

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ-Θ

Κάμψη



Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 1

Η εντατική κατάσταση στην οποία βρίσκεται μία δοκός, που υποβάλλεται σε εγκάρσια φόρτιση, λέγεται κάμψη.



Αμφιέριστη δοκός

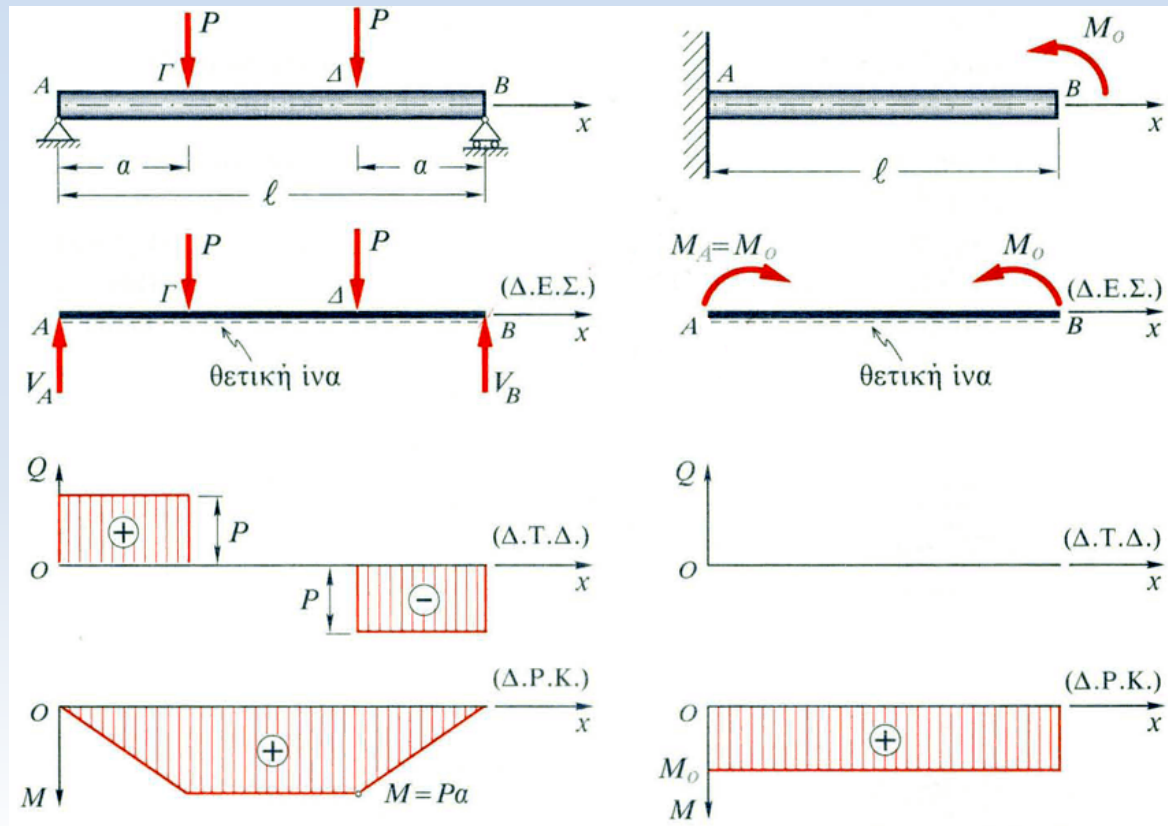
Πρόβολος

Κατά την καταπόνηση σε κάμψη αναπτύσσονται καμπτικές ροπές, οι οποίες προκαλούν αφενός μεν καμπύλωση της δοκού, αφετέρου δε δημιουργία τάσεων εντός του υλικού της. Έτσι λοιπόν, με την έννοια κάμψη εννοούμε τόσο τις αναπτυσσόμενες τάσεις, όσο και τις προκαλούμενες παραμορφώσεις που ονομάζονται συνήθως βέλη κάμψης.



Η καταπόνηση σε κάμψη, διακρίνεται σε δύο είδη:

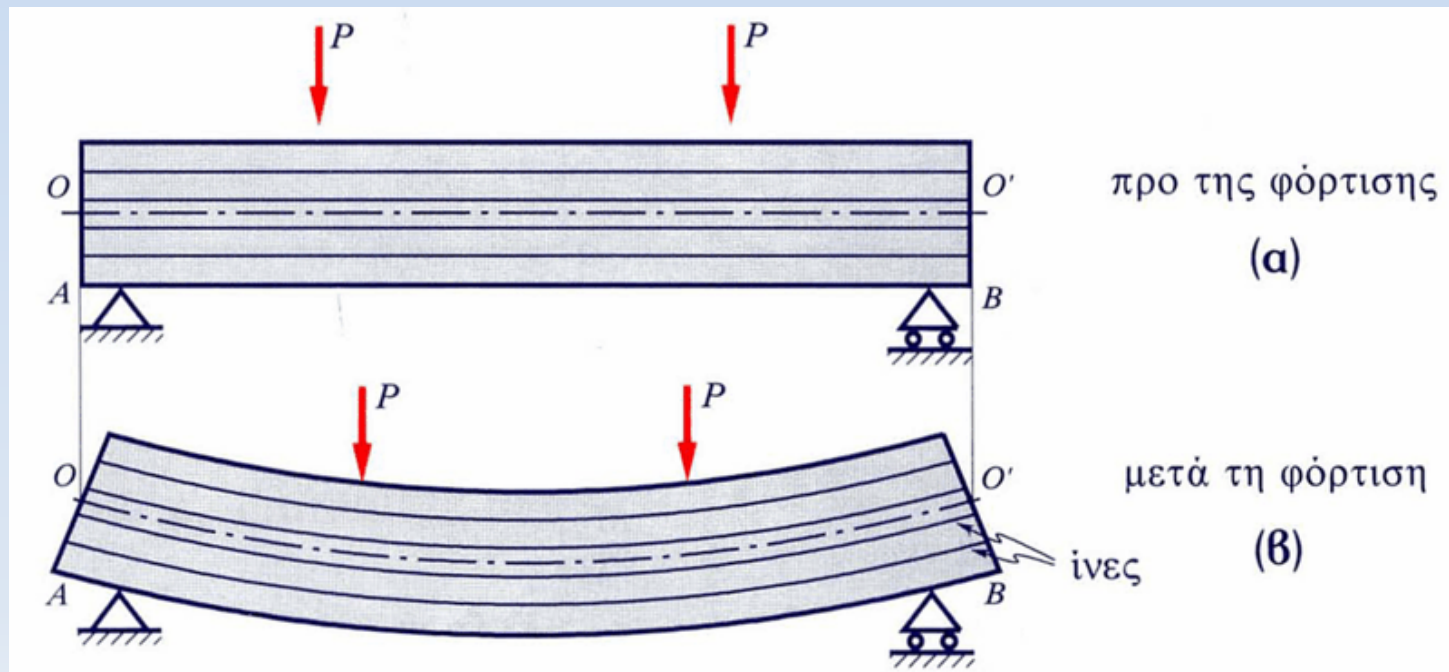
- Στην καθαρή κάμψη, κατά την οποία στη δοκό ή σε τμήμα της εμφανίζεται μόνον καμπτική ροπή, ($N = Q = M_t = 0, M_b \neq 0$).
- Στη γενική κάμψη, κατά την οποία εμφανίζεται εκτός της καμπτικής ροπής και τέμνουσα δύναμη ($M_b, Q \neq 0$).



Κάμψη Καθαρή και Γενική κάμψη

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 3



Η κάμψη είναι μια καταπόνηση, η οποία αναλύεται σε εφελκυσμό, θλίψη και διάτμηση.

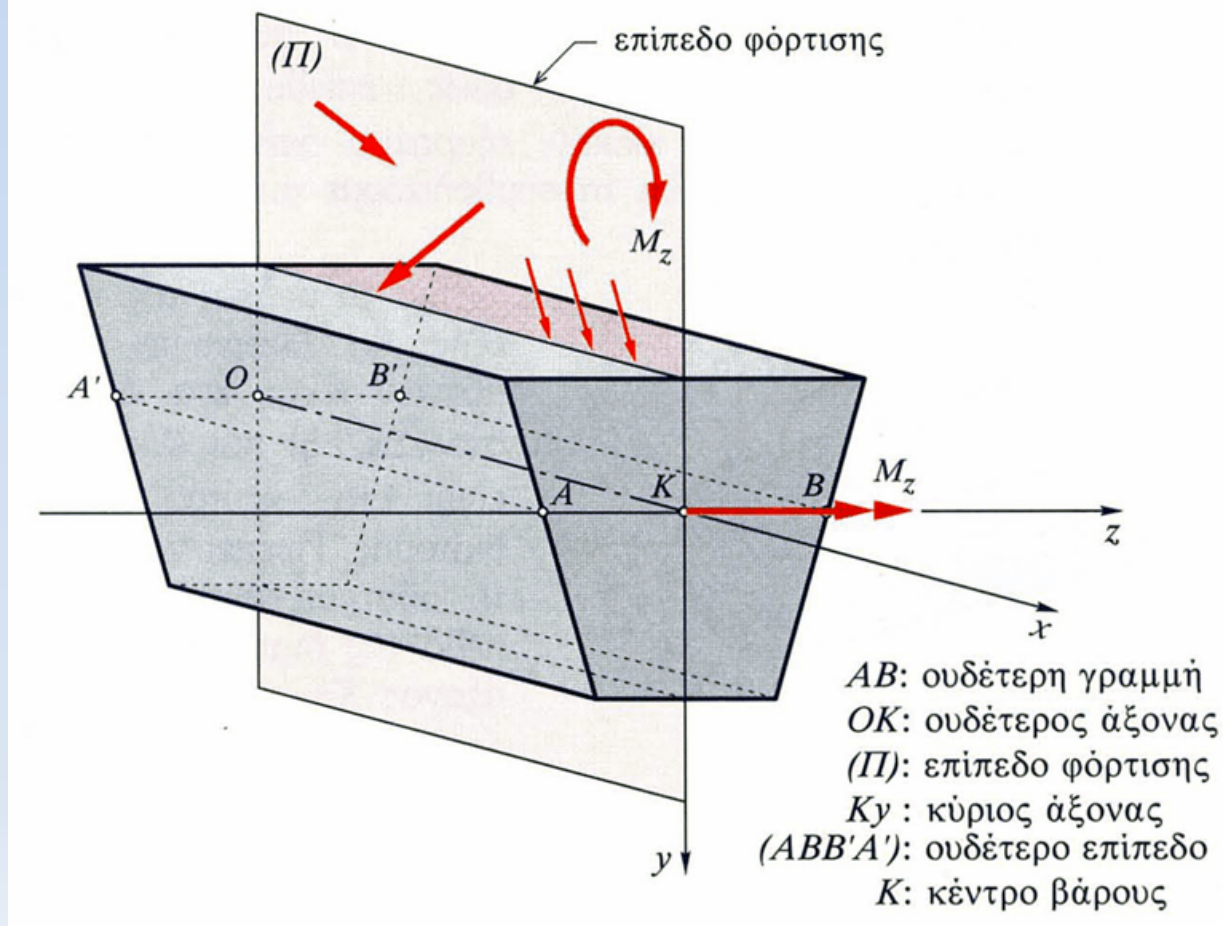


Κάμψη

Γενική ανάλυση της κάμψης

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 4



Οι ίνες που δεν καταπονούνται ούτε σε εφελκυσμό ούτε σε θλίψη, αλλά μόνο σε διάτμηση, ονομάζονται **ουδέτερες ίνες** και το επίπεδο που αποτελούν ονομάζεται **ουδέτερο επίπεδο** ή **ουδέτερη στρώση**. Η τομή OK του ουδέτερου αυτού επιπέδου, με το επίπεδο συμμετρίας XY της δοκού καλείται **ουδέτερος άξονας**, που είναι ο άξονας χ. Το ίχνος του ουδέτερου επιπέδου σε μία διατομή της δοκού ονομάζεται **ουδέτερη γραμμή**, όπως είναι η AB.

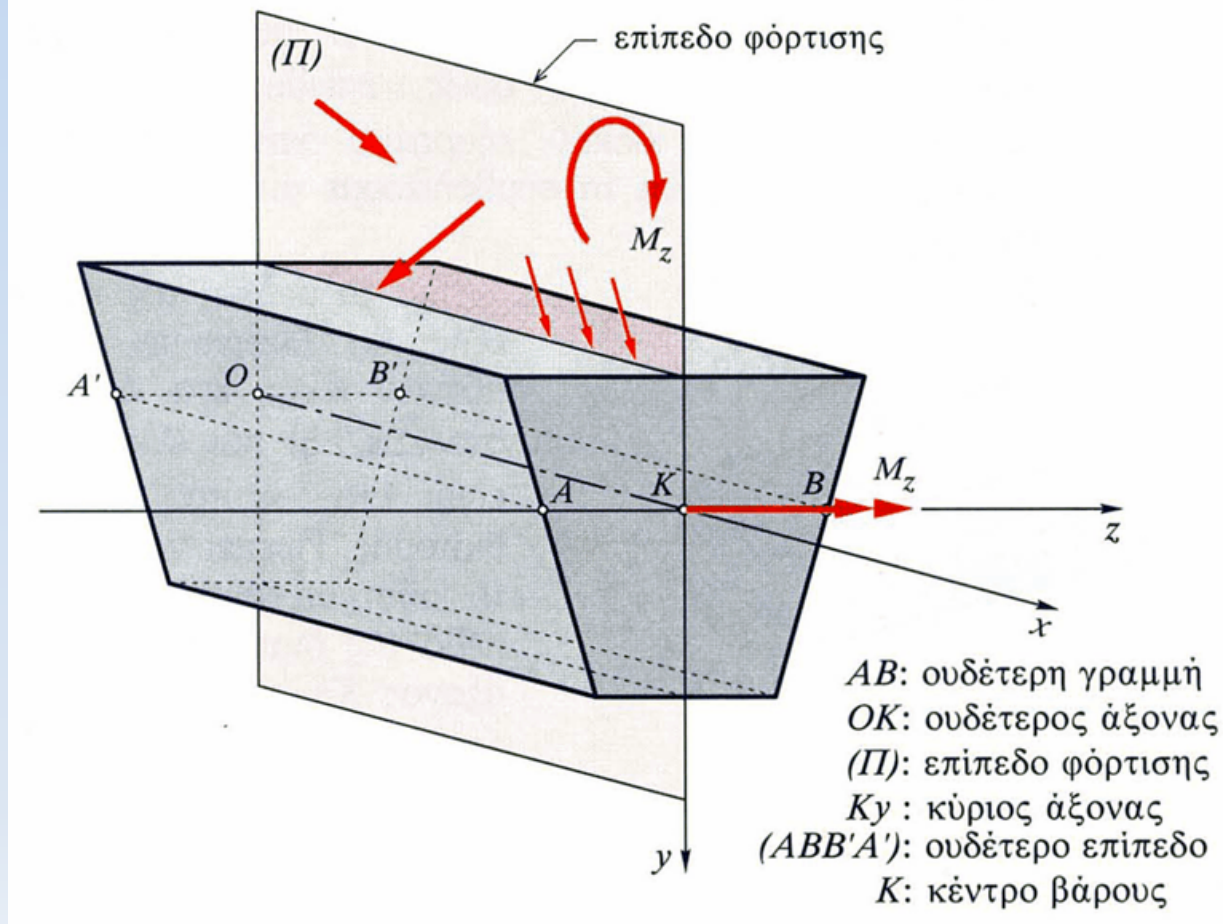


Κάμψη

Γενική ανάλυση της κάμψης

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 5



Τα εξωτερικά φορτία που δρουν στη δοκό βρίσκονται στο **επίπεδο φόρτισης** (Π) , το οποίο περιέχει το διαμήκη κεντροβαρικό άξονα Kx της δοκού, καθώς και έναν **κύριο άξονα αδράνειας** της διατομής. Στην προκειμένη περίπτωση, κύριος είναι ο άξονας Y επειδή είναι **άξονας συμμετρίας** της διατομής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, το διάνυσμα της ροπής κάμψης να βρίσκεται επάνω στον άλλον **κεντροβαρικό άξονα αδράνειας** της διατομής και να είναι προφανώς κάθετο στο επίπεδο φόρτισης.



Κάμψη

Γενική ανάλυση της κάμψης

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

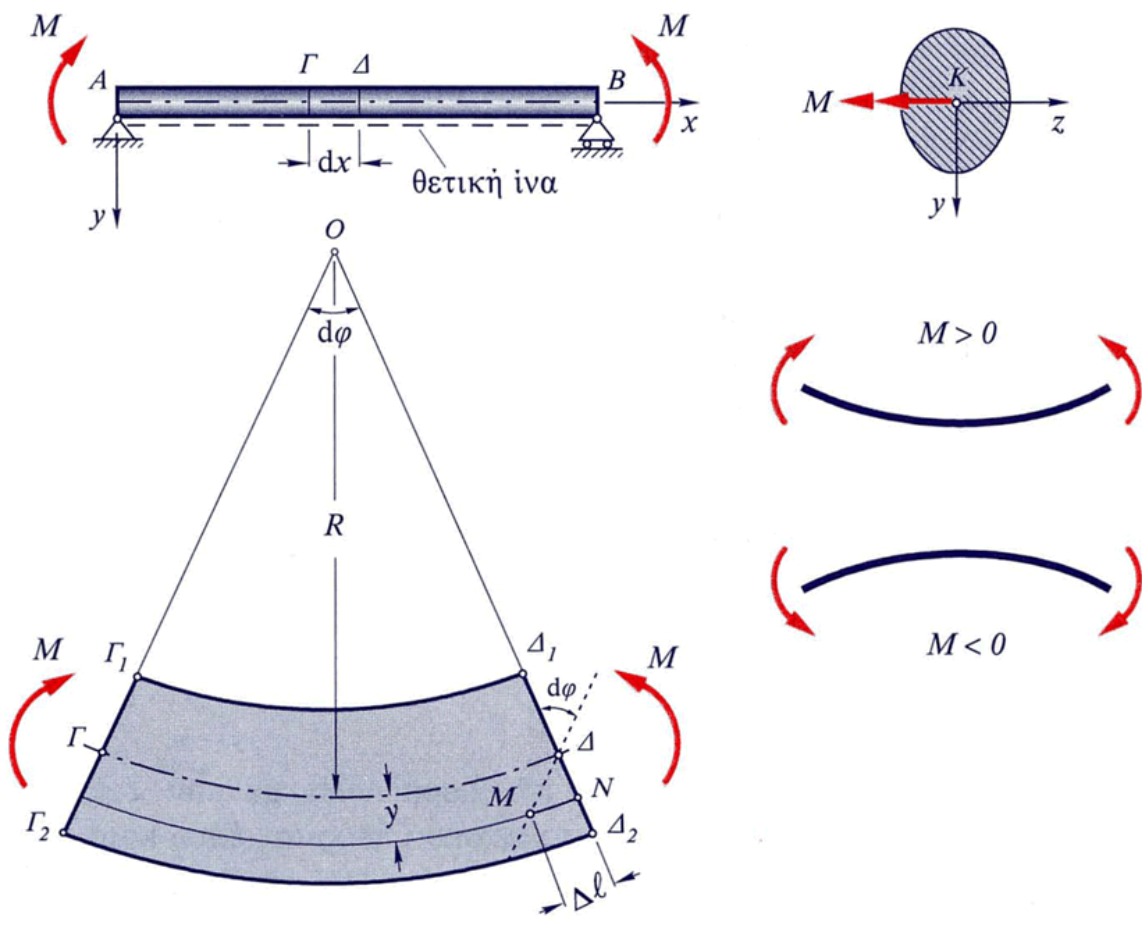
Σχήμα 6

Παραδοχές κάμψης

Προκειμένου να μελετηθεί η καταπόνηση σε κάμψη, γίνονται οι εξής απλοποιητικές παραδοχές:

- Ο διαμήκης άξονας της δοκού είναι ευθύγραμμος.
- Οι γραμμικές διαστάσεις της διατομής είναι μικρές συγκρινόμενες με το μήκος της δοκού.
- Η διατομή της δοκού έχει έναν τουλάχιστον άξονα συμμετρίας, που περιέχεται στο επίπεδο φόρτισης.
- Ισχύει η υπόθεση των Bernoulli-Navier κατά την οποία:
 - Κάθε διατομή επίπεδη και κάθετη στον άξονα της δοκού πριν την παραμόρφωση, παραμένει επίπεδη και κάθετη και μετά από αυτή.**
- Ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι μικρότερες από το όριο αναλογίας του υλικού.
- Όλα τα φορτία ενεργούν κάθετα στον άξονα της δοκού και βρίσκονται μέσα στο επίπεδο φόρτισης. Το επίπεδο φόρτισης, ή περιέχει τον άξονα συμμετρίας της διατομής ή είναι κάθετο σε αυτόν.
- Η ροπή κάμψης θεωρείται θετική, όταν τείνει να εφελκύσει την ίνα αναφοράς που λαμβάνεται η κατώτερη ίνα της δοκού.





Από τα όμοια τρίγωνα ΟΓΔ & ΔΜΝ προκύπτει:

$$\frac{\Delta \ell}{dx} = \frac{y}{R}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\frac{\Delta \ell}{dx} = \varepsilon$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\sigma = \frac{E}{R} y$$

Η προηγούμενη εξίσωση εκφράζει τη **γραμμικότητα μεταβολής των ορθών τάσεων σ** , σε συνάρτηση με την απόσταση y από την ουδέτερη γραμμή και διατυπώνεται με τη φράση:

Η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε τυχαίο σημείο της διατομής μιας καμπτόμενης δοκού, είναι ανάλογη της απόστασης του σημείου αυτού από την ουδέτερη γραμμή. Στη δε ουδέτερη γραμμή η ορθή τάση είναι μηδέν.



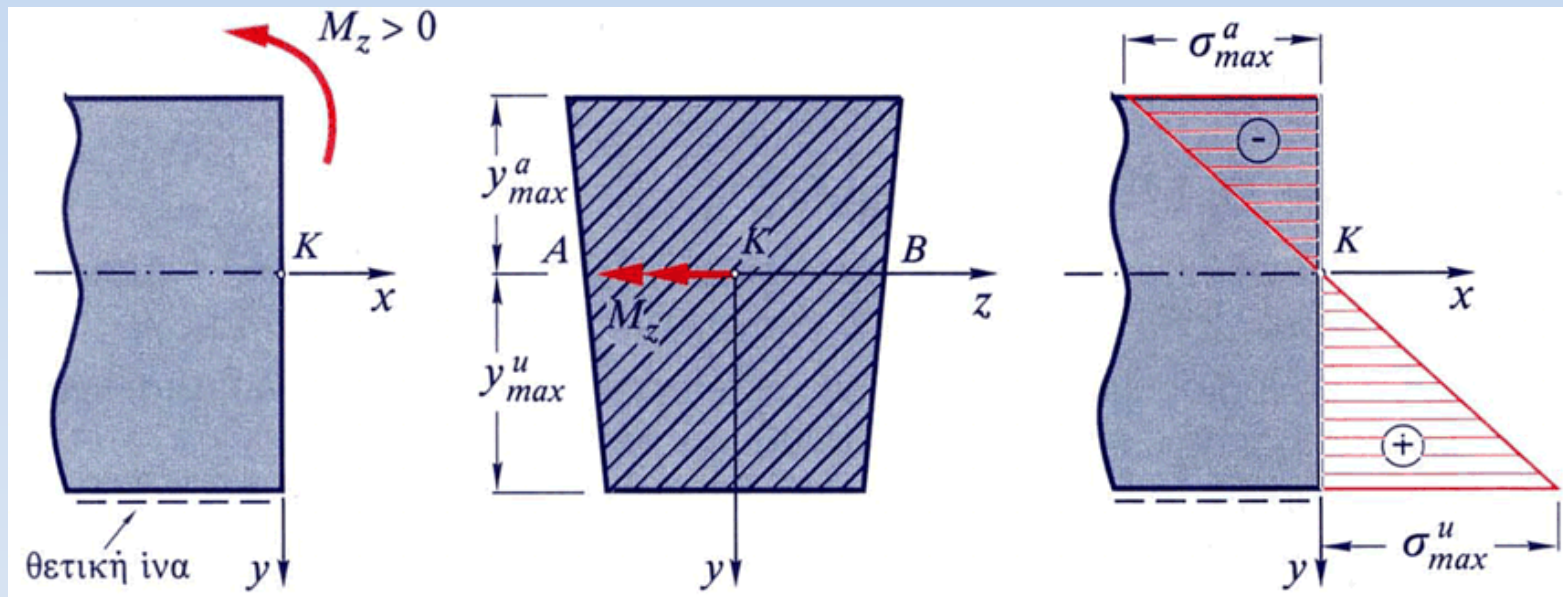
Κάμψη

Βασικοί τύποι της κάμψης

Κατανομή ορθών τάσεων

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 8



$$\sigma_{max}^a = \frac{E}{R} y_{max}^a, \quad \sigma_{max}^u = \frac{E}{R} y_{max}^u$$

- Για θετική ροπή κάμψης, οι κατώτατες ίνες υφίσταται τις μέγιστες ελκυστικές, ενώ οι ανώτατες τις μέγιστες θλιπτικές τάσεις, διαφορετικά ισχύει το αντίστροφο.
- Θετική ροπή κάμψης δημιουργείται σε μία δοκό, όταν καταπονείται από εγκάρσιες δυνάμεις με φορά από επάνω προς τα κάτω, ενώ για τον πρόβολο ισχύουν τα ακριβώς αντίθετα.
- Η κατανομή των ορθών τάσεων στη διατομή μιας καμπτόμενης δοκού είναι τριγωνική.

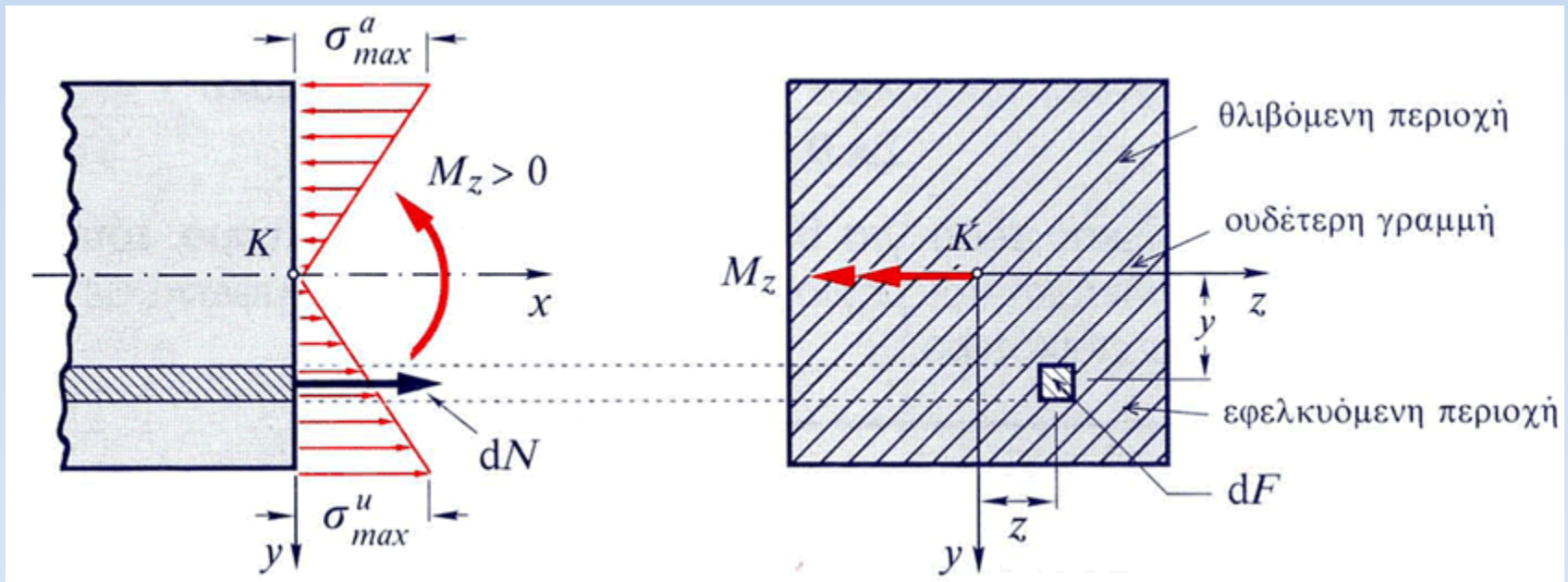


Κάμψη

Βασικοί τύποι της κάμψης

Κατανομή ορθών τάσεων

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας



➤ Λέγοντας ουδέτερη γραμμή εννοούμε τα σημεία εκείνα της διατομής, τα οποία έχουν μηδενικές τάσεις, ή όπως λέγεται είναι ελεύθερα τάσεων.

➤ Η ουδέτερη γραμμή διέρχεται από το κέντρο βάρους K της διατομής και τη διαχωρίζει σε εφελκυόμενη και θλιβόμενη περιοχή.



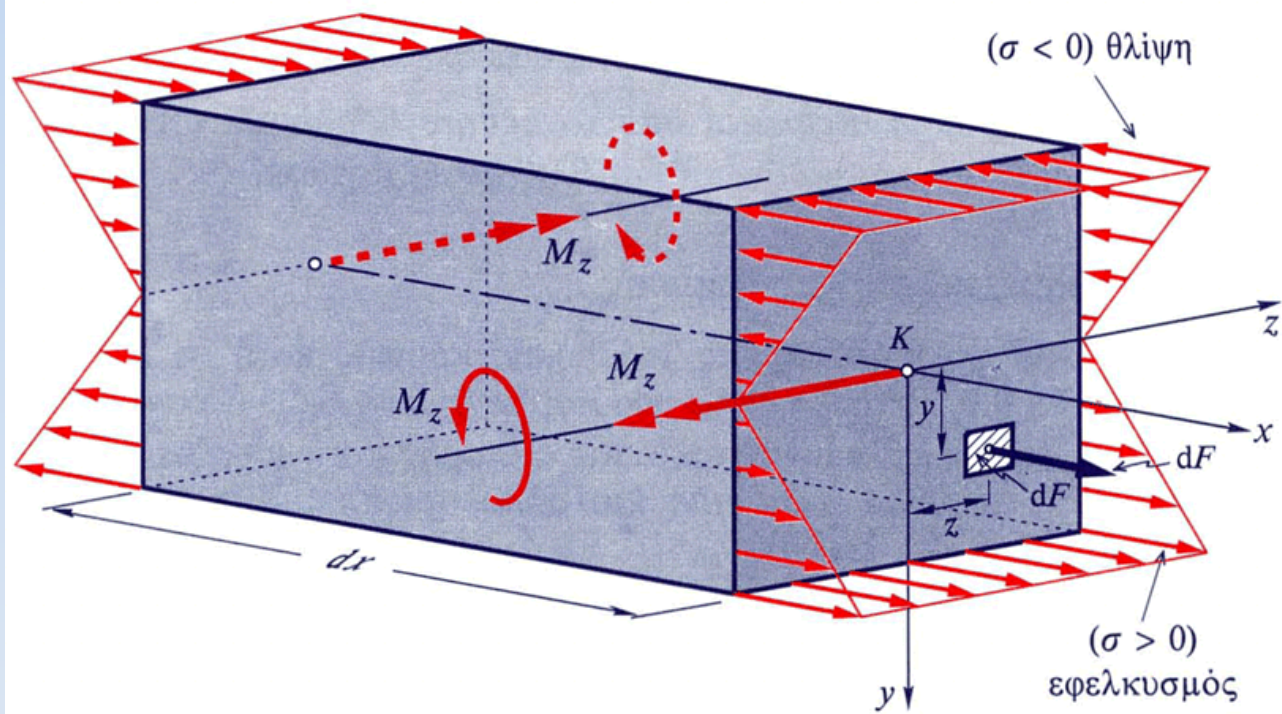
Κάμψη

Βασικοί τύποι της κάμψης

Θέση της Ουδέτερης Γραμμής

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 10

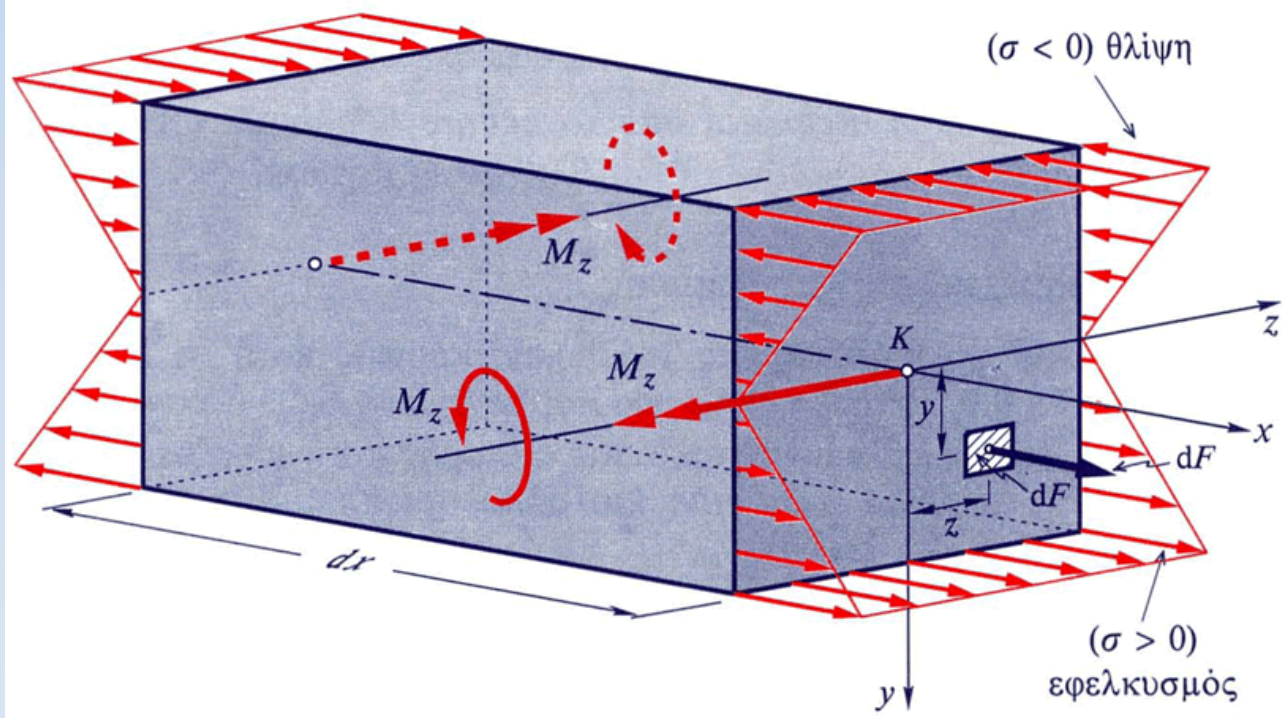


θα πρέπει το άθροισμα των ροπών των στοιχ. δυνάμεων $\sigma \cdot dF$ ως προς τον άξονα Z, να ισούται με την καμπτική ροπή M_Z που ενεργεί στη δοκό:

$$M_Z = \int_F y \sigma dF \stackrel{\sigma = \frac{E}{R} y}{=} \frac{E}{R} \int_F y^2 dF \stackrel{I_Z = \int_F y^2 dF}{=} \frac{E}{R} I_Z \stackrel{\frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y}}{\Rightarrow} M_Z = \frac{\sigma}{y} \cdot I_Z \Rightarrow$$

$$\sigma_x = \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y$$





Όπου y είναι η απόσταση του εξεταζόμενου σημείου (ή γενικότερα της εξεταζόμενης ίνας) από την ουδέτερη γραμμή και είναι προφανώς **θετική** για σημεία κάτω από αυτήν, ενώ είναι **αρνητική** για σημεία επάνω από αυτήν, λόγω της επιλογής του συστήματος αναφοράς.

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Η συγκεκριμένη σχέση αποτελεί το νόμο των ορθών τάσεων σε συνάρτηση με τη ροπή κάμψης και διατυπώνεται με τη φράση:

Η αναπτυσσόμενη ορθή τάση είναι ανάλογη της **ροπής κάμψης**, ανάλογη της **απόστασης** της εξεταζόμενης ίνας από την ουδέτερη γραμμή και αντιστρόφως ανάλογη της **ροπής αδράνειας** της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή.



Κάμψη

Βασικοί τύποι της κάμψης

Θεμελιώδης νόμος της κάμψης

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Στην περίπτωση της καθαρής κάμψης, όπου η M_z παραμένει σταθερή, η μέγιστη ορθή τάση υπολογίζεται από την σχέση:

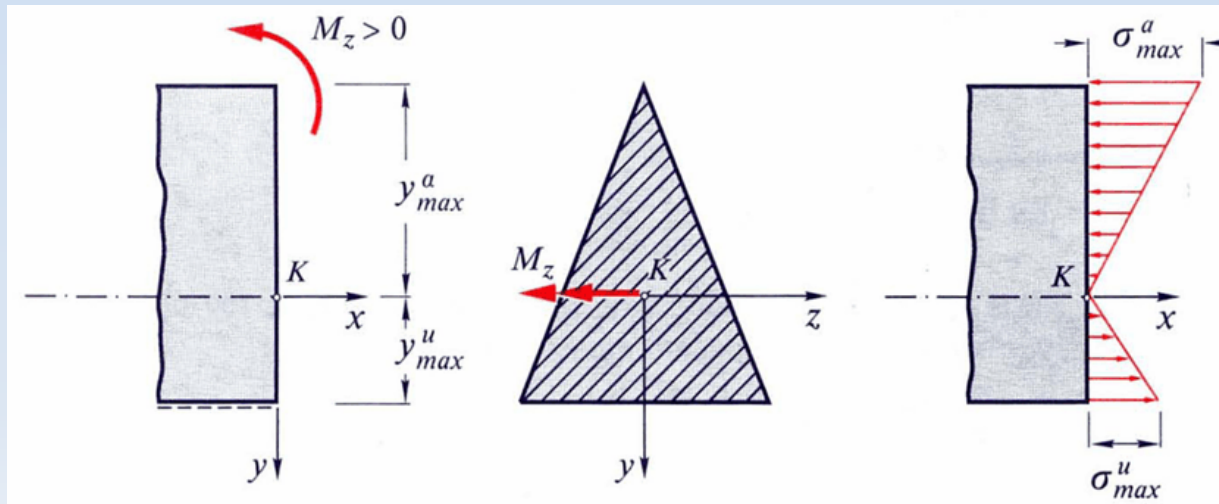
$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max}$$

Ενώ στην περίπτωση της γενικής κάμψης, όπου η M_z μεταβάλλεται κατά το μήκος της δοκού, η μέγιστη ορθή τάση υπολογίζεται από την σχέση:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max}$$

Η ποσότητα $I_z/y_{\max}$ είναι σταθερή για δεδομένη γεωμετρία διατομής και ονομάζεται ροπή αντίστασης W .

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$



Στην περίπτωση όπου ο ουδέτερος άξονας της διατομής δεν είναι και ταυτόχρονα άξονας συμμετρίας, τότε θα υπάρχουν 2 αποστάσεις $y_{\max}$ διαφορετικές ως προς την ουδέτερη γραμμή και θα ισχύουν οι σχέσεις:

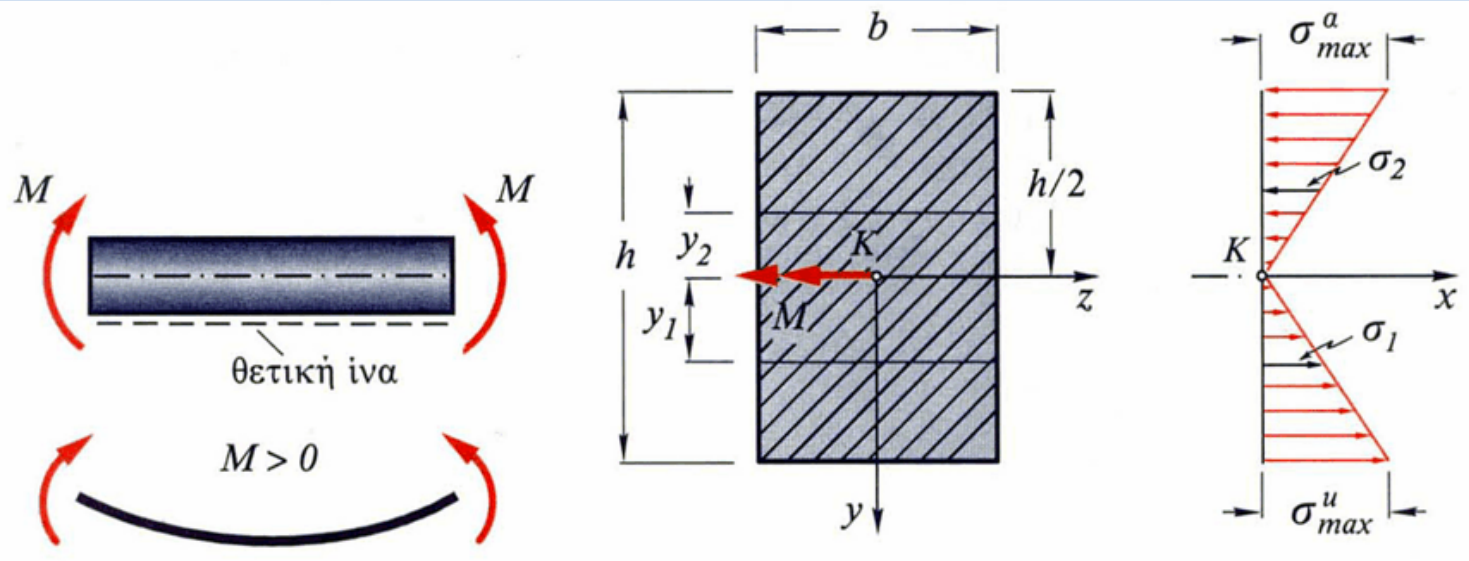
$$W_a = \frac{I_z}{y_{\max}^a}, \quad W_{\kappa} = \frac{I_z}{y_{\max}^{\kappa}}$$

$$\sigma_{\max}^a = \frac{M_{\max}}{W_a}, \quad \sigma_{\max}^{\kappa} = \frac{M_{\max}}{W_{\kappa}}$$



Μια χαλύβδινη δοκός φορτίζεται με ροπή $M = 8 \text{ kNm}$ σε κάθε άκρο της. Η δοκός είναι ορθογωνικής διατομής με διαστάσεις $b \times h = 6 \times 10 \text{ cm}^2$. Να υπολογιστούν:

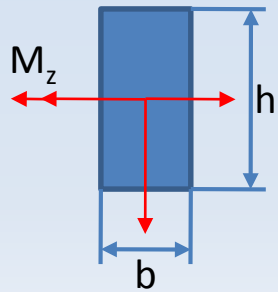
- 1. Οι ορθές τάσεις στις θέσεις $Y_1=3 \text{ cm}$ και $Y_2=-2 \text{ cm}$ της διατομής.
- 2. Οι αναπτυσσόμενες μέγιστες ορθές τάσεις στη διατομή.



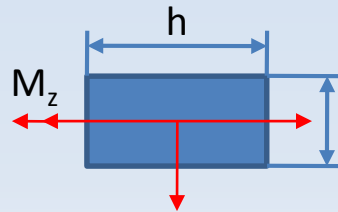
$$\text{Συνθήκη αντοχής: } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq \frac{\sigma_{\theta\rho}}{\nu} = \sigma_{\varepsilon\pi}$$

$\sigma_{\max}$	επιτρεπόμενη τάση [N/mm ²]
W	ροπή αντίστασης [mm ³]
$\sigma_{\theta\rho}$	όριο θραύσης [N/mm ²]
ν	συντελεστής ασφαλείας

Προκειμένου να μειωθούν οι αναπτυσσόμενες τάσεις εντός του υλικού θα πρέπει η ροπή αντίστασης W να είναι το δυνατόν μεγαλύτερη. Για παράδειγμα στην παρακάτω ορθογωνική διατομή, αναλόγως του προσανατολισμού της διατομής προκύπτουν διαφορετικές ροπές αντίστασης:



$$W_1 = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$



$$W_2 = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{b/2} = \frac{hb^2}{6}$$

$$W_1 > W_2 \Rightarrow \sigma_{\max 1} < \sigma_{\max 2}$$

Επιλογή διατομής:

$$W_{\alpha\pi} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{\varepsilon\pi}}$$



Συμ- βολι- σμός	Κανονικές διαστάσεις					F cm ²	G Kg/m	Άξονας					
								x-x			y-y		
	h mm	b mm	s mm	t mm	r mm			I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm
I	Υψίκορμοι δοκοί I κατά DIN 1025/I												
80	80	42	3.9	5.9	2.3	7.57	5.94	77.8	19.5	3.20	6.29	3.00	0.91
100	100	50	4.5	6.8	2.7	10.6	8.34	171	34.2	4.01	12.2	4.88	1.07
120	120	58	5.1	7.7	3.1	14.2	11.1	328	54.7	4.81	21.5	7.41	1.23
140	140	66	5.7	8.6	3.4	18.2	14.3	573	81.9	5.61	35.2	10.7	1.40
160	160	74	6.3	9.5	3.8	22.8	17.9	935	117	6.40	54.7	14.8	1.55
180	180	82	6.9	10.4	4.1	27.9	21.9	1450	161	7.20	81.3	19.8	1.71
200	200	90	7.5	11.3	4.5	33.4	26.2	2140	214	8.00	117	26.0	1.87
220	220	98	8.1	12.2	4.9	39.5	31.1	3060	278	8.80	162	33.1	2.02
240	240	106	8.7	13.1	5.2	46.1	36.2	4250	354	9.59	221	41.7	2.20
260	260	113	9.4	14.1	5.6	53.3	41.9	5740	442	10.4	288	51.0	2.32
280	280	119	10.1	15.2	6.1	61.0	47.9	7590	542	11.1	364	61.2	2.45
300	300	125	10.8	16.2	6.5	69.0	54.2	9800	653	11.9	451	72.2	2.56
320	320	131	11.5	17.3	6.9	77.7	61.0	12510	782	12.7	555	84.7	2.67
340	340	137	12.2	18.3	7.3	86.7	68.0	15700	923	13.5	674	98.4	2.80
360	360	143	13.0	19.5	7.8	97.0	76.1	19610	1090	14.2	818	114	2.90
380	380	149	13.7	20.5	8.2	107	84.0	24010	1260	15.0	975	131	3.02
400	400	155	14.4	21.6	8.6	118	92.4	29210	1460	15.7	1160	149	3.13
425	425	163	15.3	23.0	9.2	132	104	36970	1740	16.7	1440	176	3.30
450	450	170	16.2	24.3	9.7	147	115	45850	2040	17.7	1730	203	3.43
475	475	178	17.1	25.6	10.3	163	128	56480	2380	18.6	2090	235	3.60
500	500	185	18.0	27.0	10.8	179	141	68740	2750	19.6	2480	268	3.72
550	550	200	19.0	30.0	11.9	212	166	99180	3610	21.6	3490	349	4.02
600	600	215	21.6	32.4	13.0	254	199	139000	4630	23.4	4670	434	4.30

- Οι άξονες x-x και y-y είναι οι κύριοι άξονες και t, s είναι τα πάχη.
- I_x, I_y οι ροπές αδράνειας, i_x, i_y οι ακτίνες αδράνειας ως προς τους άξονες x, y.
- W_x, W_y οι ροπές αντίστασης ως προς τους άξονες x, y αντίστοιχα.
- F το εμβαδόν της διατομής και G βάρος ανά τρέχον μέτρο της δοκού.
- r₁, r₂ η ακτίνα καμπυλότητας στα πέλματα και στον κορμό της διατομής.



Κάμψη

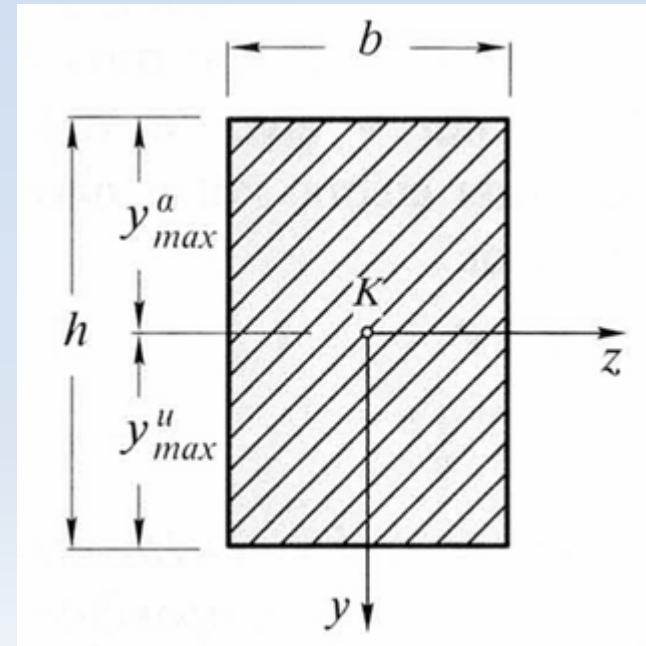
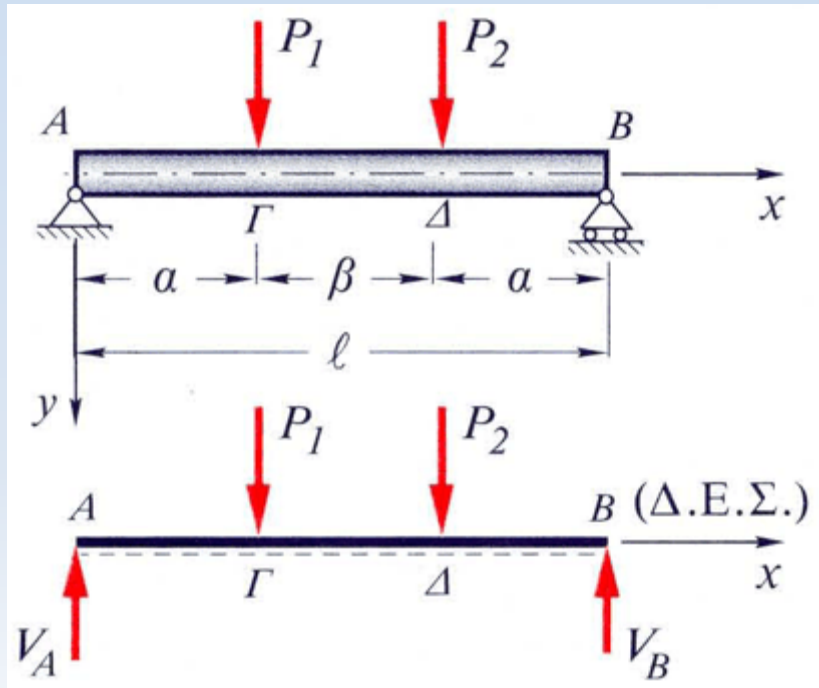
Πίνακας γεωμετρικών στοιχείων διατομής I

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 16

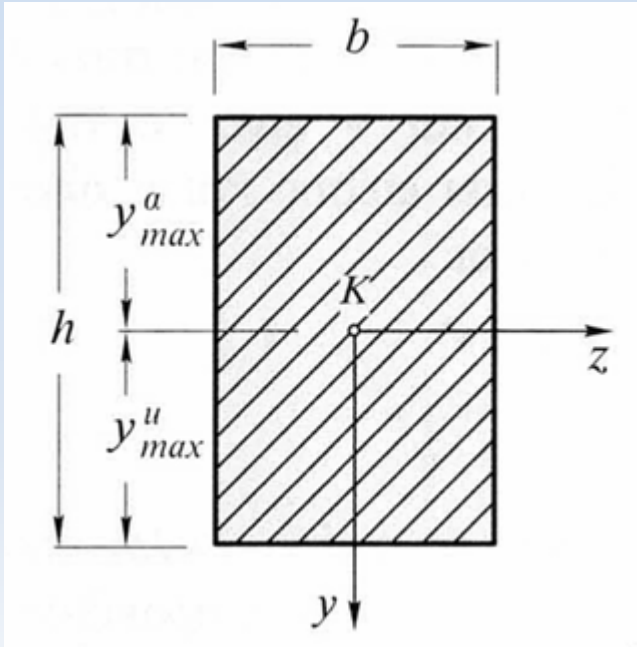
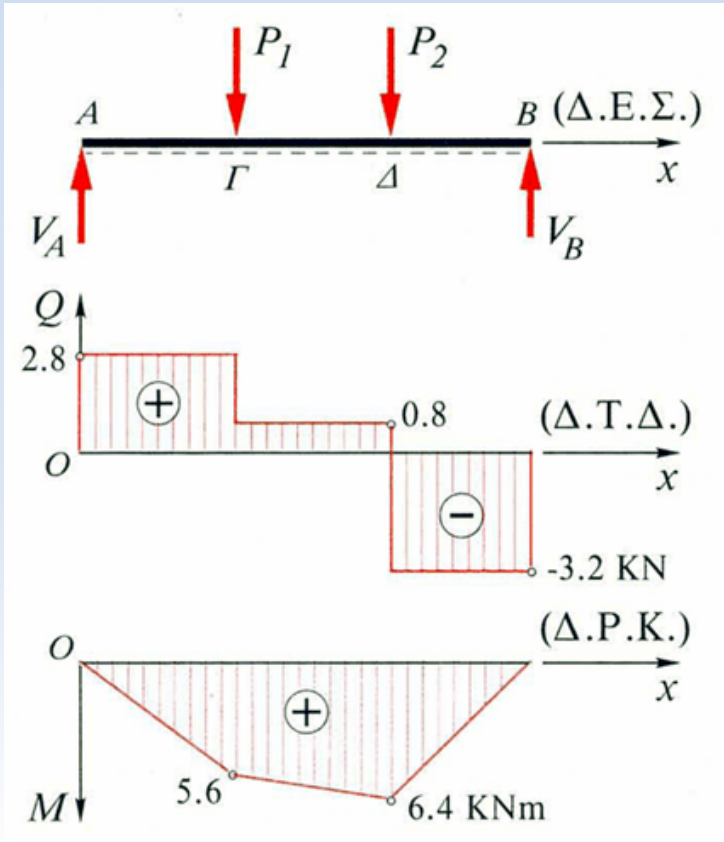
Αμφιέρειστη ξύλινη δοκός ΑΕ μήκους $\lambda = 5 \text{ m}$, $\alpha = 2 \text{ m}$ φορτίζεται με φορτία $P_1 = 2 \text{ kN}$ και $P_2 = 4 \text{ kN}$. Ζητούνται:

1. Να υπολογιστεί η απαιτούμενη ροπή αντίστασης της διατομής αν η επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό και θλίψη του υλικού της είναι απολύτως ίσες με $\sigma_{\varepsilon\pi} = 10 \text{ N/mm}^2$. Δίνεται $\alpha = 2 \text{ m}$.
2. Αν η διατομή είναι ορθογωνική, με ύψος h διπλάσιο του πλάτους b ($h = 2b$), να υπολογιστούν οι διαστάσεις b και h .



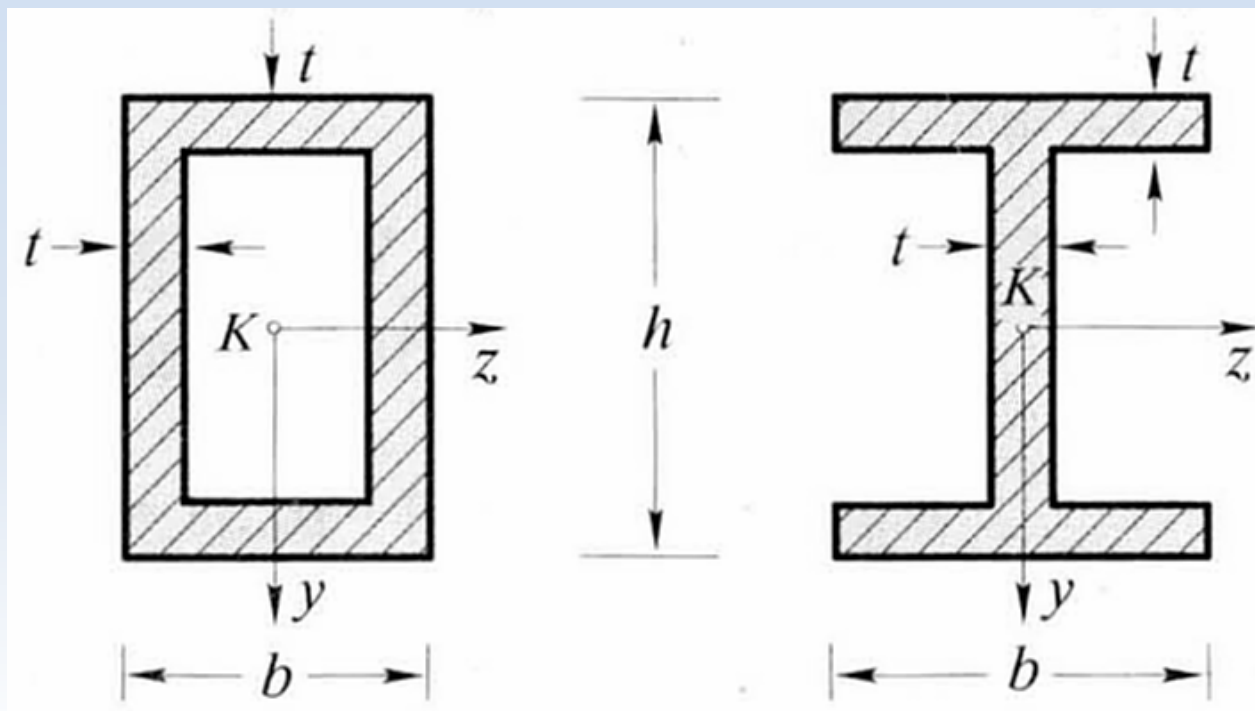
Αμφιέρειστη ξύλινη δοκός ΑΕ μήκους $\lambda = 5\text{ m}$, $\alpha = 2\text{ m}$ φορτίζεται με φορτία $P_1 = 2\text{ kN}$ και $P_2 = 4\text{ kN}$. Ζητούνται:

- 1. Να υπολογιστεί η απαιτούμενη ροπή αντίστασης της διατομής αν η επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό και θλίψη του υλικού της είναι απολύτως ίσες με $\sigma_{\epsilon\pi} = 10\text{ N/mm}^2$. Δίνεται $\alpha = 2\text{ m}$.
- 2. Αν η διατομή είναι ορθογωνική, με ύψος h διπλάσιο του πλάτους b ($h = 2b$), να υπολογιστούν οι διαστάσεις b και h .

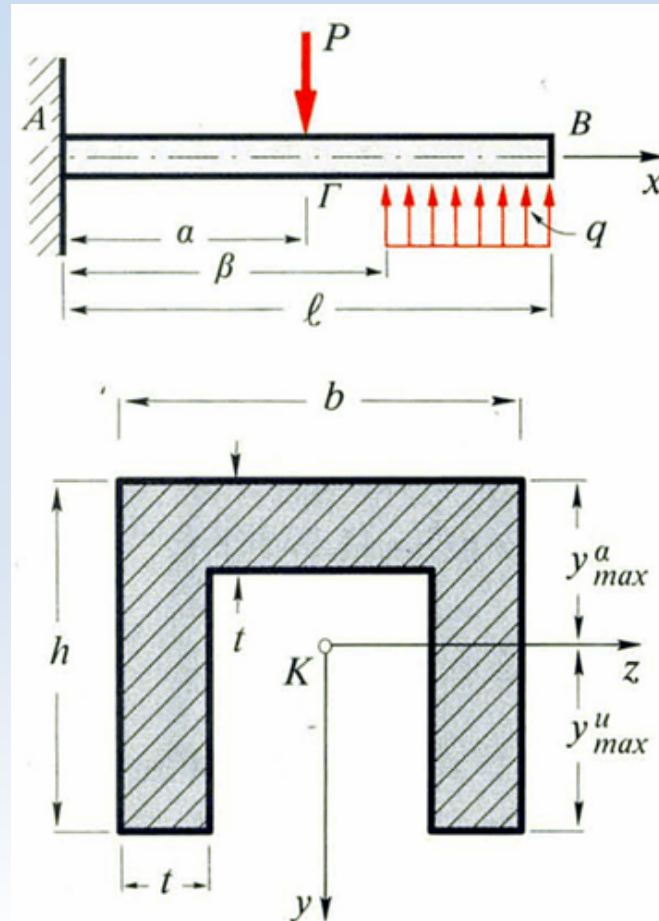


Στο προηγούμενο παράδειγμα της αμφιέρειστης δοκού AB, ζητείται να προσδιοριστεί:

1. Το απαιτούμενο πάχος t της διατομής αν αυτή είναι κοίλη ορθογωνική με εξωτερικές διαστάσεις $b \times h$ όπου $b = h/2$ και $t = b/3$, για την ίδια επιτρεπόμενη τάση του υλικού .
2. Αν η διατομή είναι σχήματος διπλού ταφ με $b = h/2$ και $t = b/3$, να υπολογιστεί το απαιτούμενο πάχος t της διατομής.
3. Ποιά από τις δύο περιπτώσεις είναι οικονομικότερη και κατά πόσο (%)
4. Να συγκριθεί η οικονομικότερη από τις δύο, με την ορθογωνική του προηγούμενου παραδείγματος από άποψη οικονομίας υλικού.



Ο πρόβολος του σχήματος έχει μήκος $l = 3 \text{ m}$ και καταπονείται από ένα συγκεντρωμένο φορτίο $P = 3 \text{ t}$ και από ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q = 0.4 \text{ t/m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η διατομή της δοκού είναι σχήματος Π με $h = 20 \text{ cm}$, $t = 2 \text{ cm}$ και $b = 14 \text{ cm}$, να υπολογιστούν η μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση. Δίνονται $\alpha = 1.5 \text{ m}$ και $\beta = 2 \text{ m}$.

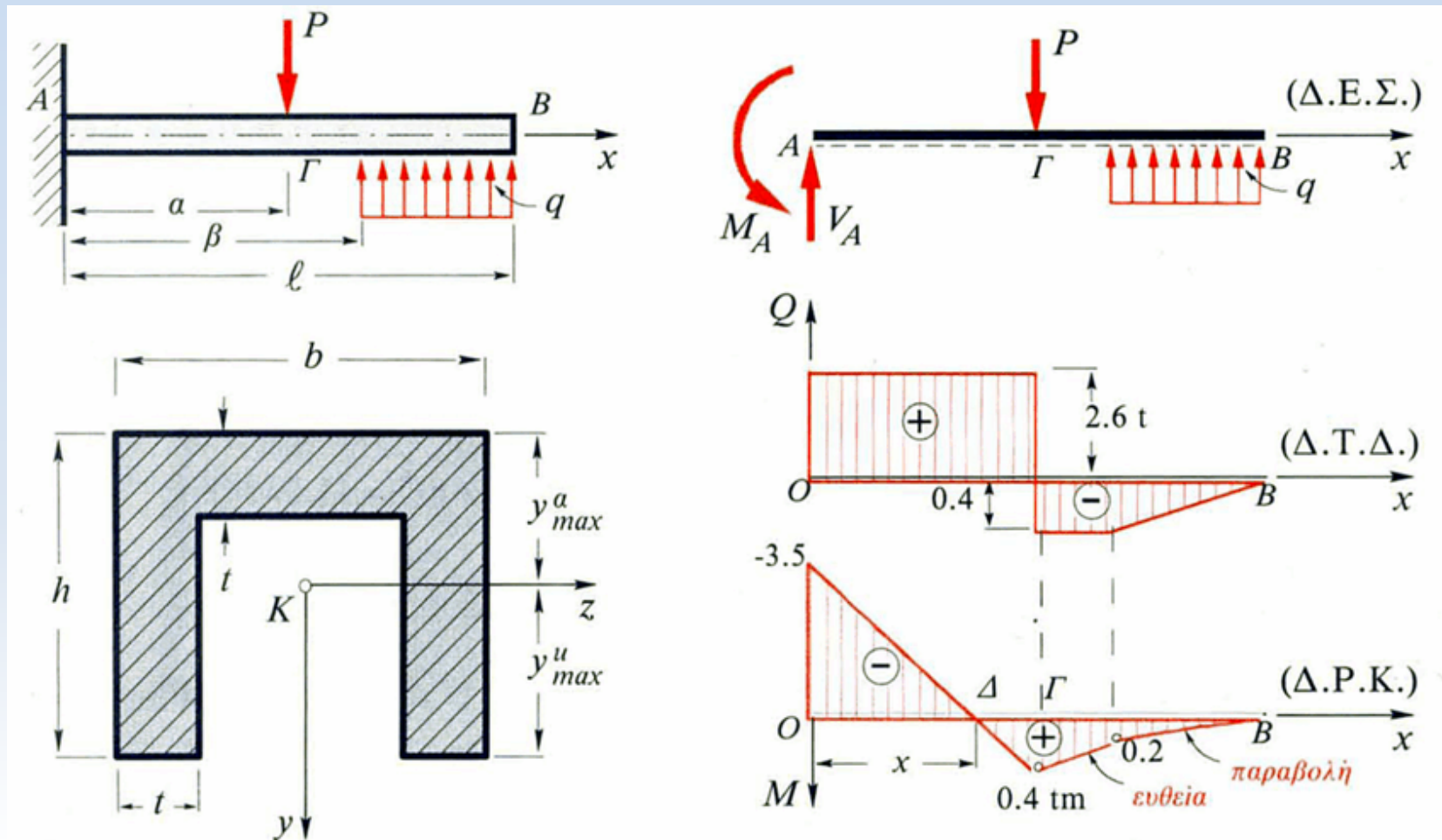


Κάμψη Άσκηση 1

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 20

Ο πρόβολος του σχήματος έχει μήκος $l = 3 \text{ m}$ και καταπονείται από ένα συγκεντρωμένο φορτίο $P = 3 \text{ t}$ και από ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q = 0.4 \text{ t/m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η διατομή της δοκού είναι σχήματος Π με $h = 20 \text{ cm}$, $t = 2 \text{ cm}$ και $b = 14 \text{ cm}$, να υπολογιστούν η μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση. Δίνονται $\alpha = 1.5 \text{ m}$ και $\beta = 2 \text{ m}$.



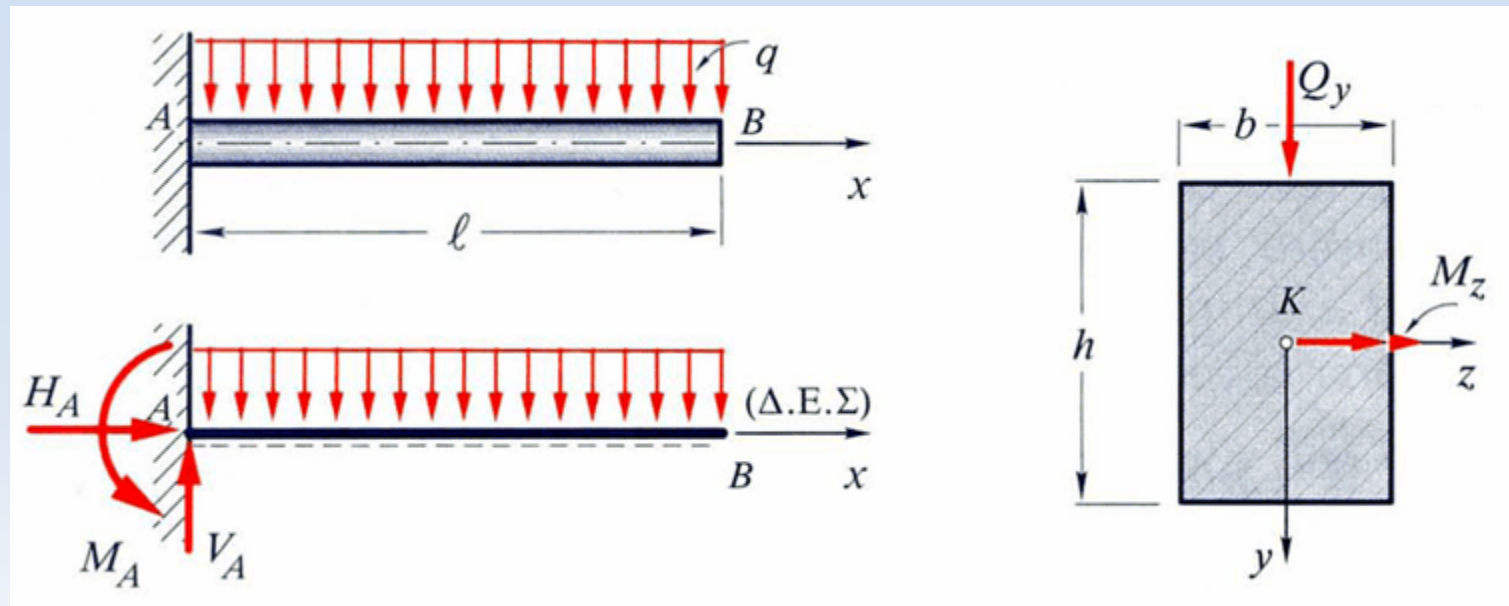
Κάμψη Άσκηση 1

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 21

Πρόβολος μήκους $\ell = 2 \text{ m}$ φέρει φορτίο $q = 20 \text{ kN/m}$. Αν η διατομή είναι ορθογωνική με ύψος h διπλάσιο του πλάτους της b , να υπολογιστούν:

1. Οι διαστάσεις της διατομής, αν η μέγιστη επιτρεπόμενη ορθή τάση για το υλικό της δοκού είναι $\sigma_{\text{επ}} = 100 \text{ N/mm}^2$.
2. Η μέγιστη καμπτική ροπή που μπορεί να παραλάβει η διατομή που θα προκύψει, αν η δοκός φορτίζεται κατά τη διεύθυνση του άξονα KZ.

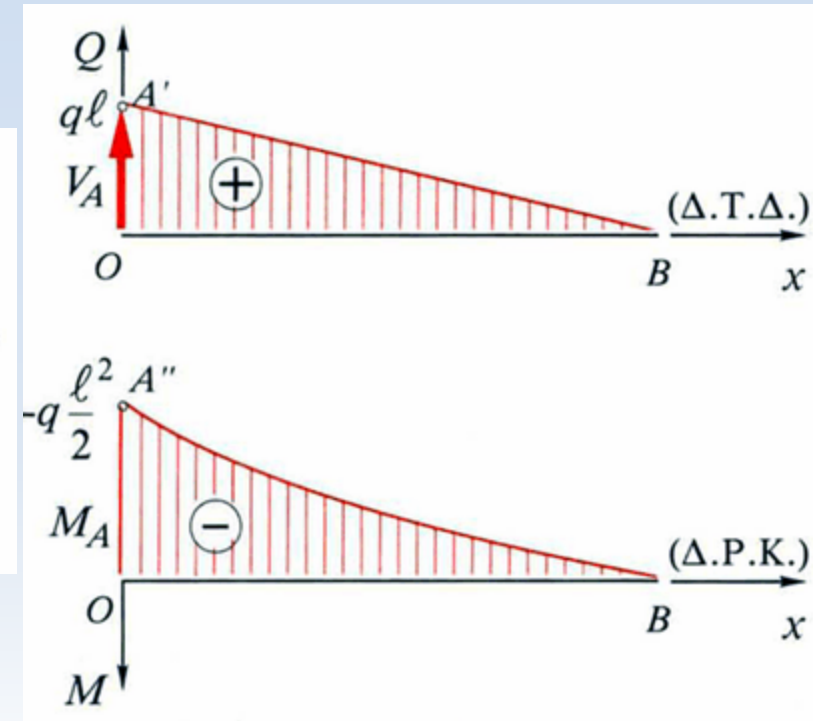
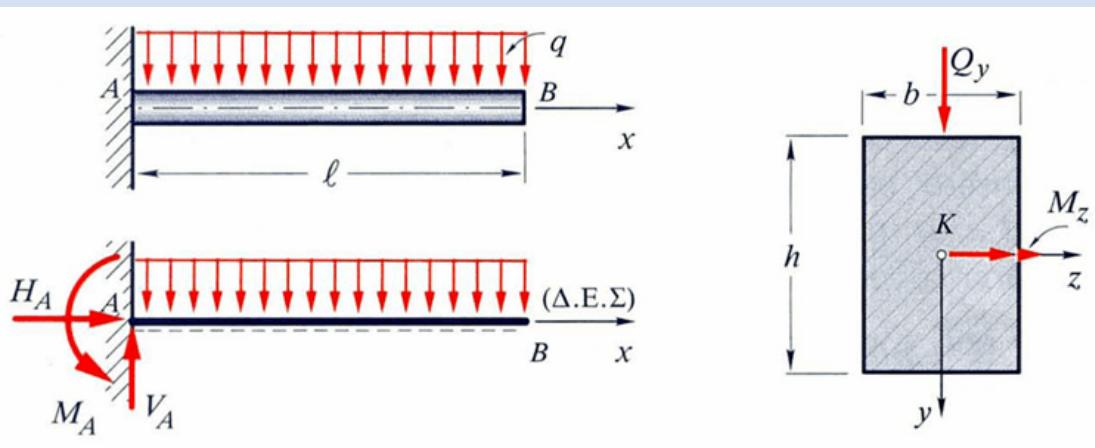


Κάμψη Άσκηση 2

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

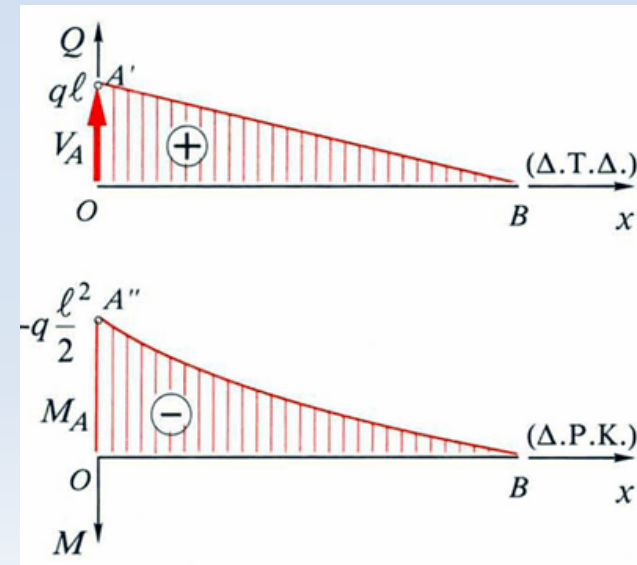
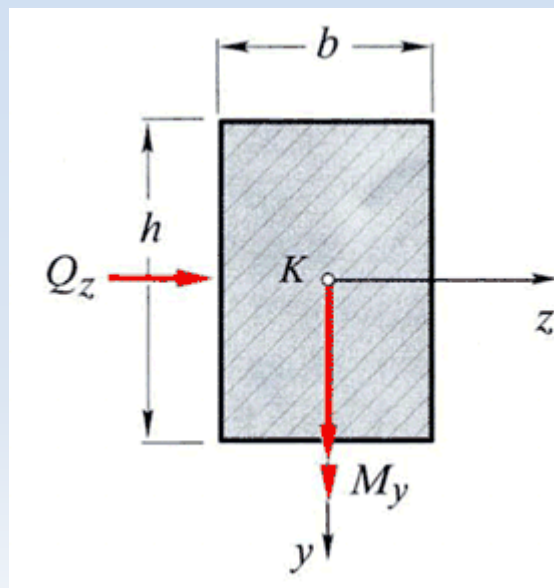
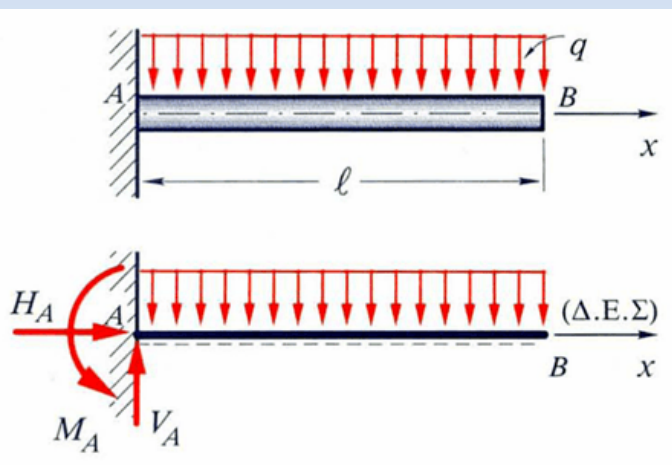
Πρόβολος μήκους $\lambda = 2 \text{ m}$ φέρει φορτίο $q = 20 \text{ kN/m}$. Αν η διατομή είναι ορθογωνική με ύψος h διπλάσιο του πλάτους της b , να υπολογιστούν:

1. Οι διαστάσεις της διατομής, αν η μέγιστη επιτρεπόμενη ορθή τάση για το υλικό της δοκού είναι $\sigma_{\text{επ}} = 100 \text{ N/mm}^2$.
2. Η μέγιστη καμπτική ροπή που μπορεί να παραλάβει η διατομή που θα προκύψει, αν η δοκός φορτίζεται κατά τη διεύθυνση του άξονα KZ.



Πρόβολος μήκους $\lambda = 2 \text{ m}$ φέρει φορτίο $q = 20 \text{ kN/m}$. Αν η διατομή είναι ορθογωνική με ύψος h διπλάσιο του πλάτους της b , να υπολογιστούν:

1. Οι διαστάσεις της διατομής, αν η μέγιστη επιτρεπόμενη ορθή τάση για το υλικό της δοκού είναι $\sigma_{\text{επ}} = 100 \text{ N/mm}^2$.
2. Η μέγιστη καμπτική ροπή που μπορεί να παραλάβει η διατομή που θα προκύψει, αν η δοκός φορτίζεται κατά τη διεύθυνση του άξονα KZ.



Κάμψη Άσκηση 2

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 24