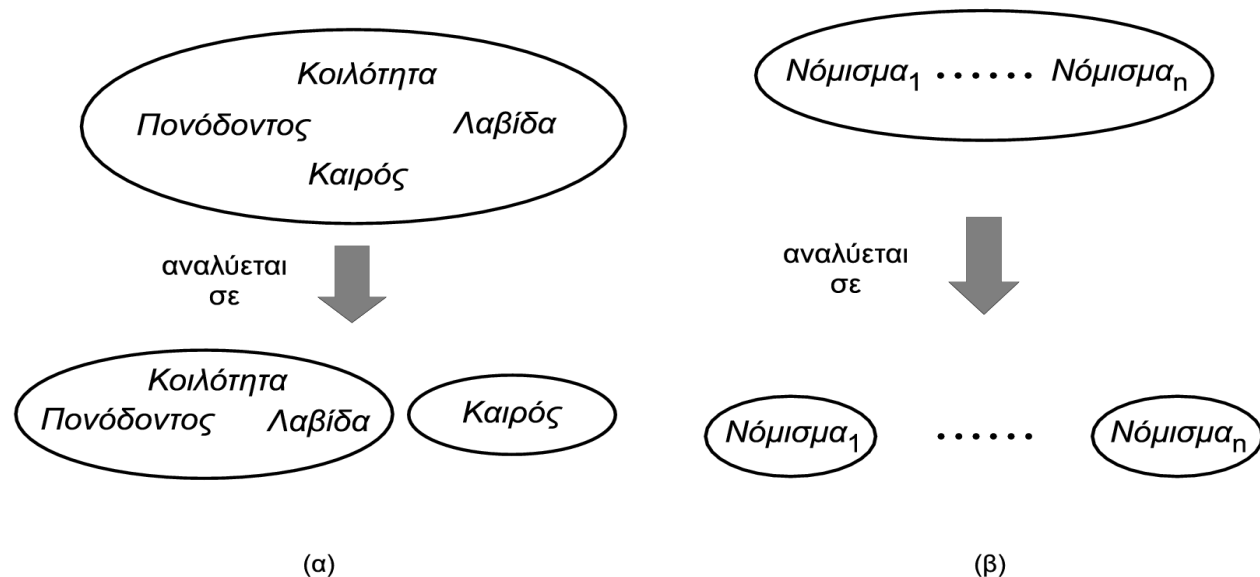
- Έστω ότι εμπλουτίζουμε το οδοντιατρικό μας πεδίο με την τυχαία μεταβλητή *Καιρός*.
- Η πλήρης κατανομή γίνεται...
 - $P(\text{Πονόδοντος}, \text{Λαβίδα}, \text{Κοιλότητα}, \text{Καιρός})$
- ...η οποία έχει 32 καταχωρίσεις (επειδή η μεταβλητή *Καιρός* έχει τέσσερις τιμές).
- Προφανώς δεν θεωρούμε ότι ο καιρός παίζει ρόλο στα οδοντιατρικά μας προβλήματα.

Ανεξαρτησία (2/3)

- Προσπαθούμε να υπολογίσουμε τις καταχωρήσεις της νέας πλήρους κατανομής:
 - $P(\text{πονόδοντος, λαβίδα, κοιλότητα, Καιρός} = \text{συννεφιά})$
 $= P(\text{Καιρός} = \text{συννεφιά} \mid \text{πονόδοντος, λαβίδα, κοιλότητα}) \cdot P(\text{πονόδοντος, λαβίδα, κοιλότητα}).$
- Θεωρούμε ότι:
 - $P(\text{Καιρός} = \text{συννεφιά} \mid \text{πονόδοντος, λαβίδα, κοιλότητα}) = P(\text{Καιρός} = \text{συννεφιά})$
- ΟΠΟΤΕ:
 - $P(\text{πονόδοντος, λαβίδα, κοιλότητα, Καιρός} = \text{συννεφιά})$
 $= P(\text{Καιρός} = \text{συννεφιά}) \cdot P(\text{πονόδοντος, λαβίδα, κοιλότητα})$
- Γενικότερα:
 - $\mathbf{P}(\text{Πονόδοντος, Λαβίδα, Κοιλότητα, Καιρός})$
 $= \mathbf{P}(\text{Πονόδοντος, Λαβίδα, Κοιλότητα}) \cdot \mathbf{P}(\text{Καιρός})$

Ανεξαρτησία (3/3)

- Ισοδύναμες δηλώσεις, για δύο μεταβλητές X και Y :
 - $\mathbf{P}(X|Y) = \mathbf{P}(X)$
 - $\mathbf{P}(Y|X) = P(Y)$
 - $\mathbf{P}(X, Y) = \mathbf{P}(X)\mathbf{P}(Y)$
- Η πλήρης κατανομή σπάει σε πολλές μικρότερες:



Ο Κανόνας του Bayes

A series of horizontal lines in teal and light blue colors, of varying lengths, extending from the left edge of the slide towards the right, positioned below the title.

Ο Κανόνας του Bayes

- Από τις σχέσεις:
 - $P(a \wedge b) = P(a|b)P(b)$
 - $P(a \wedge b) = P(b|a)P(a)$
- παίρνουμε:

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)}$$

- Γενικότερα:

$$\mathbf{P}(Y|X) = \frac{\mathbf{P}(X|Y)\mathbf{P}(Y)}{\mathbf{P}(X)}$$

$$\mathbf{P}(Y|X, \mathbf{e}) = \frac{\mathbf{P}(X|Y, \mathbf{e})\mathbf{P}(Y, \mathbf{e})}{\mathbf{P}(X, \mathbf{e})}$$

- Εναλλακτικά, με κανονικοποίηση:
 - $\mathbf{P}(Y|X) = \alpha \mathbf{P}(X|Y)\mathbf{P}(Y)$
- όπου η κανονικοποίηση γίνεται για όλες τις τιμές του Y .

Αιτιολογική και Διαγνωστική Γνώση

- Συνήθως προσπαθούμε να υπολογίσουμε «διαγνωστικές» πιθανότητες, ενώ γνωρίζουμε τις «αιτιολογικές».
- Η διαγνωστική γνώση είναι συχνά πιο εύθραυστη από την αιτιολογική γνώση.
- Παράδειγμα:
 - Αιτία: Μηνιγγίτιδα, $P(m)=1/50000$
 - Σύπτωμα: Δύσκαμπτος λαιμός, $P(s)=1/20$
 - $P(s|m)=0,5$

$$P(m | s) = \frac{P(s | m)P(m)}{P(s)} = \frac{0,5 \times 1/50000}{1/20} = 0,0002$$

Συνδυασμός μαρτυριών

- $\mathbf{P}(\text{Κοιλότητα} | \text{πονόδοντος} \wedge \text{λαβίδα}) =$
 $\alpha \cdot \mathbf{P}(\text{πονόδοντος} \wedge \text{λαβίδα} | \text{Κοιλότητα}) \cdot \mathbf{P}(\text{Κοιλότητα}).$
- Οι μεταβλητές *Πονόδοντος* και *Λαβίδα* δεν είναι ανεξάρτητες.
 - Εάν πονά το δόντι, τότε είναι περισσότερες οι πιθανότητες η λαβίδα να σκαλώσει πάνω του και αντιστρόφως.
- Οι μεταβλητές *Πονόδοντος* και *Λαβίδα* είναι όμως ανεξάρτητες με δεδομένη την τιμή της *Κοιλότητα* !
- $\mathbf{P}(\text{πονόδοντος} \wedge \text{λαβίδα} | \text{Κοιλότητα}) =$
 $\mathbf{P}(\text{πονόδοντος} | \text{Κοιλότητα}) \cdot \mathbf{P}(\text{λαβίδα} | \text{Κοιλότητα})$

Υπό συνθήκη ανεξαρτησία

- Οι μεταβλητές X και Y είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες, με δεδομένη την τιμή της Z :
 - $\mathbf{P}(X, Y|Z) = \mathbf{P}(X|Z) \cdot \mathbf{P}(Y|Z)$
 - $\mathbf{P}(X|Y, Z) = \mathbf{P}(X|Z)$ και $\mathbf{P}(Y|X, Z) = \mathbf{P}(Y|Z)$
- Κατά συνέπεια:
 - $\mathbf{P}(\text{Πονόδοντος}, \text{Λαβίδα}, \text{Κοιλότητα})$
 $= \mathbf{P}(\text{Πονόδοντος}, \text{Λαβίδα} | \text{Κοιλότητα}) \cdot$
 $\mathbf{P}(\text{Κοιλότητα})$
 $= \mathbf{P}(\text{Πονόδοντος} | \text{Κοιλότητα}) \cdot \mathbf{P}(\text{Λαβίδα} | \text{Κοιλότητα})$
 $\cdot \mathbf{P}(\text{Κοιλότητα})$

Απλοϊκό μοντέλο Bayes

- Προβλήματα στα οποία υπάρχει μια μεταβλητή Αίτιο και πολλές μεταβλητές Επίδρασης, οι οποίες είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες μεταξύ τους με δεδομένο το Αίτιο.
 - Ονομάζεται απλοϊκό γιατί χρησιμοποιείται ως παραδοχή και όταν δεν πρέπει...
- $\mathbf{P}(\text{Αιτία}, \text{Επίδραση}_1, \dots, \text{Επίδραση}_n)$
 $= \mathbf{P}(\text{Αιτία}) \cdot \prod_i (\text{Επίδραση}_i | \text{Αιτία}).$

Παράδειγμα: Ο κόσμος του wumpus

A series of horizontal lines in teal and light blue colors, of varying lengths, extending from the left edge of the slide towards the right, positioned below the title.

Το πεδίο

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 A OK	2,2	3,2	4,2
1,1 OK	2,1 A OK	3,1	4,1

Το πρόβλημα

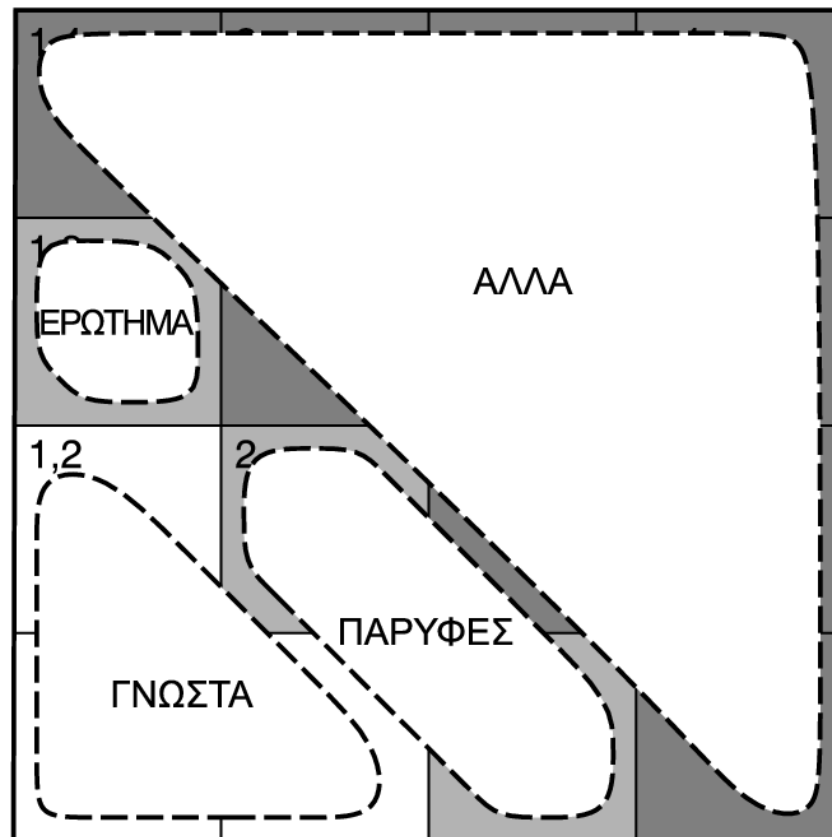
- Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα το τετράγωνο (1,3) να περιέχει γούβα (παρόμοια για τα (2,2) και (3,1)).
 - Με χρήση λογικής δεν θα μπορούσαμε να διαχωρίσουμε τα τετράγωνα (1,3), (2,2) και (3,1).
- $\Gamma_{i,j}$: Το τετράγωνο (i,j) έχει γούβα
 - Αρχικά $\Gamma_{ij}=0.2$ για όλα τα τετράγωνα (εκτός από το (1,1)).
- A_{ij} : Το τετράγωνο (i,j) έχει αύρα.
- Δεδομένα:
 - $\alpha = \neg a_{1,1} \wedge a_{1,2} \wedge a_{2,1}$
 - $\gamma_{\text{γνωστά}} = \neg \gamma_{1,1} \wedge \neg \gamma_{1,2} \wedge \neg \gamma_{2,1}$
- Ζητούμενο:
 - $\mathbf{P}(\Gamma_{1,3} | \gamma_{\text{γνωστά}}, \alpha)$

Πλήρης συνδυασμένη κατανομή

- Πλήρης συνδυασμένη κατανομή πιθανότητας:
 - $\mathbf{P}(G_{1,1}, \dots, G_{4,4}, A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1})$
 $= \mathbf{P}(A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1} | G_{1,1}, \dots, G_{4,4}) \cdot \mathbf{P}(G_{1,1}, \dots, G_{4,4}).$
- Κάθε A_{ij} εξαρτάται μόνο από τα γειτονικά G_{ij} .
 - Οι τιμές $P(A_{ij} | G_{kl})$ είναι 0 ή 1, ανάλογα με το αν υπάρχει ένα γειτονικό του (i,j) τετράγωνο με γούβα.
- Επίσης ισχύει:
 - $\mathbf{P}(G_{1,1}, \dots, G_{4,4}) = \prod_{ij} \Pi_{ij}(G_{i,j})$
- Η χρήση της πλήρους συνδυασμένης κατανομής απαιτεί πολλές πράξεις.

Ανάλυση (1/4)

- Έστω Άγνωστα οι μεταβλητές Γ_{ij} για τα τετράγωνα (1,3).
- Χωρίζουμε και του



Ανάλυση (2/4)

$$\alpha \sum_{\text{άγνωστα}} \mathbf{P}(a|\Gamma_{1,3}, \text{γνωστά}, \text{άγνωστα}) \cdot \mathbf{P}(\Gamma_{1,3}, \text{γνωστά}, \text{άγνωστα}) =$$

$$\alpha \sum_{\text{παρυφές}} \sum_{\text{άλλα}} \mathbf{P}(a|\text{γνωστά}, \Gamma_{1,3}, \text{παρυφές}, \text{άλλα}) \cdot \mathbf{P}(\Gamma_{1,3}, \text{γνωστά}, \text{παρυφές}, \text{άλλα}) =$$

$$\alpha \sum_{\text{παρυφές}} \sum_{\text{άλλα}} \mathbf{P}(a|\text{γνωστά}, \Gamma_{1,3}, \text{παρυφές}) \cdot \mathbf{P}(\Gamma_{1,3}, \text{γνωστά}, \text{παρυφές}, \text{άλλα}) =$$

$$\alpha \sum_{\text{παρυφές}} \mathbf{P}(a|\text{γνωστά}, \Gamma_{1,3}, \text{παρυφές}) \sum_{\text{άλλα}} \mathbf{P}(\Gamma_{1,3}, \text{γνωστά}, \text{παρυφές}, \text{άλλα}) =$$

$$\alpha \sum_{\text{παρυφές}} \mathbf{P}(a|\text{γνωστά}, \Gamma_{1,3}, \text{παρυφές}) \sum_{\text{άλλα}} \mathbf{P}(\Gamma_{1,3}) P(\text{γνωστά}) P(\text{παρυφές}) P(\text{άλλα}) =$$

$$\alpha \cdot P(\text{γνωστά}) \mathbf{P}(\Gamma_{1,3}) \sum_{\text{παρυφές}} \mathbf{P}(a|\text{γνωστά}, \Gamma_{1,3}, \text{παρυφές}) P(\text{παρυφές}) \sum_{\text{άλλα}} P(\text{άλλα}) =$$

$$\alpha' \cdot \mathbf{P}(\Gamma_{1,3}) \sum_{\text{παρυφές}} \mathbf{P}(a|\text{γνωστά}, \Gamma_{1,3}, \text{παρυφές}) P(\text{παρυφές})$$

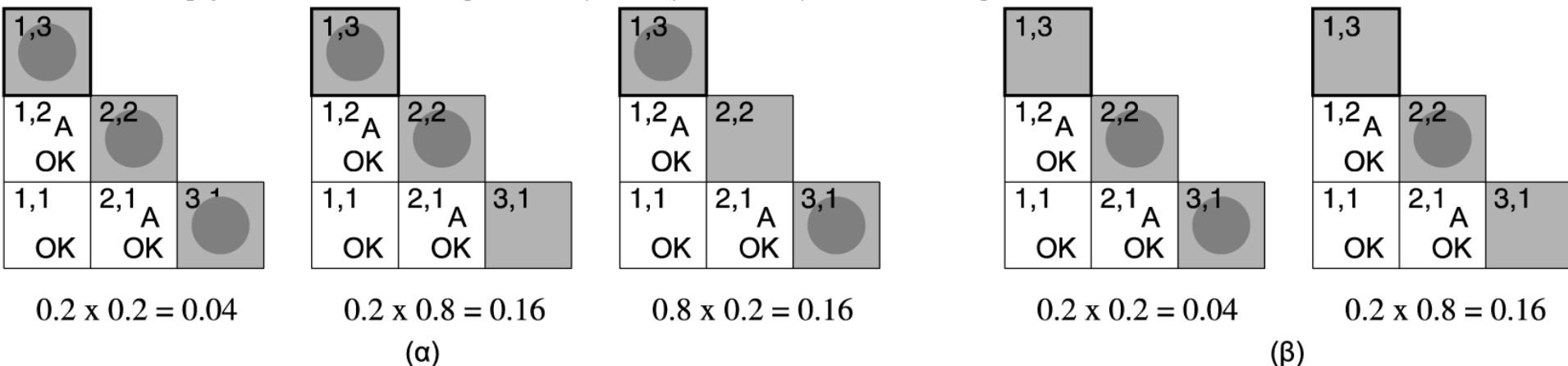
Ανάλυση (3/4)

- Η σχέση στην οποία καταλήξαμε:

$$\mathbf{P}(\Gamma_{1,3}|\gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{\alpha},\alpha) =$$

$$\alpha' \cdot \mathbf{P}(\Gamma_{1,3}) \sum_{\text{παρυφές}} \mathbf{P}(a|\gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{\alpha},\Gamma_{1,3},\text{παρυφές})P(\text{παρυφές})$$

- έχει ένα άθροισμα με 4 μόνο όρους.



Ανάλυση (4/4)

- Τελικά προκύπτει $\mathbf{P}(\Gamma_{1,3}|\gamma\text{γνωστά},\alpha) = \langle 0.31, 0.69 \rangle$.
- Το ίδιο αποτέλεσμα βγαίνει και για το $\mathbf{P}(\Gamma_{3,1}|\gamma\text{γνωστά},\alpha)$.
- Τέλος με παρόμοιους υπολογισμούς βρίσκουμε:
- $\mathbf{P}(\Gamma_{2,2}|\gamma\text{γνωστά},\alpha) = \langle 0.86, 0.14 \rangle$
- Άρα ο πράκτορας πρέπει να αποφύγει το (2,2).