

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ-Θ

Στρέψη



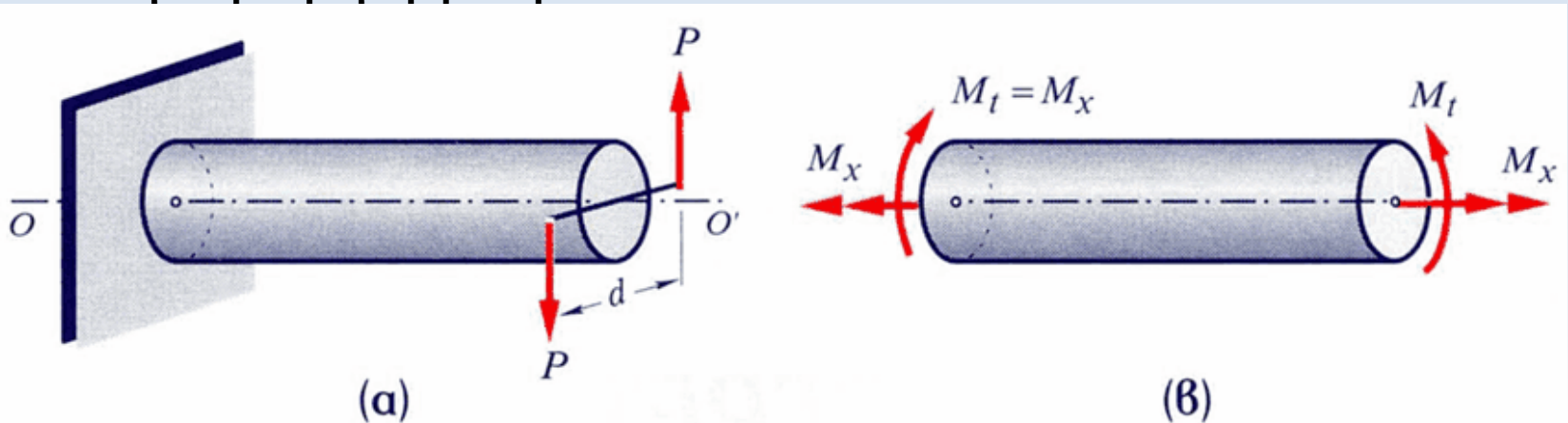
Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 1

Μια ράβδος λέμε ότι καταπονείται σε στρέψη, όταν επάνω σε αυτήν επενεργούν ζεύγη ίσων και αντίθετων δυνάμεων που τα επίπεδά τους είναι κάθετα στον κεντροβαρικό άξονά της. Τα ζεύγη των δυνάμεων αυτών προκαλούν σε κάθε διατομή της ράβδου ροπή, που ονομάζεται **ροπή στρέψης**. Το διάνυσμα M_t της ροπής στρέψης είναι σε αυτήν την περίπτωση **παράλληλο με τον άξονα της ράβδου** και πολλές φορές συμβολίζεται με M_x (διάνυσμα με δύο βέλη), διότι συμπίπτει με το διαμήκη άξονα x της ράβδου.

Η ύπαρξη της ροπής στρέψης M_t (ή M_x), δημιουργεί στο υλικό της ελαστικής ράβδου εσωτερικές **διατμητικές τάσεις**, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μία **στροφή των διατομών** μεταξύ τους που ονομάζεται **γωνία στροφής**.

Τα δύο προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε στην καταπόνηση της στρέψης, είναι τόσο ο προσδιορισμός των **διατμητικών τάσεων τ** , οι οποίες ονομάζονται ειδικότερα **τάσεις στρέψης**, όσο και ο υπολογισμός της **γωνίας στροφής** των διατομών, που αντιπροσωπεύουν την **προκαλούμενη παραμόρφωση**.



Παραδοχές Στρέψης

1. Όλες οι διατομές της ράβδου παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση. Επίσης, διατηρούν το σχήμα, το μέγεθος, καθώς και τη μεταξύ τους απόσταση.
2. Οι ακραίες ροπές στρέψης θεωρούνται δεξιόστροφες και προκαλούν το ίδιο αποτέλεσμα σε κάθε διατομή.
3. Κάθε διατομή περιστρέφεται σαν απόλυτα στερεός δίσκος. Έτσι, η διατομή περιστρέφεται σαν σύνολο, δηλαδή οι **ακτίνες παραμένουν ευθείες**.
4. Το υλικό της ράβδου είναι **ομογενές και ισότροπο**, ώστε οι ιδιότητες του υλικού να είναι ομοιόμορφες σε κάθε σημείο και διεύθυνση.

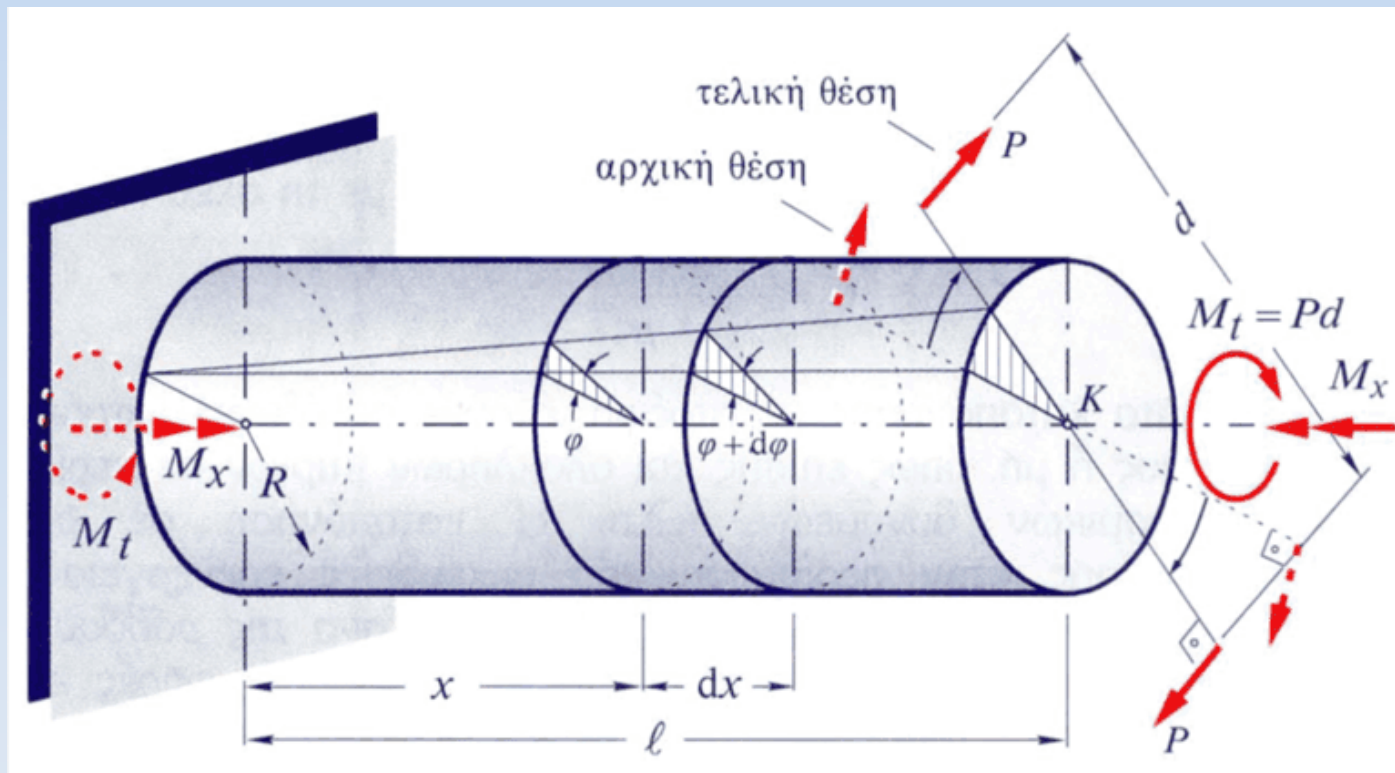
Μέτρο διάτμησης:

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

Σχέση μέτρου διάτμησης με το μέτρο ελαστικότητας:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$





Αν φ είναι η γωνία στροφής της διατομής που βρίσκεται σε απόσταση έστω x από το σταθερό άκρο της ράβδου, τότε η διατομή σε απόσταση $(x + dx)$, στρέφεται κατά γωνία $(\varphi + d\varphi)$. Η σχετική γωνία στροφής των δύο αυτών διαδοχικών διατομών είναι $d\varphi$, ενώ η απόστασή τους είναι dx .

Προκειμένου να εξετάσουμε λεπτομερέστερα τη σχετική στροφή των διατομών, θα θεωρήσουμε ότι αποκόπτουμε τον στοιχειώδη δίσκο πάχους dx από την υπόλοιπη ράβδο.

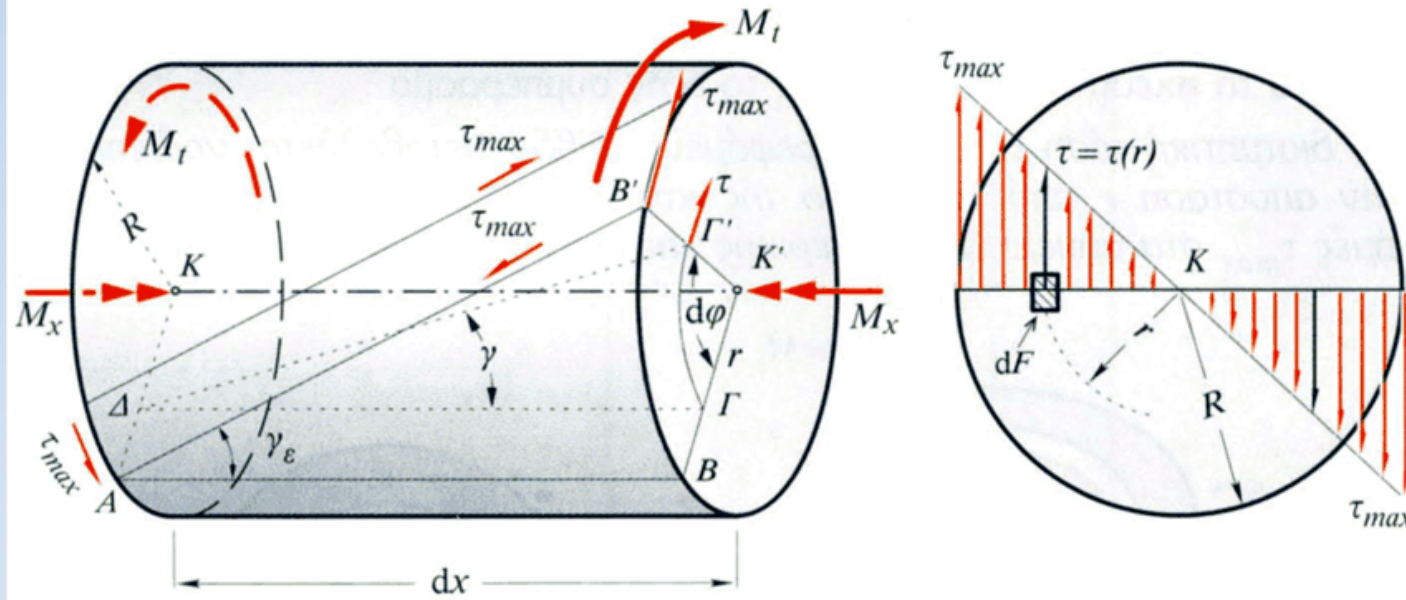


Στρέψη

Στρέψη ράβδου κυκλικής διατομής

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 4



$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\epsilon} &\approx \tan \gamma_{\epsilon} = \frac{(BB')}{dx} = \frac{R \cdot d\varphi}{dx} = R \cdot \theta \\ \gamma &\approx \tan \gamma = \frac{(\Gamma\Gamma')}{dx} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx} = r \cdot \theta \end{aligned} \right\} \gamma = \gamma_{\epsilon} \cdot \frac{r}{R}$$

$$\text{Ανηγμένη γωνία στροφής: } \theta = \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\text{με ολοκλήρωση: } \theta = \frac{\varphi}{\ell}$$

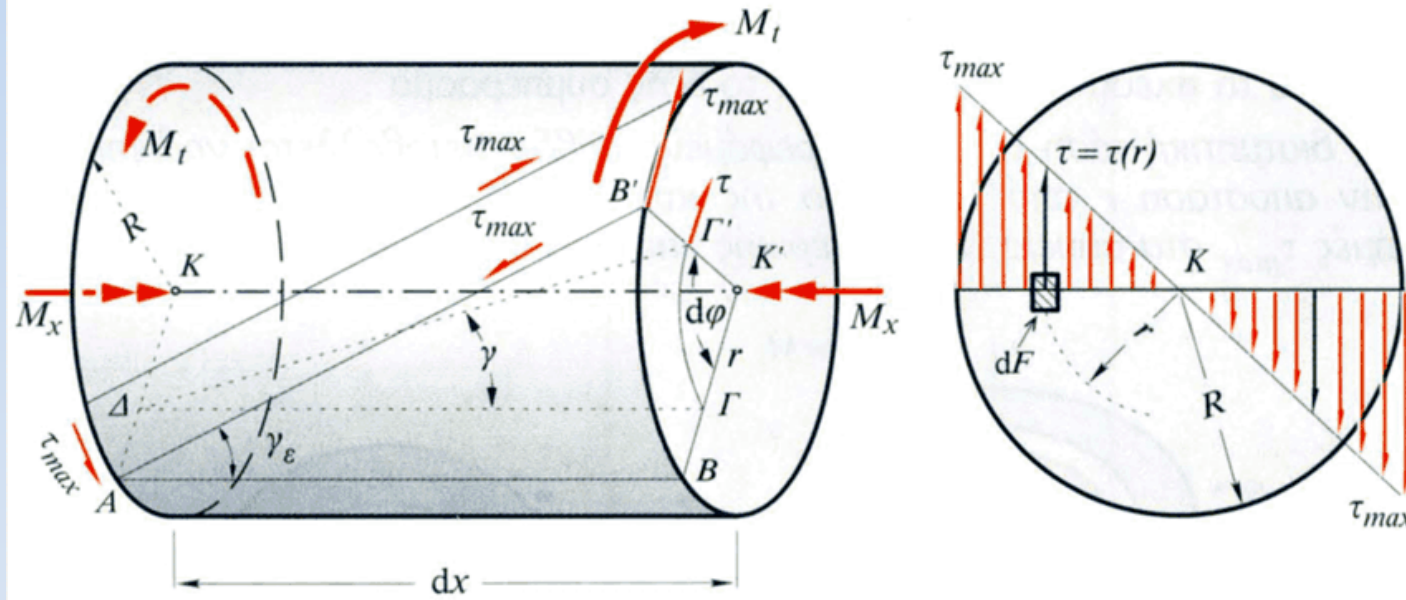


Στρέψη

Υπολογισμός της στρεπτικής (διατμητικής) τάσης τ

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 5



Για $l=R$ και $\phi=\gamma_\epsilon$ η προηγούμενη σχέση δίνει $\theta = \gamma_\epsilon/R$ οπότε η σχέση $\gamma = \gamma_\epsilon \cdot \frac{r}{R}$ γίνεται:

$\gamma = \frac{\gamma_\epsilon}{R} \cdot r = \theta \cdot r$, με αποτέλεσμα η στρεπτική (διατμητική) τάση $\tau = G \cdot \gamma$ με τη βοήθεια των

παραπάνω σχέσεων να πάρει τη μορφή: $\tau = G \cdot \theta \cdot r$

Η διατμητική τάση τ σε μια στρεφόμενη ράβδο, μεταβάλλεται γραμμικά με την **απόσταση r από το κέντρο της κυκλικής διατομής**, έχοντας μέγιστες τιμές $\tau_{\max}$ στα σημεία της εξωτερικής επιφάνειας, δηλαδή της περιφέρειας.

Η κατανομή των διατμητικών αυτών τάσεων κατά μήκος μιας διαμέτρου είναι **τριγωνική**, με μέγιστες τιμές στα άκρα της, και μηδενική στο κέντρο της.

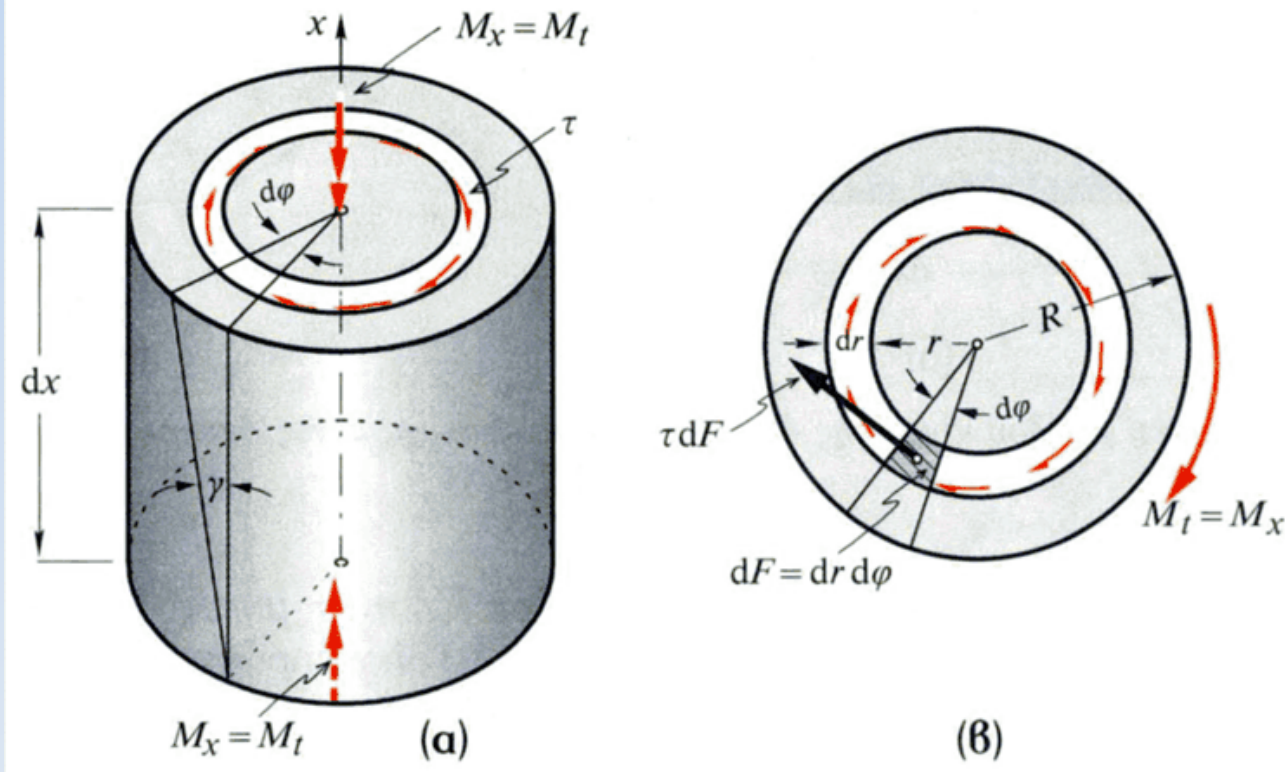


Στρέψη

Υπολογισμός της στρεπτικής (διατμητικής) τάσης τ

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 6



$$M_t = \int_F r \tau dF \quad \tau = G \cdot \theta \cdot r \quad \Rightarrow \quad M_t = \int_F r^2 G \theta dF = G \theta \int_F r^2 dF \quad \Rightarrow \quad M_t = G \theta I_p \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{M_t}{G I_p}$$

$$\theta = \frac{M_t}{G I_p} \quad \theta = \frac{\tau}{G r} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M_t}{I_p} r \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_{\varepsilon\pi}$$

$G I_p$: Μέτρο δυστρεψίας



Στρέψη

Υπολογισμός της στρεπτικής (διατμητικής) τάσης τ

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 7

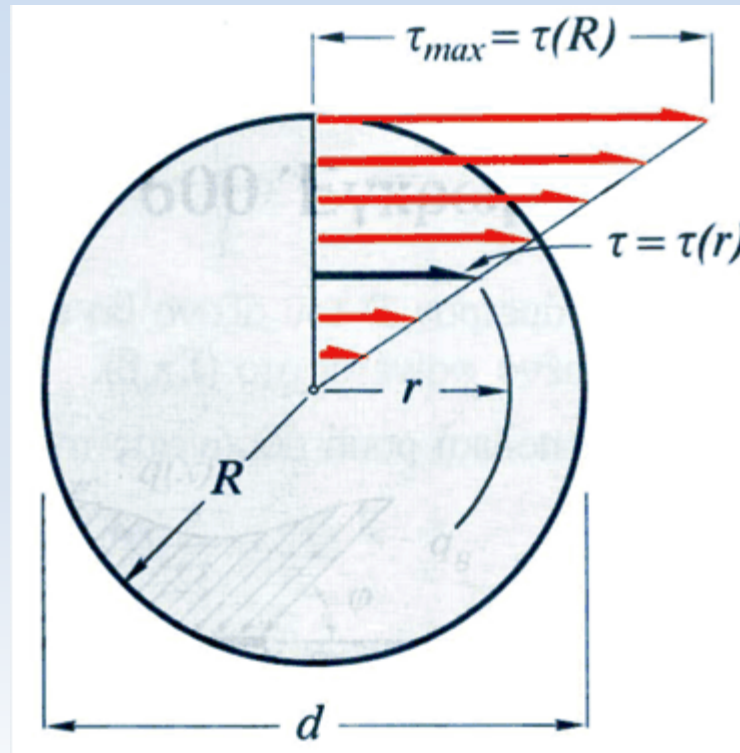
$$\varphi = \theta \cdot \ell = \frac{M_t \ell}{GI_p} \quad [rad]$$

Παραμορφωσιακή συνθήκη: $\theta \leq \theta_{\varepsilon\pi}$



Ράβδος μήκους $\lambda = 1.5 \text{ m}$, κυκλικής διατομής διαμέτρου $D = 100 \text{ mm}$ καταπονείται από ροπή στρέψης είναι $M_t = 1 \text{ kNm}$. Ζητούνται :

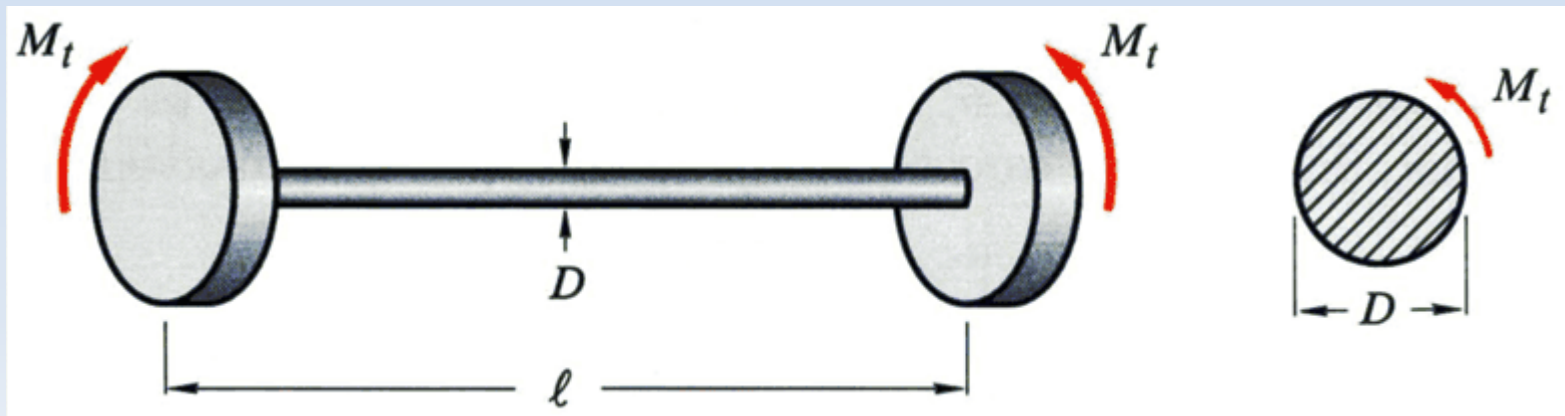
1. Η μέγιστη διατμητική τάση που αναπτύσσεται εντός του υλικού της.
2. Η γωνία στροφής. Το μέτρο διάτμησης του υλικού είναι $G = 85 \text{ GNm}^{-2}$.



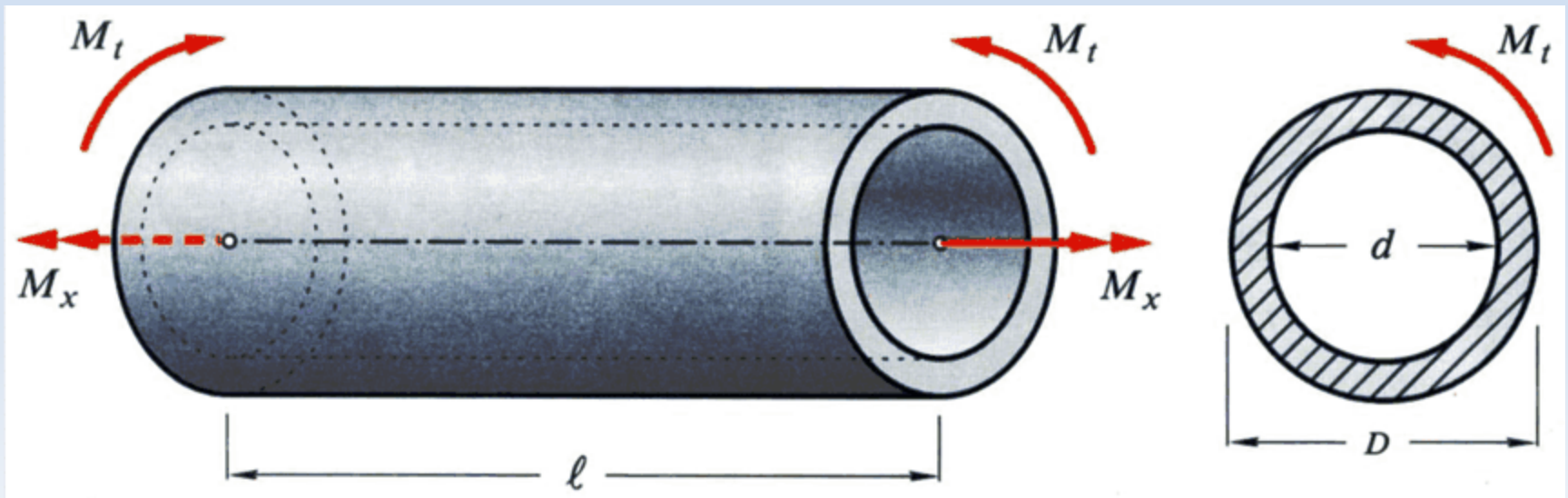
Στις άκρες ενός χαλύβδινου άξονα μήκους $\lambda = 3 \text{ m}$, είναι συγκολλημένοι δύο κυκλικοί δίσκοι. Να προσδιοριστεί:

1. Η ελάχιστη διάμετρος του άξονα αν η ροπή στρέψης είναι $M_t = 1 \text{ kNm}$.
2. Η γωνία στροφής του ενός δίσκου ως προς τον άλλον.

Για το χάλυβα δίνεται το μέτρο διάτμησης, $G = 85 \text{ GNm}^{-2}$ και $\tau_{\text{επ}} = 1800 \text{ N/cm}^2$.



Ζητείται η εξωτερική και η εσωτερική διάμετρος σωληνοειδούς ράβδου, μήκους $\lambda = 2 \text{ m}$, αν η ροπή στρέψης είναι $M_t = 20 \text{ kNm}$ και η ανηγμένη γωνία στροφής δεν πρέπει να υπερβαίνει τις 0.5° ανά μέτρο μήκους. Δίνονται $G = 85 \text{ GPa}$ και $\tau_{\text{επ}} = 50 \text{ MPa}$, $D=4d$.



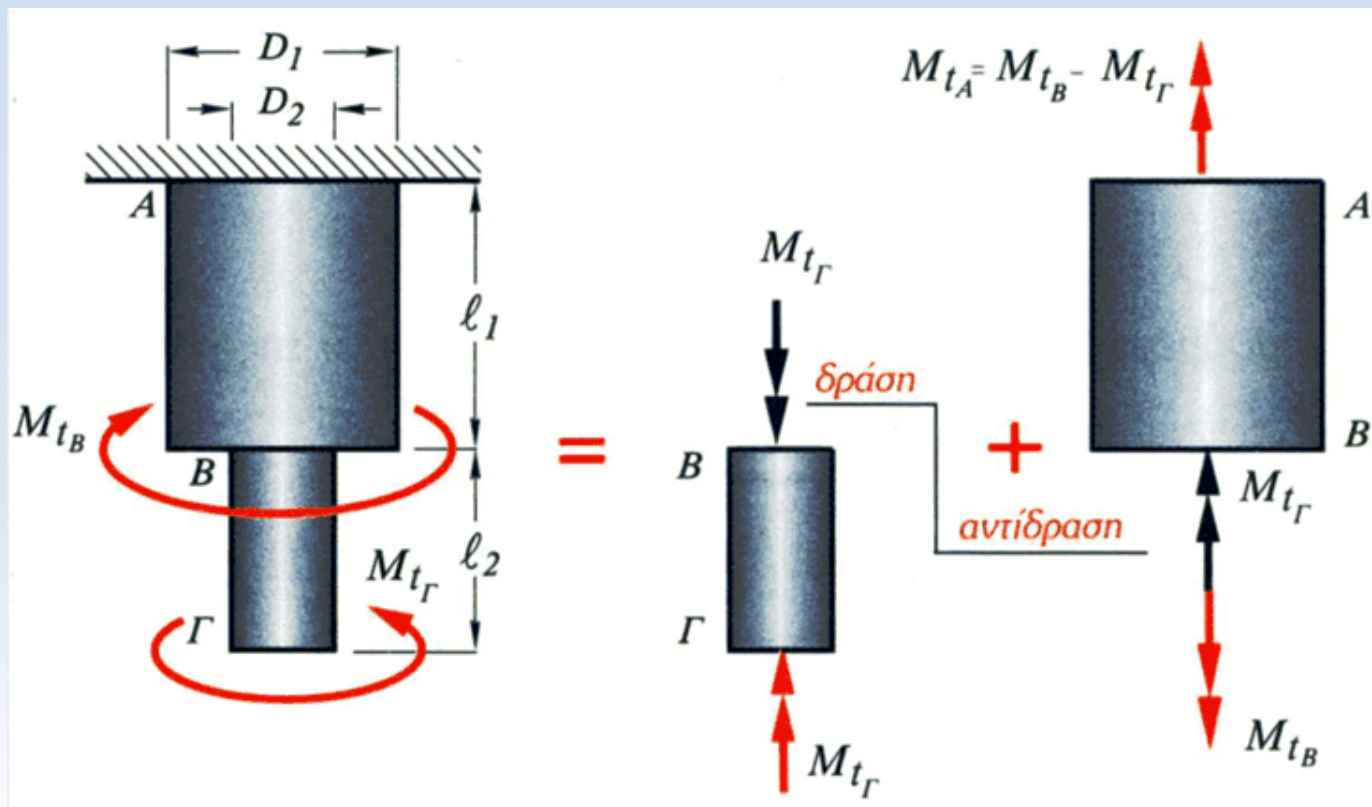
Στρέψη Παράδειγμα 3^ο

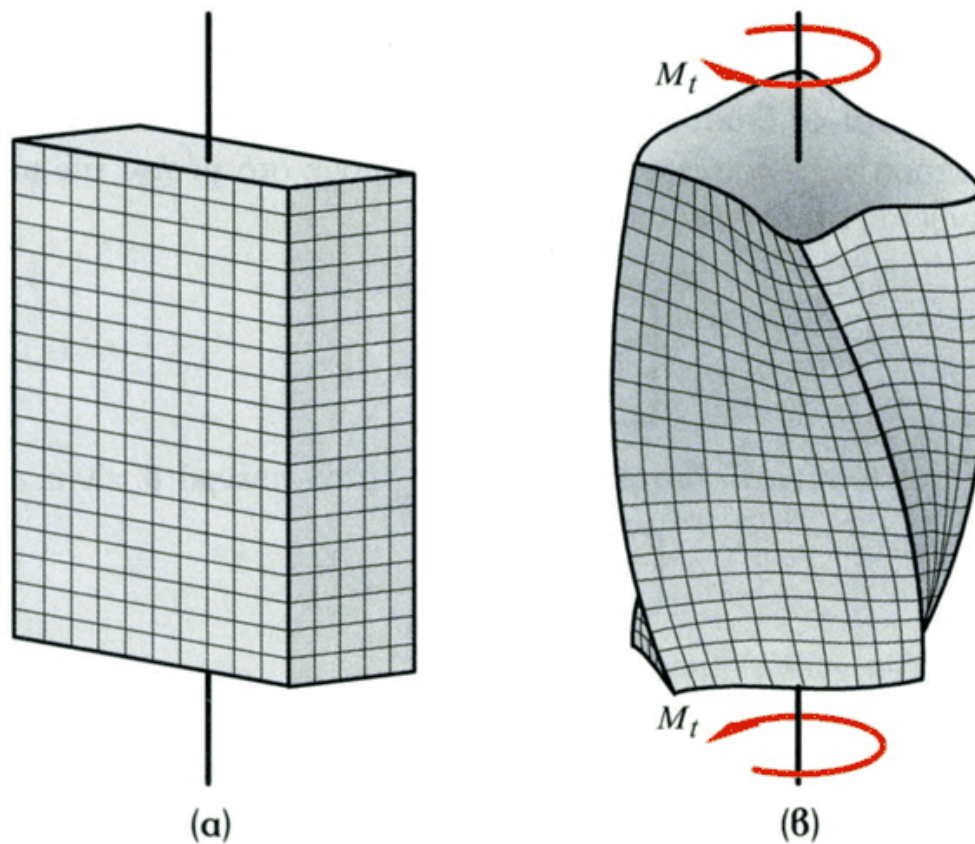
Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 11

Μία ράβδος ΑΒΓ καταπονείται σε στρέψη από ροπή στο σημείο Β $M_t = 100 \text{ KNm}$ και από ροπή στο σημείο Γ $M_t = 25 \text{ KNm}$. Δίνονται $D_1 = 50 \text{ cm}$, $D_2 = 30 \text{ cm}$, $\lambda_1 = 100 \text{ cm}$, $\lambda_2 = 60 \text{ cm}$, $G = 85 \text{ GNm}^{-2}$ και ζητούνται να υπολογιστούν:

1. Η μέγιστη διατμητική τάση εντός του υλικού της ράβδου.
2. Η γωνία περιστροφής των D_1 και D_2 ως προς την πάκτωση Α.





Παραμόρφωση ράβδου ορθογωνικής διατομής λόγω στρέψης

Εξετάζοντας ένα στοιχείο μιας ορθογωνικής διατομής, παρατηρούμε ότι το σημείο αυτό έχει περιστραφεί ως προς την αρχική του θέση και έχει μετατοπισθεί κατά τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου. Αυτό φαίνεται εύκολα όταν επάνω σε κάποιο εύκαμπτο υλικό χαράξουμε ορθογωνικό πλέγμα και υποβάλλουμε το υλικό σε στρέψη. Θα παρατηρήσουμε ότι οι γραμμές οι οποίες χαράξαμε διατηρούν την καθετότητά τους στις ακμές, ενώ σχεδόν στο μέσον αποκλείουν πιο έντονα από οποιανδήποτε άλλη θέση σε σύγκριση με την αρχική μορφή.



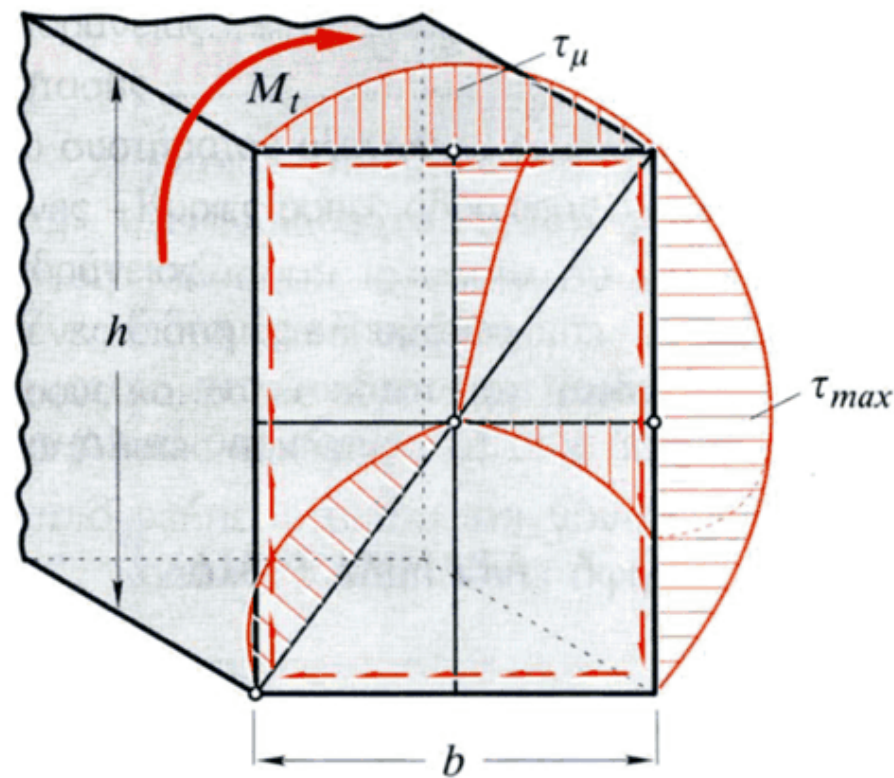
Στρέψη

Στρέψη ράβδων μη κυκλικής διατομής

Ορθογωνική διατομή

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 13



Κατανομή στρεπτικών διατμητικών τάσεων σε ορθογωνική διατομή

Οι μέγιστες διατμητικές τάσεις λόγω στρέψεως βαίνουν αυξανόμενες επάνω στις διαμέσους, με τη μεγαλύτερη από όλες να ανηστοιχεί στο μέσον της μεγάλης πλευράς της ορθογωνικής διατομής. Στις διαγωνίους ενώ οι τάσεις αυξάνονται αρχικά στη συνέχεια ελαττώνονται και τελικά μηδενίζονται στις κορυφές.



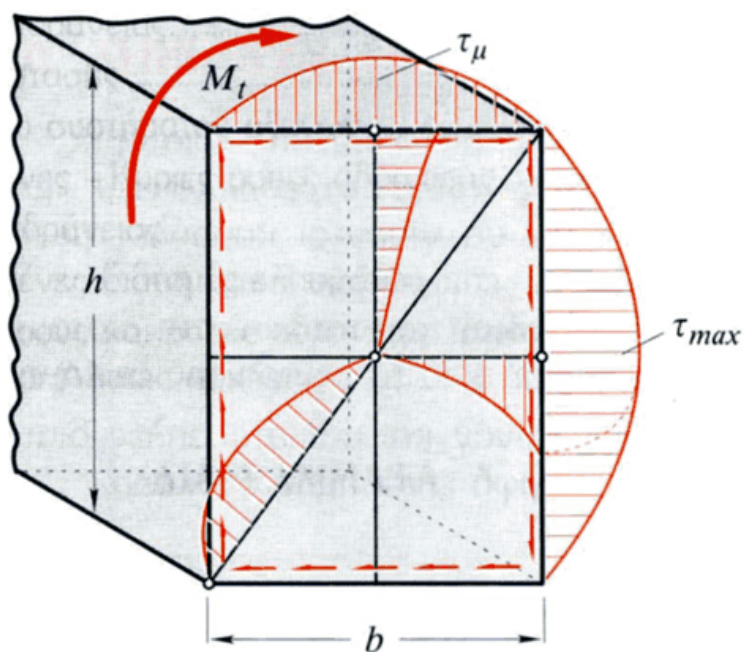
Στρέψη

Στρέψη ράβδων μη κυκλικής διατομής

Ορθογωνική διατομή

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 14



Μέγιστη τάση στην πλευρά h:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{ab^2h}$$

Τάση τ_{μ} στην πλευρά b:

$$\tau_{\mu} = n \cdot \tau_{\max}$$

Ανηγμένη γωνία στροφής:

$$\theta = \frac{\varphi}{\ell} = \frac{M_t}{\beta G b^3 h}$$

Κατανομή στρεπτικών διατμητικών τάσεων σε ορθογωνική διατομή

Οι συντελεστές α, β, n εξαρτώνται από το λόγο h/b των πλευρών του ορθογωνίου και δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Συντελεστές για στρέψη ορθογωνικής διατομής

$\frac{h}{b} = n$	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333



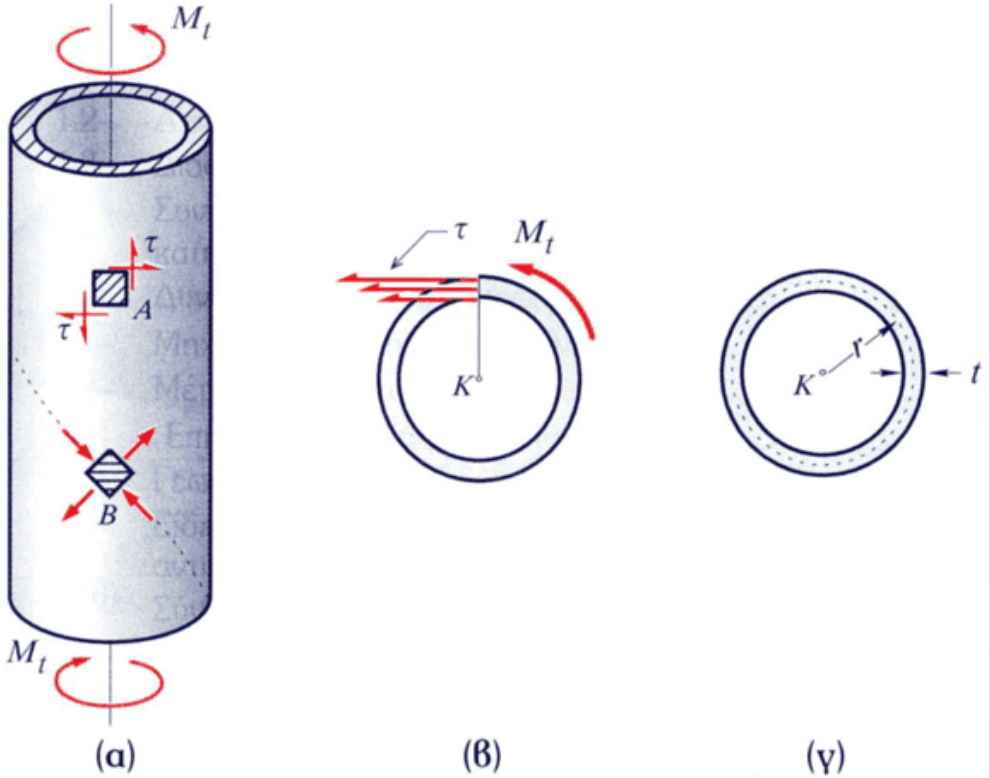
Στρέψη

Στρέψη ράβδων μη κυκλικής διατομής

Ορθογωνική διατομή

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 15



Στρέψη λεπτότοιχης ράβδου με κυκλική διατομή

Διατμητικές τάσεις, πολική ροπή αδράνειας για **λεπτότοιχη κλειστή διατομή**:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r$$

$$I_p = 2\pi r^3 t, r = (D + d)/4$$

όπου r είναι η ακτίνα της μέσης περιφέρειας, t είναι το πάχος του τοιχώματος. Οπότε με αντικατάσταση στην σχέση υπολογισμού της τάσης θα έχουμε:

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi r^2 t}$$

Αντίστοιχα, η γωνία στροφής ϕ θα είναι ίση:

$$\phi = \frac{M_t \ell}{GI_p} = \frac{M_t \ell}{2G\pi r^3 t}, \theta = \frac{\phi}{\ell}$$

$$I_p^{\alpha\nu} = t^3 s/3, \quad s \approx 2\pi r$$

$$\theta^{\alpha\nu} = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{3M_t}{2G\pi t^3 r}, \tau^{\alpha\nu} = \frac{3M_t}{2\pi t^2 r}$$

Για **ανοικτή λεπτότοιχη διατομή** με μέσο μήκος s , αποδεικνύεται ότι η πολική ροπή αδράνειας είναι:

Οπότε προκύπτουν οι εξής σχέσεις υπολογισμού της διατμητικής τάσης και της ανηγμένης γωνίας στροφής:



Για κλειστή διατομή: $I_p^{\kappa\lambda} = 2\pi r^3 t$, $\tau^{\kappa\lambda} = \frac{M_t}{2\pi r^2 t}$, $\theta^{\kappa\lambda} = \frac{M_t}{2G\pi r^3 t}$

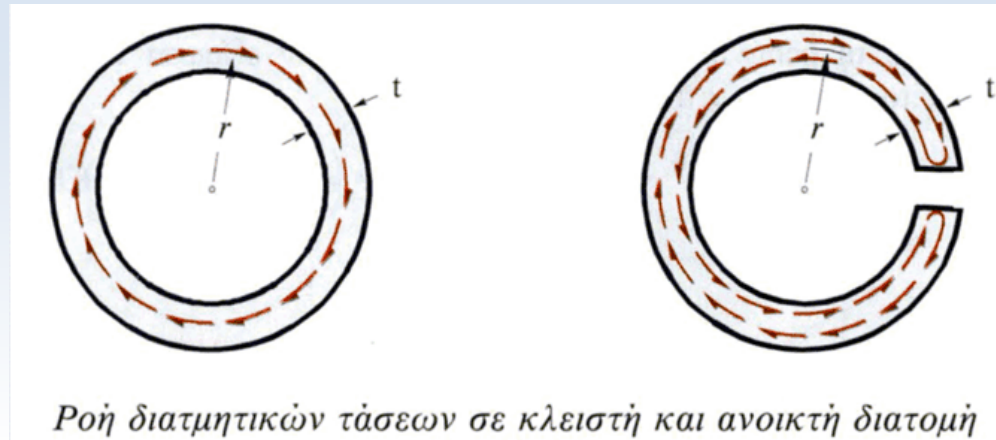
Για ανοικτή διατομή: $I_p^{\alpha\nu} = \frac{2\pi r t^3}{3}$, $\tau^{\alpha\nu} = \frac{3M_t}{2\pi r t^2}$, $\theta^{\alpha\nu} = \frac{3M_t}{2G\pi r t^3}$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει: $\frac{\tau^{\alpha\nu}}{\tau^{\kappa\lambda}} = 3\left(\frac{r}{t}\right)$, $\frac{\theta^{\alpha\nu}}{\theta^{\kappa\lambda}} = 3\left(\frac{r}{t}\right)^2$

Έτσι αν για παράδειγμα είναι $r \geq 10t$, από τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε:

$$\tau^{\alpha\nu} \geq 30 \tau^{\kappa\lambda}, \quad \theta^{\alpha\nu} \geq 300 \theta^{\kappa\lambda}$$

δηλαδή η ανοικτή καταπονείται και παραμορφώνεται πολύ πιο έντονα από ότι η αντιστοιχη κλειστή. Για το λόγο αυτό, πρέπει να αποφεύγεται η χρησιμοποίηση της ανοικτής διατομής στην στρεπτική καταπόνηση.



Στρέψη

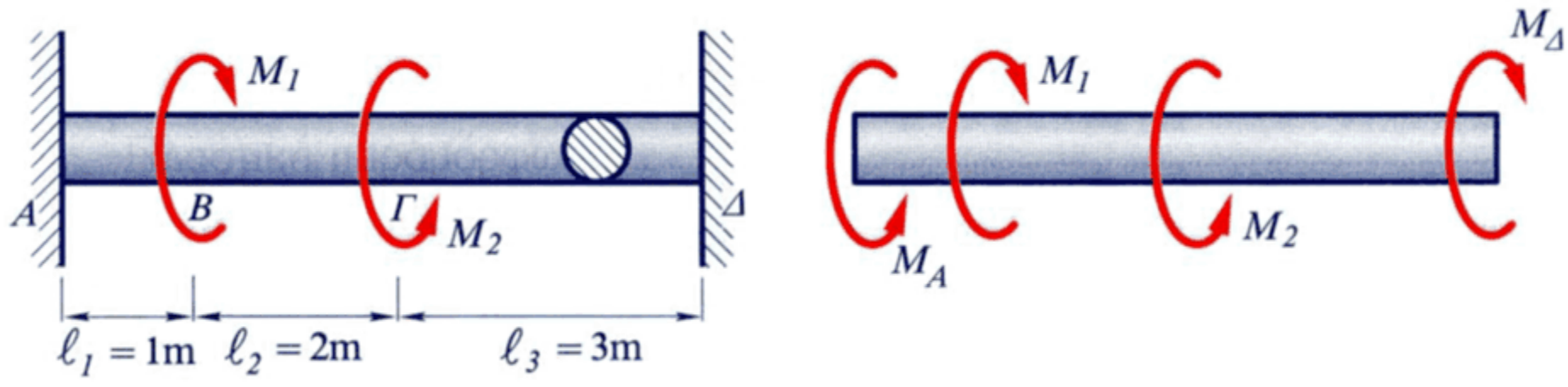
Στρέψη λεπτότοιχων σωλήνων

Σύγκριση ανοικτών – κλειστών λεπτότοιχων διατομών

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 17

Μία ράβδος κυκλικής σταθερής διατομής είναι πακτωμένη στο άκρα Α και Δ. Αν φορτίζεται από τις ροπές $M_1 = 3 \text{ kNm}$ και $M_2 = 2 \text{ kNm}$ να βρεθούν οι ροπές αντίδρασης στο πακτωμένα άκρα Α και Δ.



Χαλύβδινη άτρακτος και σωλήνας από αλουμίνιο συνδέονται στερεά μεταξύ τους. Αν οι ροπές στρέψης που εφαρμόζονται στην άτρακτο και το σωλήνα είναι $M_{t1} = 6000 \text{ Nm}$ και $M_{t2} = 4000 \text{ Nm}$ να υπολογιστούν οι μέγιστες διατμητικές τάσεις που θα αναπτυχθούν στα δύο υλικά. Επίσης να υπολογιστεί η γωνία στροφής της διατομής τέσσερα.

Δίνονται το $\lambda = 20 \text{ cm}$, $d=6 \text{ cm}$, $D=10 \text{ cm}$ καθώς και τα μέτρα διάτμησης του χάλυβα $G_1 = 80 \text{ GPa}$ και του αλουμινίου $G_2 = 27 \text{ GPa}$.

