



# Τεχνητή Νοημοσύνη

*Νευρώνας Perceptron*

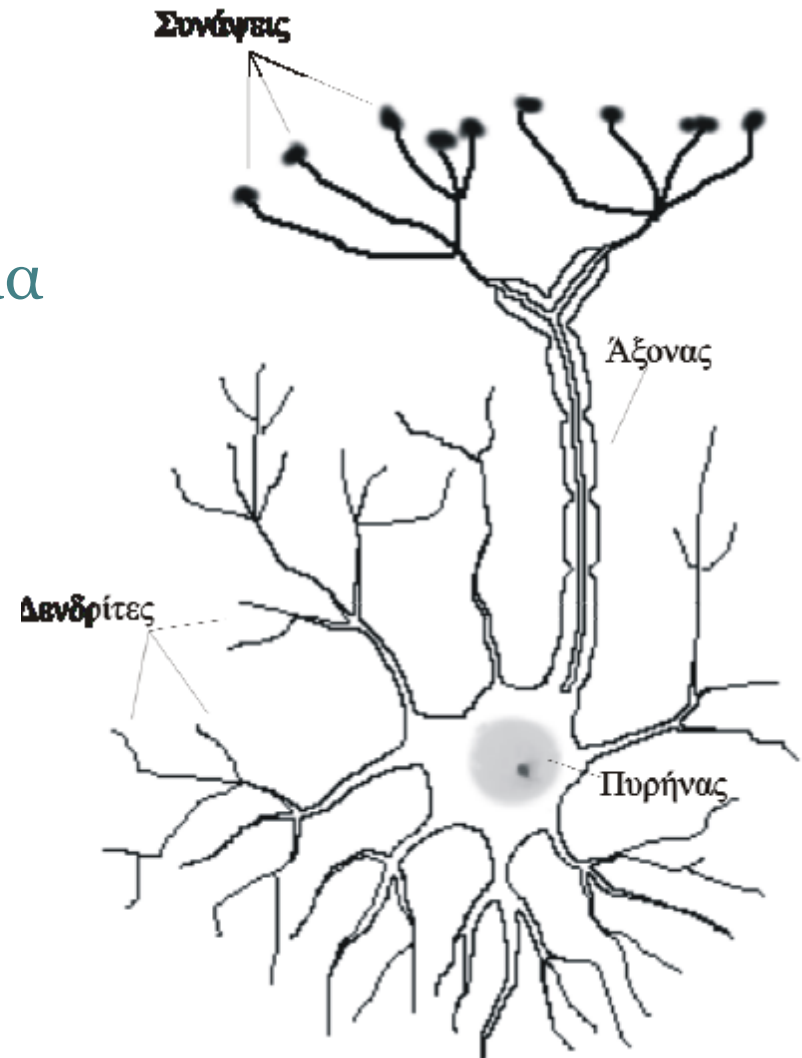
Διδάσκων: **Τσίπουρας Μάρκος**  
Εκπαιδευτικό Υλικό: **Τσίπουρας Μάρκος**  
**Τζώρτζης Γρηγόρης**

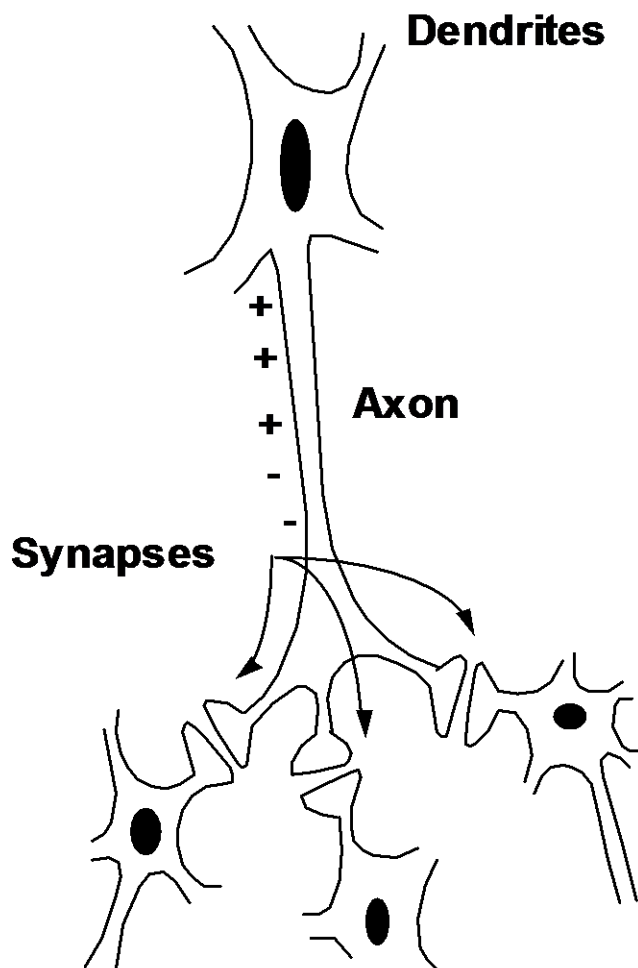
# Περιεχόμενα

- Εισαγωγή
  - Αρχική Ιδέα
  - Βασικές Αρχές
  - Ιστορικά Στοιχεία
- Νευρώνας Perceptron
  - Ορισμός
  - Τεχνητός Νευρώνας
  - Γραμμικά Διαχωρίσιμο Πρόβλημα
  - Ιδιότητες
  - Αρχιτεκτονική
  - Εκπαίδευση

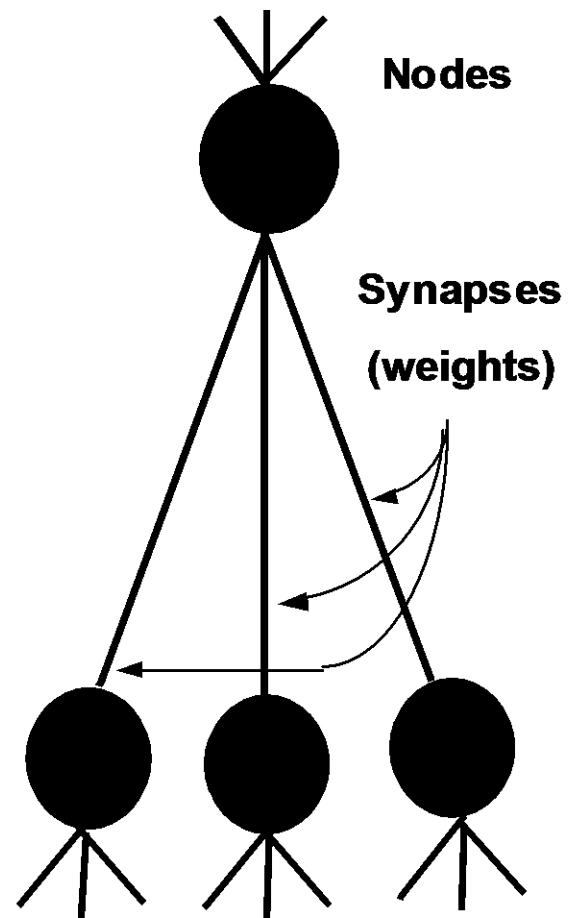
# Αρχική Ιδέα

- Οι αρχές και λειτουργίες τους βασίζονται στο νευρικό σύστημα των ζώντων οργανισμών
- Έχουν ως στόχο να προσομοιώσουν τους νευρώνες του ανθρώπινου εγκεφάλου
  - Οι βιολογικοί νευρώνες έχουν ρυθμιζόμενες παραμέτρους
  - Μεγάλο πλήθος νευρώνων:  $10^{11}$
  - Κάθε νευρώνας έχει περίπου 1000 συνάψεις





Impulse



# Βασικές Αρχές

- Η λειτουργία τους προσπαθεί να συνδυάσει τον τρόπο σκέψης του ανθρώπινου εγκεφάλου με τον αφηρημένο μαθηματικό τρόπο σκέψης
- Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα (artificial neural networks) χρησιμοποιούνται για να λύσουν προβλήματα με ηλεκτρονικό υπολογιστή
- Κάθε νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό μονάδων, που λέγονται νευρώνες (neurons)
- Ο νευρώνας είναι η πιο μικρή ανεξάρτητη μονάδα του δικτύου

# Ορισμός

- Αρχιτεκτονική δομή αποτελούμενη από ένα πλήθος διασυνδεδεμένων μονάδων.
- Κάθε μονάδα χαρακτηρίζεται από εισόδους και εξόδους και υλοποιεί τοπικά κάποιον απλό υπολογισμό
- Κάθε σύνδεση μεταξύ μονάδων χαρακτηρίζεται από μία τιμή βάρους. Οι τιμές των βαρών αποτελούν την γνώση που είναι αποθηκευμένη στο δίκτυο
- Η έξοδος κάθε μονάδας καθορίζεται από τις εισόδους της, τον τρόπο διασύνδεσης με τις άλλες μονάδες και τον τύπο της

# Ιστορικά Στοιχεία [1]

- 1943 – McCulloch & Pitts: πρώτο μοντέλο νευρωνικού δικτύου
  - προτείνει ότι οι νευρώνες είναι η βασική μονάδα
- 1947 – McCulloch & Pitts: εξελιγμένο πρότυπο για την αναγνώριση σχημάτων
  - Ο νευρώνας μπορεί να έχει δύο μόνον καταστάσεις
  - λειτουργία μνήμης: ύπαρξη κλειστών διαδρομών του σήματος μέσα στο δίκτυο

# Ιστορικά Στοιχεία [2]

- 1949 – D. Hebb: κανόνας μάθησης του Hebb
  - κάθε φορά που το δίκτυο χρησιμοποιεί τις νευρωνικές του συνδέσεις, οι συνδέσεις αυτές ενισχύονται και το δίκτυο πλησιάζει περισσότερο στο να μάθει το πρότυπο το οποίο παρουσιάζεται
  - όταν ο νευρώνας  $i$  επανειλημμένα διεγείρει τον νευρώνα  $j$ , τότε συμβαίνει να αναπτύσσεται μια μεταβολική σύνδεση στον ένα ή και στους δύο νευρώνες, έτσι ώστε η απόδοση του φαινομένου (το  $i$  διεγείρει το  $j$ ) να αυξάνεται
- '50 – J. von Neumann: παράδειγμα για υπολογιστικές μηχανές και πρώτα τεχνητά δίκτυα



# Ιστορικά Στοιχεία [3]

- 1957 – F. Rosenblatt: μοντέλο perceptron
  - απλό μοντέλο δύο επιπέδων (είσοδος – έξοδος)
- 1959 – Widrow & Hoff: μοντέλα Adaline και Madaline,
  - τα πρώτα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν επιτυχώς για πρακτικά προβλήματα  
*(φίλτρα για εξάλειψη της ηχούς σε τηλεφωνικές γραμμές)*
- 1969 – Minsky και Papert: βιβλίο «Perceptrons»
  - συνολική εκτίμηση της χρησιμότητας του perceptron

# Ιστορικά Στοιχεία [4]

- 1982 – J. Hopfield: νευρωνικό δίκτυο ως αποθηκευτικός χώρος
- 1986 – McClelland & Rumelhart: βιβλίο «Parallel Distributed Processing»
  - νευρωνικό δίκτυο ως παράλληλος επεξεργαστής
  - εσωτερική δομή του δικτύου (κρυμμένα επίπεδα) νευρώνων, εκτός από την είσοδο και την
  - εκπαίδευση με την μέθοδο της οπισθοδιάδοσης (back-propagation)

# Νευρώνας Perceptron

- Ο νευρώνας perceptron είναι το απλούστερο ΤΝΔ
- Χρησιμοποιείται σε προβλήματα με 2 κατηγορίες
- Επιλύει μόνο γραμμικά διαχωρίσιμα προβλήματα

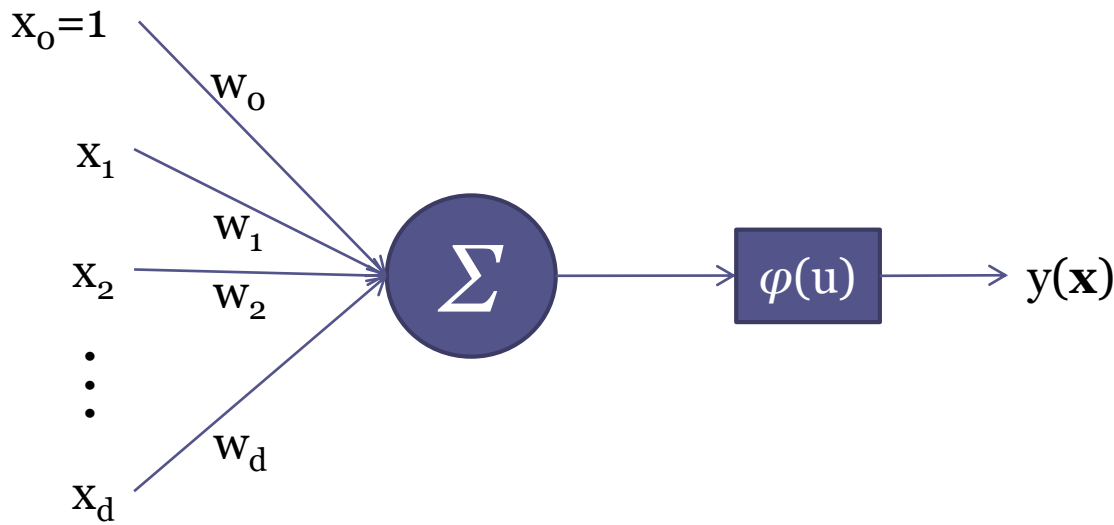
# Τεχνητός Νευρώνας

- Ο νευρώνας δέχεται ως είσοδο ένα δεδομένο:
  - Το δεδομένο αναπαρίσταται με ένα διάνυσμα  $\mathbf{x}=[x_1,...,x_d]$
  - Τα  $x_1,...,x_d$  ονομάζονται χαρακτηριστικά
- Ο τεχνητός νευρώνας έχει τόσες εισόδους όση και η διάσταση των δεδομένων ( $d$ ) + μία είσοδο
  - Η τιμή κάθε εισόδου είναι η τιμή του αντίστοιχου χαρακτηριστικού  $x_i$
  - Η επιπλέον τιμή εισόδου είναι πάντα 1 ( $x_0=1$ )
  - Το  $[x_0,x_1,...,x_d]$  ονομάζεται επαυξημένο διάνυσμα εισόδου
- Σε κάθε είσοδο αντιστοιχεί μία παράμετρος  $w_i$  ( $i=0,1,...,d$ )
  - Τα  $w_i$  αποκαλούνται βάρη
    - το  $w_0$  αποκαλείται και πόλωση
  - Τα βάρη αναπαρίστανται με ένα διάνυσμα  $\mathbf{w}=[w_0,w_1,...,w_d]$

# Αρχιτεκτονική

Βηματική συνάρτηση

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1 & \text{αν } u > 0 \\ 0 & \text{αν } u \leq 0 \end{cases}$$



$$y = \varphi(u(x)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^d w_i x_i\right) = \varphi(w_0 x_0 + w_1 x_1 + \dots + w_d x_d)$$

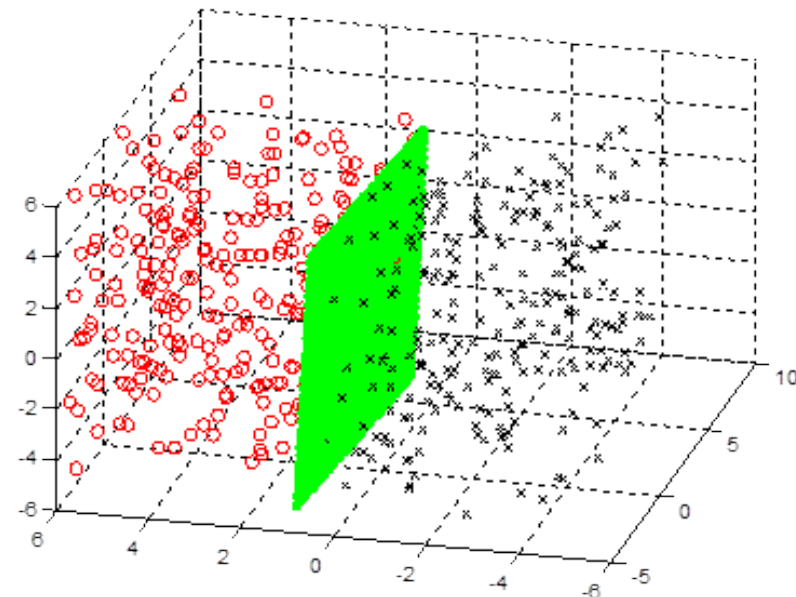
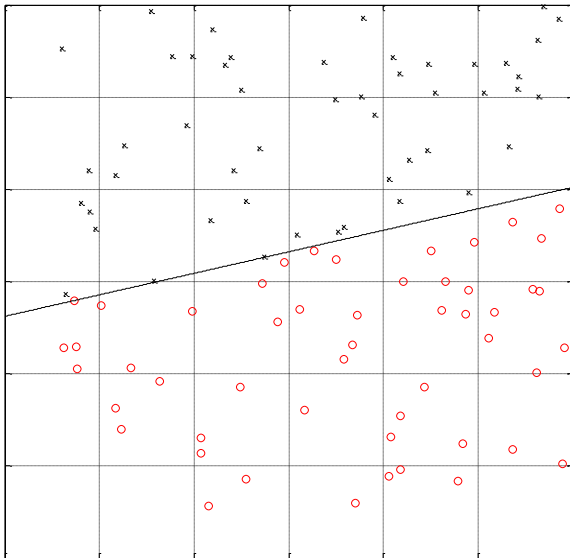
$$y = \begin{cases} 1, & w_0 x_0 + w_1 x_1 + \dots + w_d x_d > 0 \\ 0, & w_0 x_0 + w_1 x_1 + \dots + w_d x_d \leq 0 \end{cases}$$

# Λειτουργία

1. Υπολογίζεται το  $\Sigma$ 
  - (γραμμικός συνδυασμός της εισόδου με τα βάρη)
2. Υπολογίζεται η Συνάρτηση ενεργοποίησης
  - (με βάση το  $\Sigma$ )

# Γραμμικά Διαχωρίσιμο Πρόβλημα

- Υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει τα δεδομένα των δύο κατηγοριών
  - Στις δύο διαστάσεις το υπερεπίπεδο είναι η **ευθεία**
  - Εξίσωση υπερεπιπέδου στον  $\mathbb{R}^d$  :  $g(\mathbf{x}) = w_0 + \sum_{i=1}^d w_i x_i = w_0 + w_1 x_1 + \dots + w_d x_d$



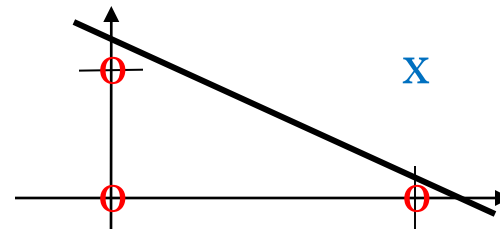
# Γραμμικά Διαχωρίσιμα Προβλήματα

- Λογικό AND

| $x_1$ | $x_2$ | AND |
|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0   |
| 0     | 1     | 0   |
| 1     | 0     | 0   |
| 1     | 1     | 1   |

Κατηγορία  $C_1$

Κατηγορία  $C_2$

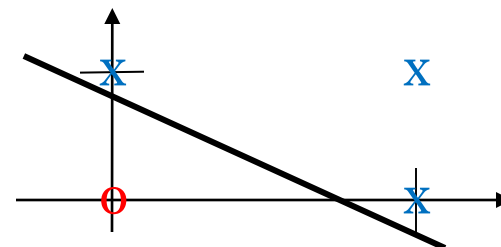


- Λογικό OR

| $x_1$ | $x_2$ | OR |
|-------|-------|----|
| 0     | 0     | 0  |
| 0     | 1     | 1  |
| 1     | 0     | 1  |
| 1     | 1     | 1  |

Κατηγορία  $C_1$

Κατηγορία  $C_2$





# Ιδιότητες

- Η ταξινόμηση ενός δεδομένου  $\mathbf{x}^i$  γίνεται ως εξής:
  - Είσοδος του  $\mathbf{x}^i$  στο perceptron
  - Υπολογισμός του  $y(\mathbf{x}^i)$ 
    - Αν  $y(\mathbf{x}^i)=1$  ταξινόμηση στην κατηγορία 1
    - Αν  $y(\mathbf{x}^i)=0$  ταξινόμηση στην κατηγορία 0
- Η εκπαίδευση έχει ως στόχο την εύρεση των τιμών των βαρών ώστε να διαχωρίζονται σωστά τα δεδομένα στις 2 κατηγορίες

# Εκπαίδευση

- Θεωρούμε το σύνολο εκπαίδευσης  $X = \{(\mathbf{x}^i, t(\mathbf{x}^i))\} \ i=1, \dots, N$ 
  - Τα  $\mathbf{x}^i$  είναι τα δεδομένα εκπαιδεύσεις και  $\mathbf{x}^i = [x_1^i, \dots, x_d^i]$  δηλαδή  $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^d$
  - Το  $t(\mathbf{x}^i)$  είναι η κατηγορία του δεδομένου  $\mathbf{x}^i$
- Με την εκπαίδευση επιθυμούμε να βρούμε τις κατάλληλες τιμές για τα βάρη ώστε το υπερεπίπεδο που αντιστοιχεί σε αυτά να διαχωρίζει ορθά όλα τα δεδομένα του συνόλου εκπαίδευσης, δηλαδή  $y(\mathbf{x}^i) = t(\mathbf{x}^i) \ \forall \ \mathbf{x}^i \in X$

# Αλγόριθμός Εκπαίδευσης [1]

- Επαυξημένο διάνυσμα δεδομένων
  - Στο διάνυσμα όλων των δεδομένων του συνόλου εκπαίδευσης προσθέτουμε και τη συνιστώσα  $x_0 = 1$  που αντιστοιχεί στην είσοδο με τιμή 1 του perceptron
  - Το επαυξημένο διάνυσμα για το  $\mathbf{x}^i$  είναι:  
 $\mathbf{x}_e^i = [x_0^i = 1, x_1^i, \dots, x_d^i]$
  - Παρέχει ευκολία στη διατύπωση του αλγορίθμου εκπαίδευσης
- Βήμα 1-Αρχικοποίηση
  - Αρχικοποίησε τα βάρη του perceptron  
 $\mathbf{w}^{(0)} = [w_0^{(0)}, w_1^{(0)}, \dots, w_d^{(0)}]$
  - Η αρχικοποίηση γίνεται συνήθως τυχαία π.χ. επιλέγοντας τιμές στο διάστημα  $(-1, 1)$

# Αλγόριθμός Εκπαίδευσης [2]

- Βήμα 2-Ενημέρωση βαρών

- Θέσε ως είσοδο τα πρότυπα  $\mathbf{x}^i$  του συνόλου εκπαίδευσης (ένα την φορά)
- Για κάθε  $\mathbf{x}^i$  υπολόγισε το  $y(\mathbf{x}^i)$  και άλλαξε τα βάρη με βάση τον εξής κανόνα (ο κανόνας περιέχει πράξεις με διανύσματα!):

$$\mathbf{w}^{(t+1)} = \begin{cases} \mathbf{w}^{(t)} + n\mathbf{x}_e^i & \text{αν } y(\mathbf{x}^i) = 0 \text{ \& } t(\mathbf{x}^i) = 1 \\ \mathbf{w}^{(t)} - n\mathbf{x}_e^i & \text{αν } y(\mathbf{x}^i) = 1 \text{ \& } t(\mathbf{x}^i) = 0 \\ \mathbf{w}^{(t)} & \text{αν } y(\mathbf{x}^i) = t(\mathbf{x}^i) \end{cases}$$

Ορθή ταξινόμηση  $\Rightarrow$   
τα βάρη δεν αλλάζουν

- Στη συνέχεια προχώρησε στο επόμενο πρότυπο
- Όταν τα πρότυπα εξαντληθούν άρχισε από την αρχή
- Κάθε κυκλική επανάληψη όλων των προτύπων καλείται **εποχή**

# Αλγόριθμός Εκπαίδευσης [3]

- Τερματισμός
  - Επανέλαβε το βήμα 2 εωσότου όλα τα πρότυπα ταξινομηθούν σωστά, δηλαδή  $y(\mathbf{x}^i) = t(\mathbf{x}^i) \forall \mathbf{x}^i \in X$
  - Το παραπάνω είναι **ισοδύναμο** με το να μη γίνει αλλαγή στα βάρη σε μία εποχή
- Ρυθμός μάθησης  $\eta$ 
  - Πρόκειται για σταθερά του αλγορίθμου εκπαίδευσης
  - Καθορίζει πόσο έντονα μεταβάλλονται τα βάρη σε κάθε ανανέωση
  - Ισχύει:  $\eta > 0$  και  $\eta \in (0,1]$

# Αλγόριθμός Εκπαίδευσης [4]

$t=0$

-Αρχικοποίησε τα βάρη

**do**{

**for**  $i=1$  to  $N$

  {

    -Υπολόγισε το  $y(\mathbf{x}^i)$  με χρήση των βαρών  $\mathbf{w}^{(t)}$

    -Ανανέωσε τα βάρη

$t=t+1$

  }

**}until**  $y(\mathbf{x}^i)=t(\mathbf{x}^i) \forall \mathbf{x}^i \in X$

$$\mathbf{w}^{(t+1)} = \begin{cases} \mathbf{w}^{(t)} + n\mathbf{x}_e^i & \text{αν } y(\mathbf{x}^i) = 0 \text{ \& } t(\mathbf{x}^i) = 1 \\ \mathbf{w}^{(t)} - n\mathbf{x}_e^i & \text{αν } y(\mathbf{x}^i) = 1 \text{ \& } t(\mathbf{x}^i) = 0 \\ \mathbf{w}^{(t)} & \text{αν } y(\mathbf{x}^i) = t(\mathbf{x}^i) \end{cases}$$

# Αλγόριθμός Εκπαίδευσης [5]

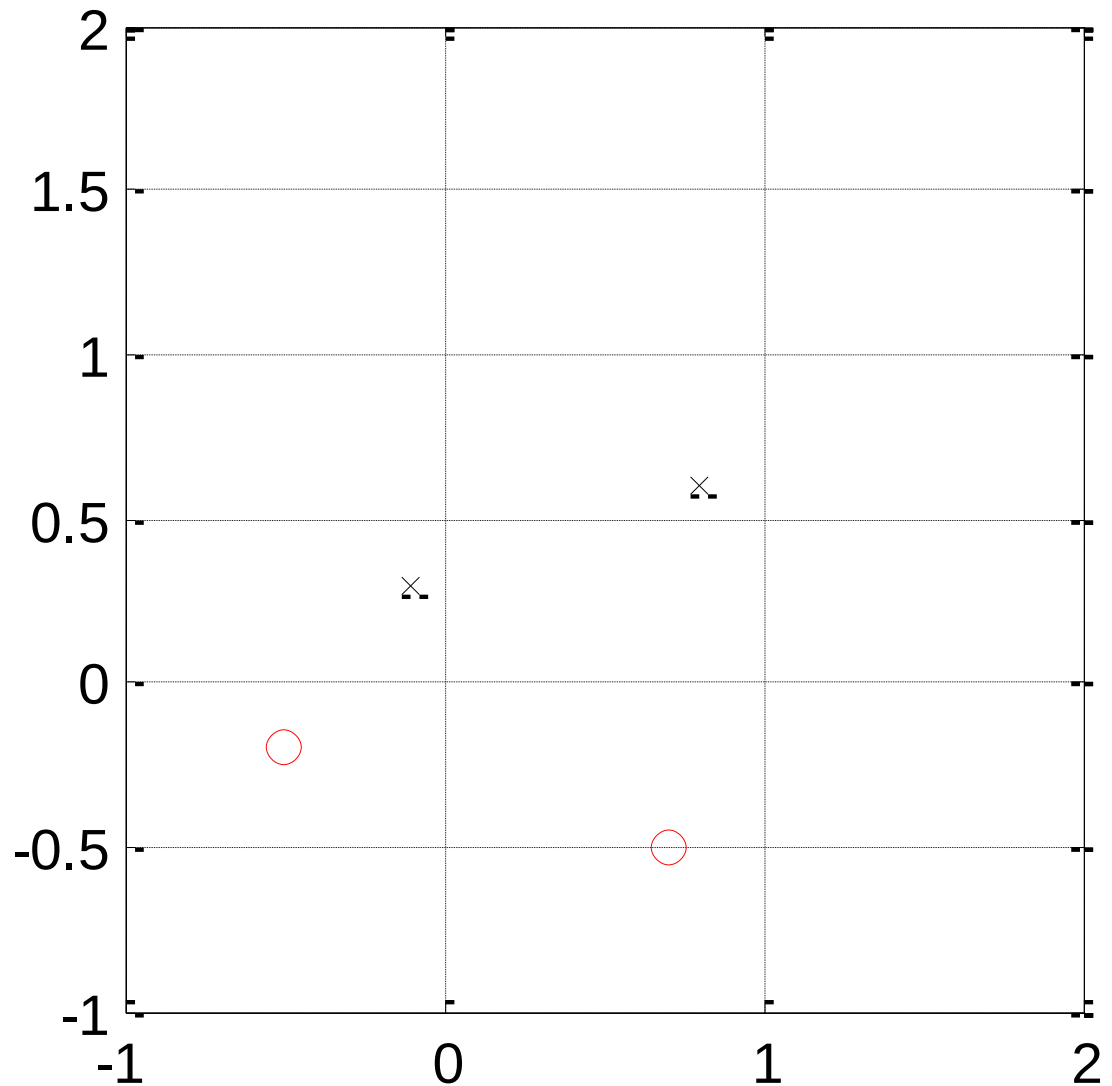
- Ο αλγόριθμος τερματίζει μόνον όταν  $y(\mathbf{x}^i) = t(\mathbf{x}^i) \quad \forall \mathbf{x}^i \in X$ 
  - Τερματισμός μόνο για γραμμικά διαχωρίσιμα προβλήματα
  - Μη γραμμικά διαχωρίσιμο  $\Rightarrow$  άπειρες επαναλήψεις
- Θεώρημα
  - Αν το πρόβλημα είναι γραμμικά διαχωρίσιμο αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει
  - Άγνωστος ο αριθμός επαναλήψεων εωσότου συγκλίνει
- Η σύγκλιση επηρεάζεται από το ρυθμό μάθησης
  - $\eta$  πολύ μεγάλο  $\rightarrow$  πιθανή ταλάντωση γύρω από τη λύση
  - $\eta$  πολύ μικρό  $\rightarrow$  ο αλγόριθμος συγκλίνει αργά

# Αλγόριθμός Εκπαίδευσης [6]

- Η τελική λύση (τελικές τιμές των βαρών) εξαρτάται από:
  - Τις αρχικές τιμές των βαρών
  - Τη σειρά παρουσίασης των δεδομένων στον αλγόριθμο
  - Την τιμή του ρυθμού μάθησης
- Ο αλγόριθμος βρίσκει ένα από τα άπειρα υπερεπίπεδα που διαχωρίζουν το σύνολο εκπαίδευσης (εφόσον είναι γραμμικά διαχωρίσιμο)



```
x = [0.7, -0.5; ...  
     -0.5, -0.2; ...  
     0.8, 0.6; ...  
     -0.1, 0.3];  
t = [0, 0, 1, 1];  
w = [0.3 -0.2 0.3];  
n = 1;
```



- Πρώτυπα : 4
- Αρχικά  $w$ :  $(0.300, -0.200, 0.300)$

-----  
 ---- Εποχή 1 ----  
 -----

- Πρώτυπο:  $(0.70, -0.50)$   $u(x) = 1 * 0.30 + 0.70 * -0.20 + -0.50 * 0.30 = 0.01$   
 $\phi(u) = 1$   $t = 0$

---> Ανανέωση  $w$ :  $w = w - 1 * x = (0.30, -0.20, 0.30) - 1 * (1.00, 0.70, -0.50) = (-0.70, -0.90, 0.80)$

- Πρώτυπο:  $(-0.50, -0.20)$   $u(x) = 1 * -0.70 + -0.50 * -0.90 + -0.20 * 0.80 = -0.41$   
 $\phi(u) = 0$   $t = 0$

- Πρώτυπο:  $(0.80, 0.60)$   $u(x) = 1 * -0.70 + 0.80 * -0.90 + 0.60 * 0.80 = -0.94$   
 $\phi(u) = 0$   $t = 1$

---> Ανανέωση  $w$ :  $w = w + 1 * x = (-0.70, -0.90, 0.80) + 1 * (1.00, 0.80, 0.60) = (0.30, -0.10, 1.40)$

- Πρώτυπο:  $(-0.10, 0.30)$   $u(x) = 1 * 0.30 + -0.10 * -0.10 + 0.30 * 1.40 = 0.73$   
 $\phi(u) = 1$   $t = 1$

----- Εποχή 2 -----

- Πρώτυπο: ( 0.70, -0.50)  $u(x)=1*0.30 + 0.70*-0.10 + -0.50*1.40 = -0.47$   
 $\phi(u)=0$   $t=0$

- Πρώτυπο: (-0.50, -0.20)  $u(x)=1*0.30 + -0.50*-0.10 + -0.20*1.40 = 0.07$   
 $\phi(u)=1$   $t=0$

---> Ανανέωση w:  $w = w - 1*x = (0.30, -0.10, 1.40) - 1*(1.00, -0.50, -0.20) = (-0.70, 0.40, 1.60)$

- Πρώτυπο: ( 0.80, 0.60)  $u(x)=1*-0.70 + 0.80*0.40 + 0.60*1.60 = 0.58$   
 $\phi(u)=1$   $t=1$

- Πρώτυπο: (-0.10, 0.30)  $u(x)=1*-0.70 + -0.10*0.40 + 0.30*1.60 = -0.26$   
 $\phi(u)=0$   $t=1$

---> Ανανέωση w:  $w = w + 1*x = (-0.70, 0.40, 1.60) + 1*(1.00, -0.10, 0.30) = (0.30, 0.30, 1.90)$

----- Εποχή 3 -----

- Πρώτυπο: ( 0.70, -0.50)  $u(x)=1*0.30 + 0.70*0.30 + -0.50*1.90 = -0.44$   
 $\phi(u)=0$   $t=0$

- Πρώτυπο: (-0.50, -0.20)  $u(x)=1*0.30 + -0.50*0.30 + -0.20*1.90 = -0.23$   
 $\phi(u)=0$   $t=0$

- Πρώτυπο: ( 0.80, 0.60)  $u(x)=1*0.30 + 0.80*0.30 + 0.60*1.90 = 1.68$   
 $\phi(u)=1$   $t=1$

- Πρώτυπο: (-0.10, 0.30)  $u(x)=1*0.30 + -0.10*0.30 + 0.30*1.90 = 0.84$   
 $\phi(u)=1$   $t=1$

