

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ-Θ



Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 1

- Επανάληψη
 - Μονάδες – προθέματα – μετατροπές
 - Καταπονήσεις – Φορτία – Ροπή
 - Δοκοί – Φορτία διατομών



Παραγόμενη	Μονάδες S.I.	
	όνομα	σύμβολο
Εμβαδό	Τετραγωνικό μέτρο	m^2
Όγκος	Κυβικό μέτρο	m^3
Ταχύτητα	Μέτρο ανά δευτερόλεπτο	m/s
Επιτάχυνση	Μέτρο ανά δευτ/το στο τετράγωνο	m/s^2
Γωνία	Ακτίνιο (rad)	$1 \text{ rad}=1 \text{ m/m}$
Γωνιακή ταχύτητα	Ακτίνιο ανά δευτερόλεπτο	$\omega=\text{rad/s}$
Συχνότητα	Hz (Hertz)	$1 \text{ Hz}=1/s$
Δύναμη	N (Newton)	$1\text{N}=1 \text{ m}*\text{kg/s}^2$
Πίεση	Pa (Pascal)	$1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$
Ενέργεια, έργο	J (Joule)	$1\text{J}=1\text{N}*m$
Ισχύς	W (Watt)	$1\text{W}=1\text{J/s}$



Σταθερός όρος	Πρόθεμα	Σύμβολο		Σταθερός όρος	Πρόθεμα	Σύμβολο
10^{24}	yotta	Y		10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z		10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E		10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P		10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T		10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G		10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M		10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k		10^{-18}	atto	a
10^2	hecto	h		10^{-21}	zepto	z
10^1	deca	da		10^{-24}	yocto	y

$$1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$$

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$$



Αντικαθιστούμε με το ισοδύναμο της νέας μονάδας. Αν υπάρχει και δύναμη, τότε υψώνουμε το ισοδύναμο στην συγκεκριμένη δύναμη. Πχ:

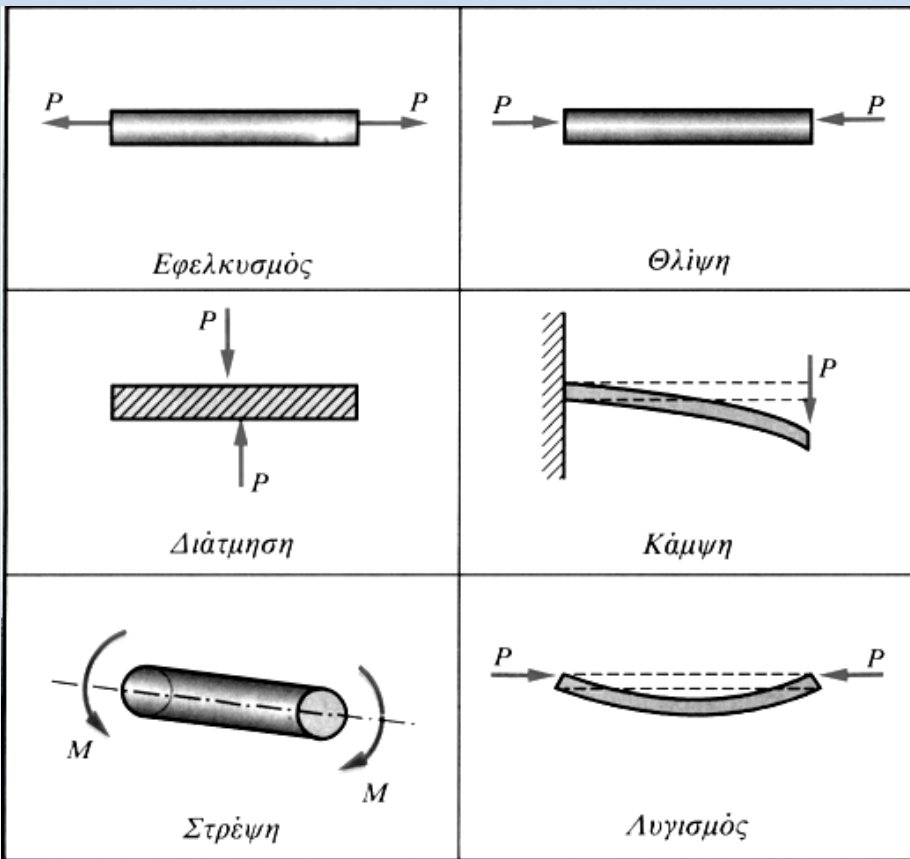
$$\begin{array}{ll} 1 \text{ mm} \rightarrow \text{m}: & 1 (10^{-3} \text{ m}) \\ 1 \text{ m}^2 \rightarrow \text{mm}^2: & 1 (10^3 \text{ mm})^2 = 10^6 \text{ mm}^2 \\ 1 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{mm}^3: & 1 (10 \text{ mm})^3 = 10^3 \text{ mm}^3 \\ 1 \text{ mm}^3 \rightarrow \text{m}^3: & 1 (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3 \end{array}$$

$$1 \text{ kg} \approx 10 \text{ N}$$

$$1 \text{ kp} \approx 10 \text{ N}$$

$$1 \text{ tn} = 10^3 \text{ kg} = 10^4 \text{ N}$$





•**Εφελκυσμός:** Ένα σώμα καταπονείται σε εφελκυσμό, όταν επενεργούν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις οι οποίες τείνουν να το διασπάσουν.

•**Θλίψη:** Ένα σώμα καταπονείται σε θλίψη, όταν επάνω του επενεργούν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις οι οποίες τείνουν να το συνθλίψουν.

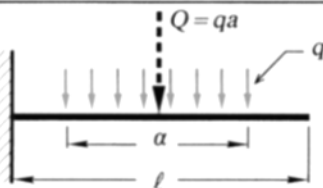
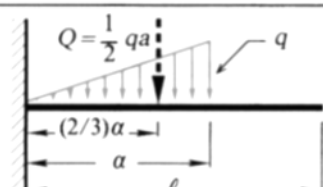
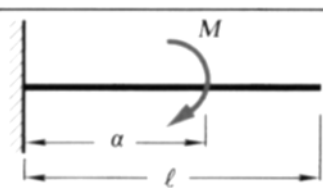
•**Διάτμηση:** Ένα σώμα καταπονείται σε διάτμηση, όταν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις επενεργούν κάθετα στον άξονα του.

•**Κάμψη:** Ένα σώμα καταπονείται σε κάμψη, όταν οι δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον άξονα του. Αναπτύσσονται τότε ροπές κάμψης και προκαλείται καμπύλωση της δοκού.

•**Στρέψη:** Ένα σώμα καταπονείται σε στρέψη, όταν οι δυνάμεις αποτελούν ζεύγος με επίπεδο κάθετο στον άξονα του, το οποίο τείνουν να περιστρέψουν.

•**Λυγισμός:** Ο λυγισμός από άποψη δράσης των δυνάμεων μοιάζει με τη θλίψη, ενώ από άποψη παραμορφώσεων μοιάζει με την κάμψη. Τελικά όμως διαφέρει αρκετά και από τις δύο προηγούμενες, αποτελώντας ιδιαίτερο τρόπο καταπόνησης, η οποία μάλιστα, είναι πολύ επικίνδυνη στις κατασκευές.



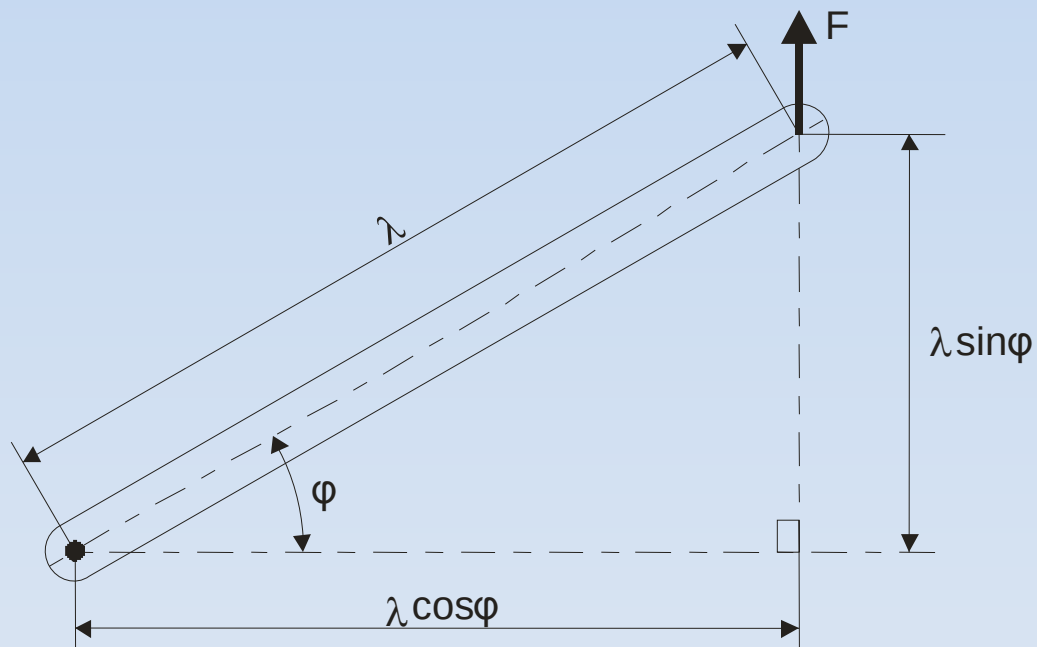
Χαρακτηρισμός φορτίου	Συμβολισμός	Μονάδες μέτρησης
Συγκεντρωμένο ή σημειακό φορτίο		N , Kp , t
Ομοιόμορφη κατανομή φορτίου		N/m , Kp/m , t/m
Τριγωνική κατανομή φορτίου		N/m , Kp/m , t/m
Συγκεντρωμένη ροπή		Nm , Kpm , tm

•**Συγκεντρωμένα φορτία ή συγκεντρωμένες δυνάμεις:** όταν ασκούνται σε πολύ μικρή περιοχή του σώματος, που πρακτικά θεωρούμε σημείο, γι' αυτό ονομάζονται και σημειακά φορτία.

•**Κατανεμημένα φορτία:** όταν ασκούνται σε μία ορισμένη περιοχή του σώματος. Η κατανομή των φορτίων αυτών, μπορεί να είναι ομοιόμορφη, τριγωνική, τραπεζοειδής, κλπ. Ένα παράδειγμα της περίπτωσης αυτής, αποτελεί το ίδιο το Βάρος μίας ευθύγραμμης δοκού. Εκφράζεται με μία σταθερή ποσότητα, που συμβολίζουμε με q , και που έχει μονάδες, δύναμη ανά τρέχον m μήκους [N/m] ή [t/m], κ,λ.π.

Τα ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία, για υπολογιστικούς και μόνο λόγους, μπορούν να θεωρηθούν σαν συγκεντρωμένα που ασκούνται στο μέσο του μήκους που επενεργούν. Αν η κατανομή είναι τριγωνική, δρουν στο 1/3 (ή στα 2/3 ανάλογα) του μήκους που επενεργούν.



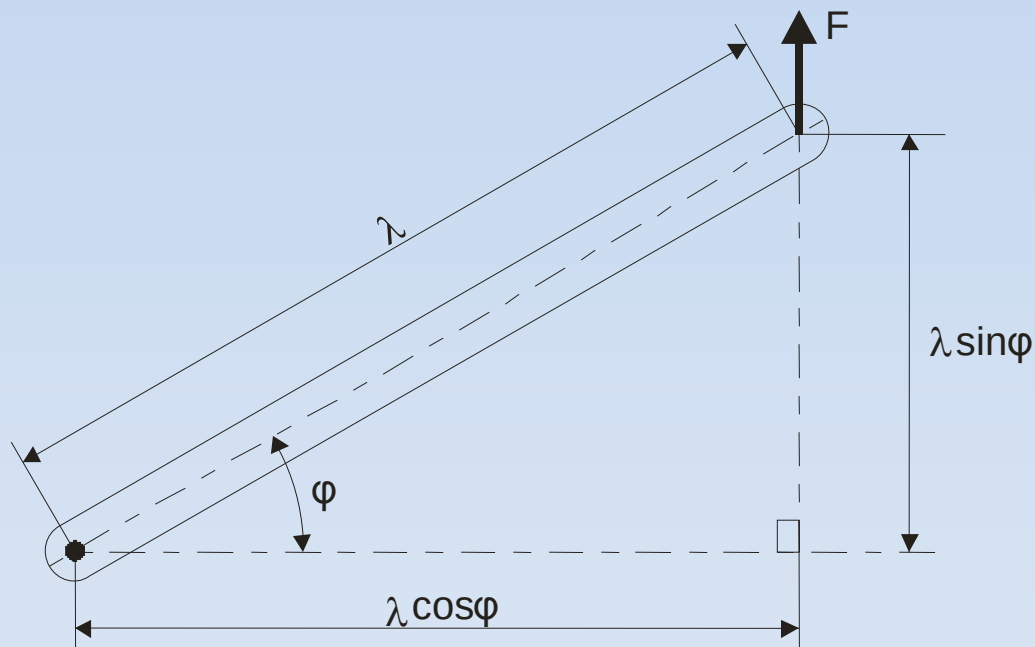


$$M = F \cdot l?$$

$$M = F \cdot l \sin \varphi?$$

$$M = F \cdot l \cos \varphi?$$





$$M = F \cdot l \cos \varphi$$

Η απόσταση που λαμβάνεται υπόψη στον υπολογισμό της ροπής μιας δύναμης είναι αυτή που προκύπτει αν φέρουμε κάθετη από το σημείο περιστροφής του σώματος στο οποίο ασκείται η δύναμη προς την διεύθυνση της δύναμης.

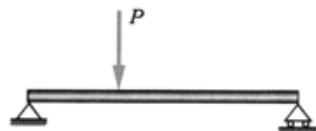




Ράβδος



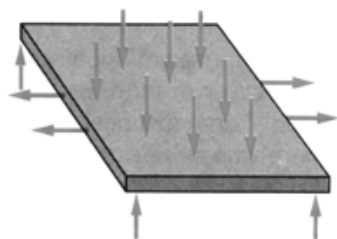
Καλώδιο



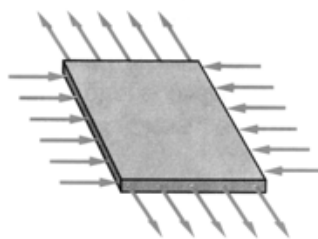
Δοκός



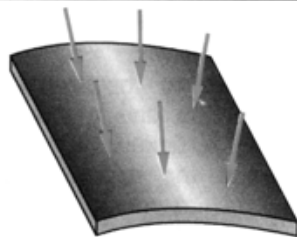
Πρόβολος



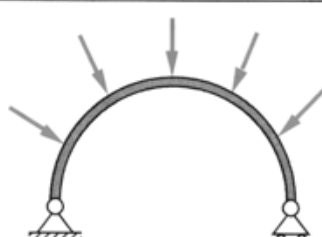
Πλάκα



Δίσκος



Κέλυφος



Τόξο

Φορέας ονομάζεται γενικά κάθε σώμα ή κατασκευή που μπορεί να φέρει εξωτερικά φορτία (δηλαδή δυνάμεις και ροπές), τα οποία και μεταφέρει στις στηρίξεις του, διαμέσου των οποίων καταλήγουν τελικά συνήθως στο έδαφος.

Ράβδος: Έτσι χαρακτηρίζεται ένα σώμα που το μήκος του είναι συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες του διαστάσεις, η οποία έχει έναν ευθύγραμμο άξονα συμμετρίας. Η ράβδος καταπονείται συνήθως σε εφελκυσμό ή θλίψη, δηλαδή μόνο από αξονικά φορτία.

Δοκός: Έτσι χαρακτηρίζεται ένα σώμα που το μήκος του είναι αισθητά μεγαλύτερο συγκριτικά με τις άλλες του διαστάσεις και που έχει έναν ευθύγραμμο άξονα συμμετρίας. Η δοκός μπορεί να καταπονείται από αξονικά αλλά και από εγκάρσια φορτία. Υπάρχουν διάφορα επιμέρους είδη δοκών.

Τόξο: Χαρακτηρίζεται έτσι μία δοκός με καμπύλο όμως άξονα.

Δίσκος: Έτσι χαρακτηρίζεται ένα επίπεδο σώμα, που έχει πάχος πολύ μικρότερο συγκριτικά με τις άλλες του διαστάσεις. Ο δίσκος μπορεί να καταπονείται από δυνάμεις εφελκυστικές ή θλιπτικές που δρουν στο επίπεδο του.

Πλάκα: Χαρακτηρίζεται έτσι ένα επίπεδο σώμα, με πάχος πολύ μικρότερο από τις άλλες του διαστάσεις. Η πλάκα όμως, σε αντίθεση με το δίσκο, μπορεί επιπλέον να καταπονείται και από εγκάρσια φορτία στο επίπεδο της.

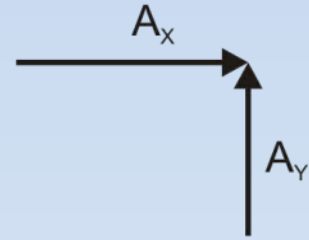
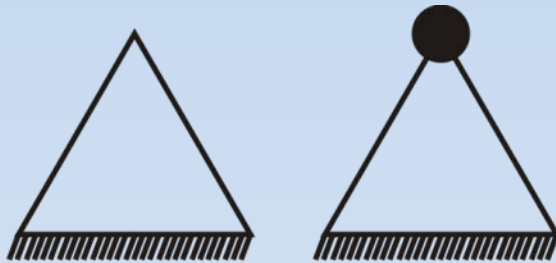
Κέλυφος: Έτσι χαρακτηρίζεται ένα σώμα, με πάχος πολύ μικρότερο από τις άλλες του διαστάσεις, που η μέση του επιφάνεια δεν είναι επίπεδη, αλλά καμπύλη.



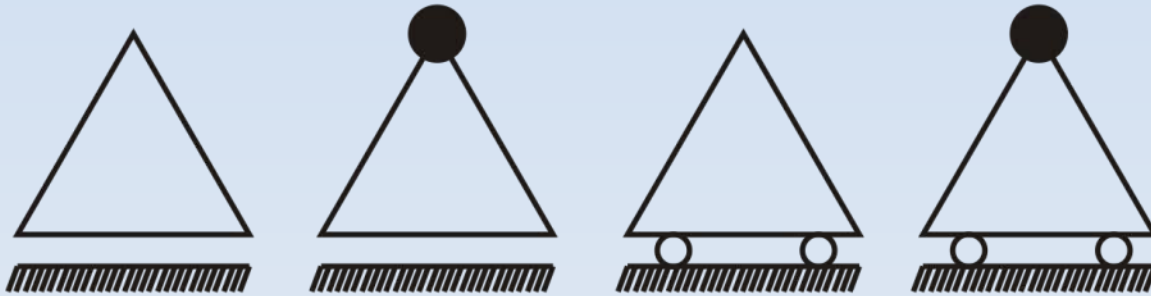
Συμβολισμοί

Αντιδράσεις

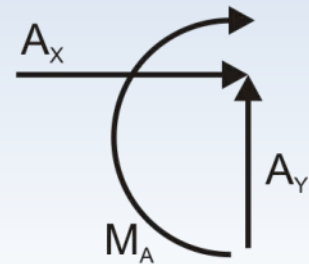
Άρθρωση



Κύλιση



Πάκτωση



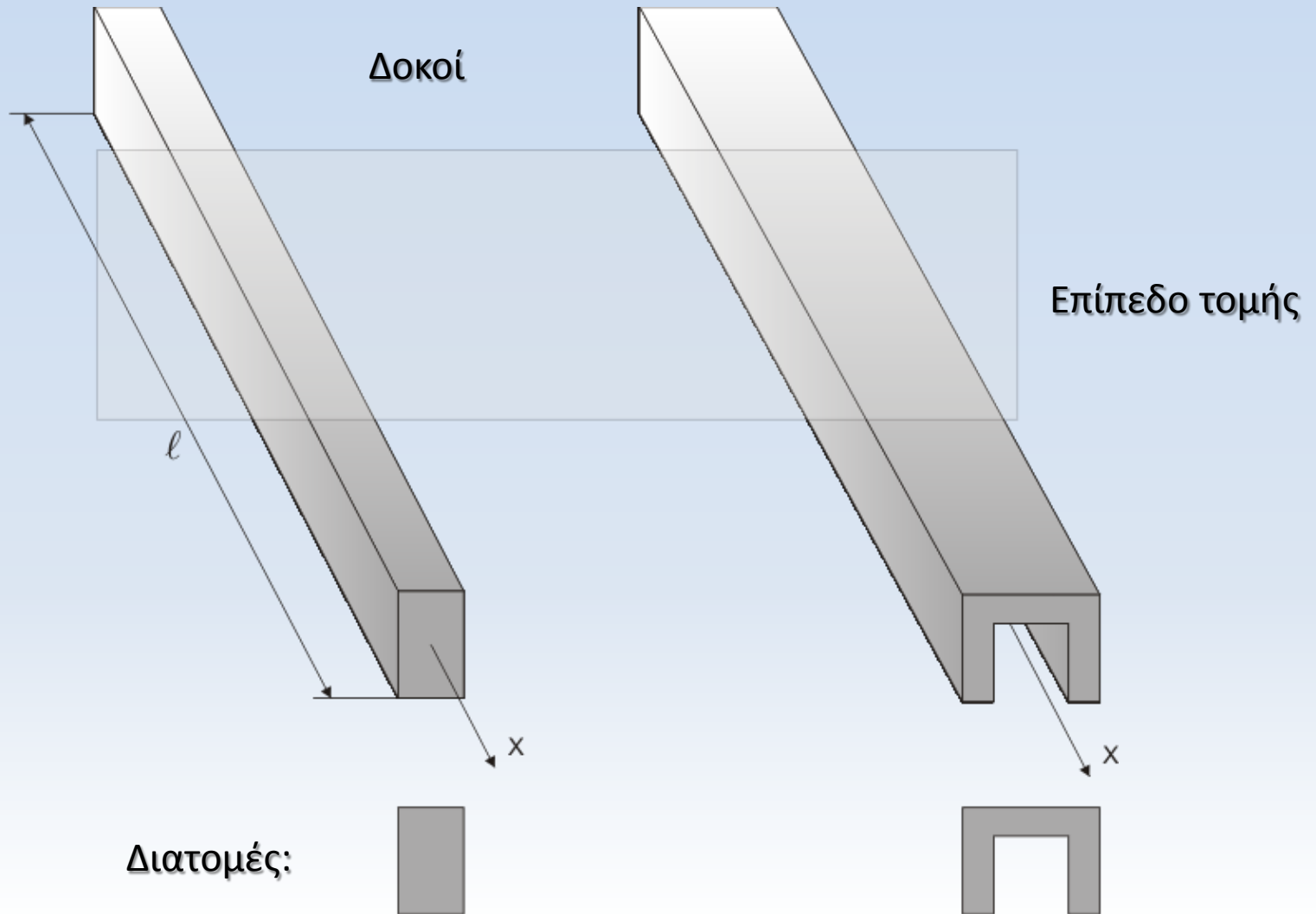
Στηρίξεις

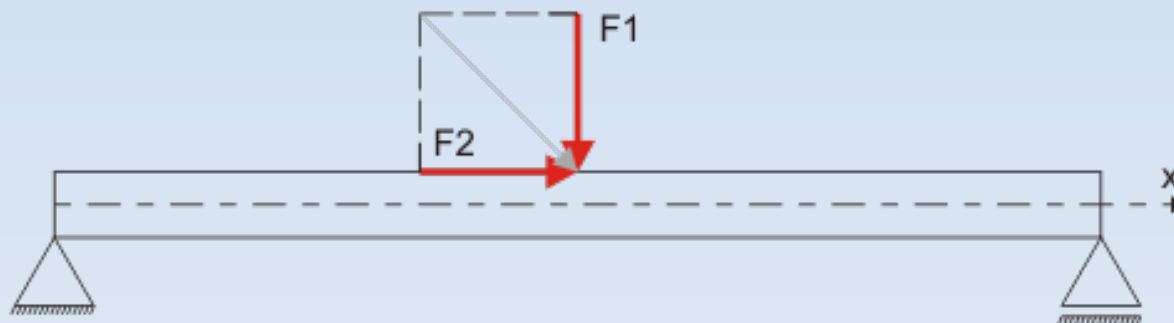
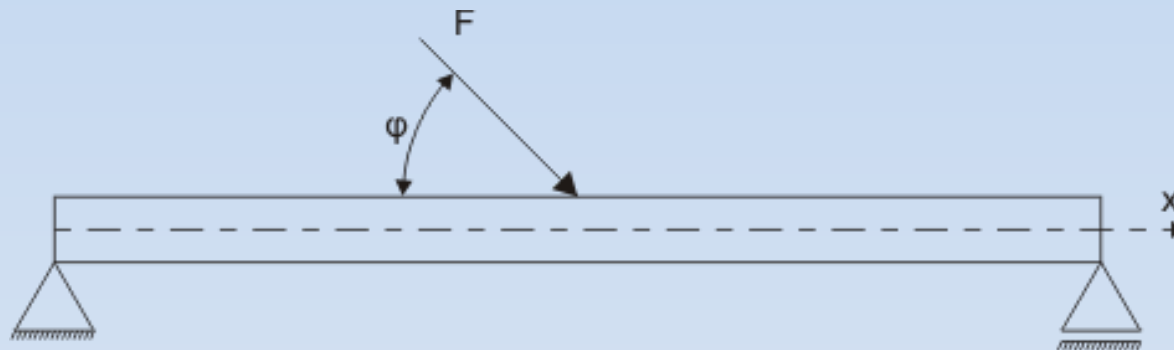
Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 11



Διατομή λέγεται το σχήμα που προκύπτει από την τομή ενός φορέα με ένα επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο σε μία διάστασή του (συνήθως στη μεγαλύτερη που είναι το μήκος)



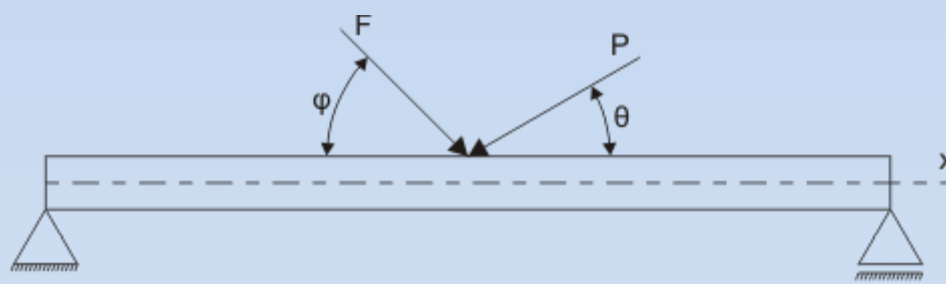


$$F_1 = F \cdot \sin \varphi$$

$$F_2 = F \cdot \cos \varphi$$

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2$$

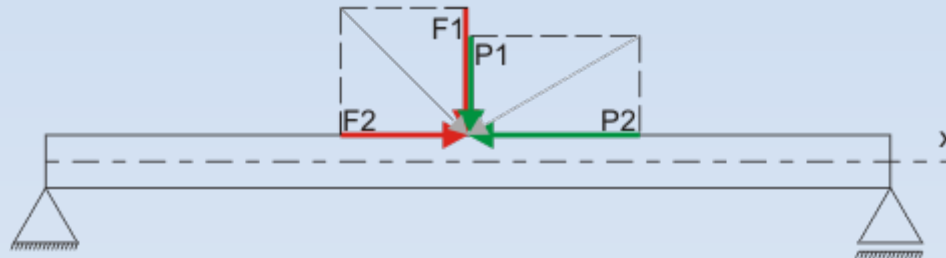




$$F_1 = F \cdot \sin \varphi$$

$$F_2 = F \cdot \cos \varphi$$

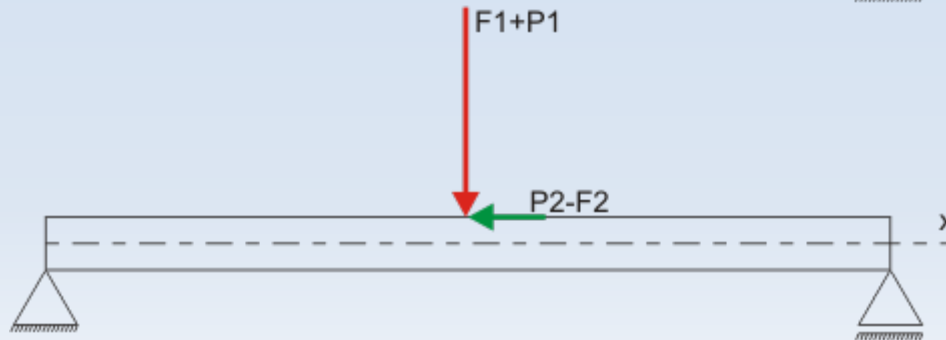
$$F^2 = F_1^2 + F_2^2$$



$$P_1 = P \cdot \sin \theta$$

$$P_2 = P \cdot \cos \theta$$

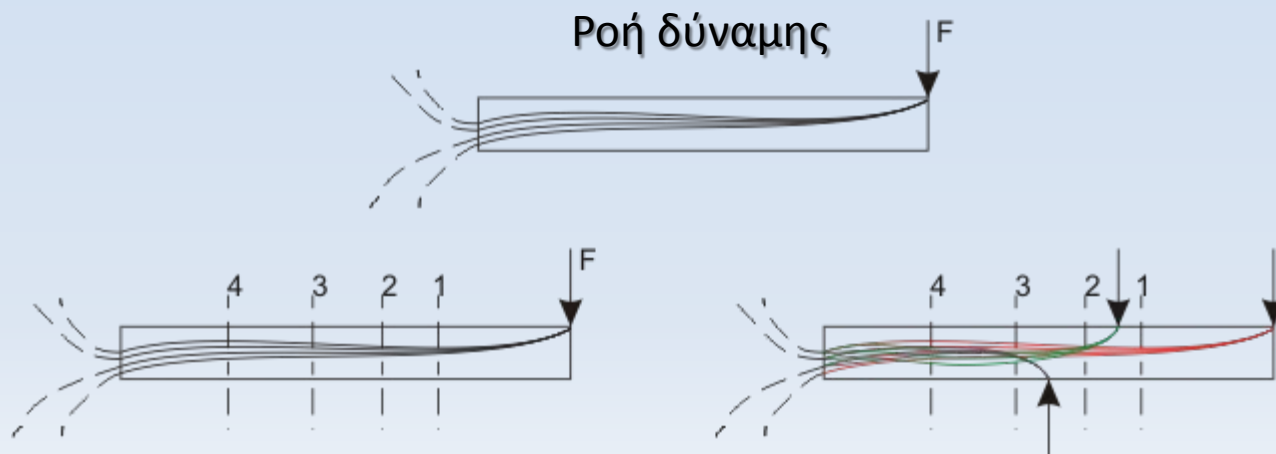
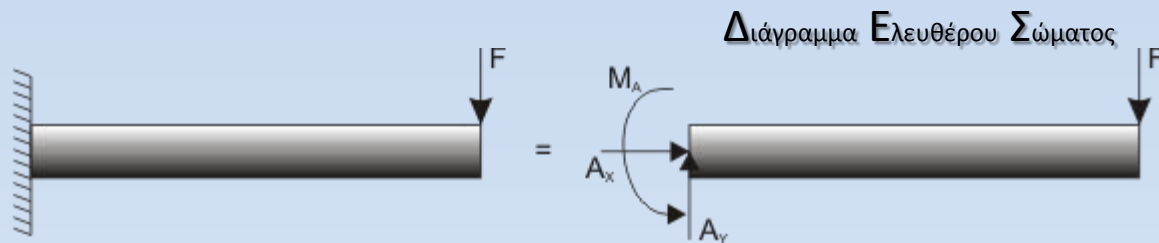
$$P^2 = P_1^2 + P_2^2$$

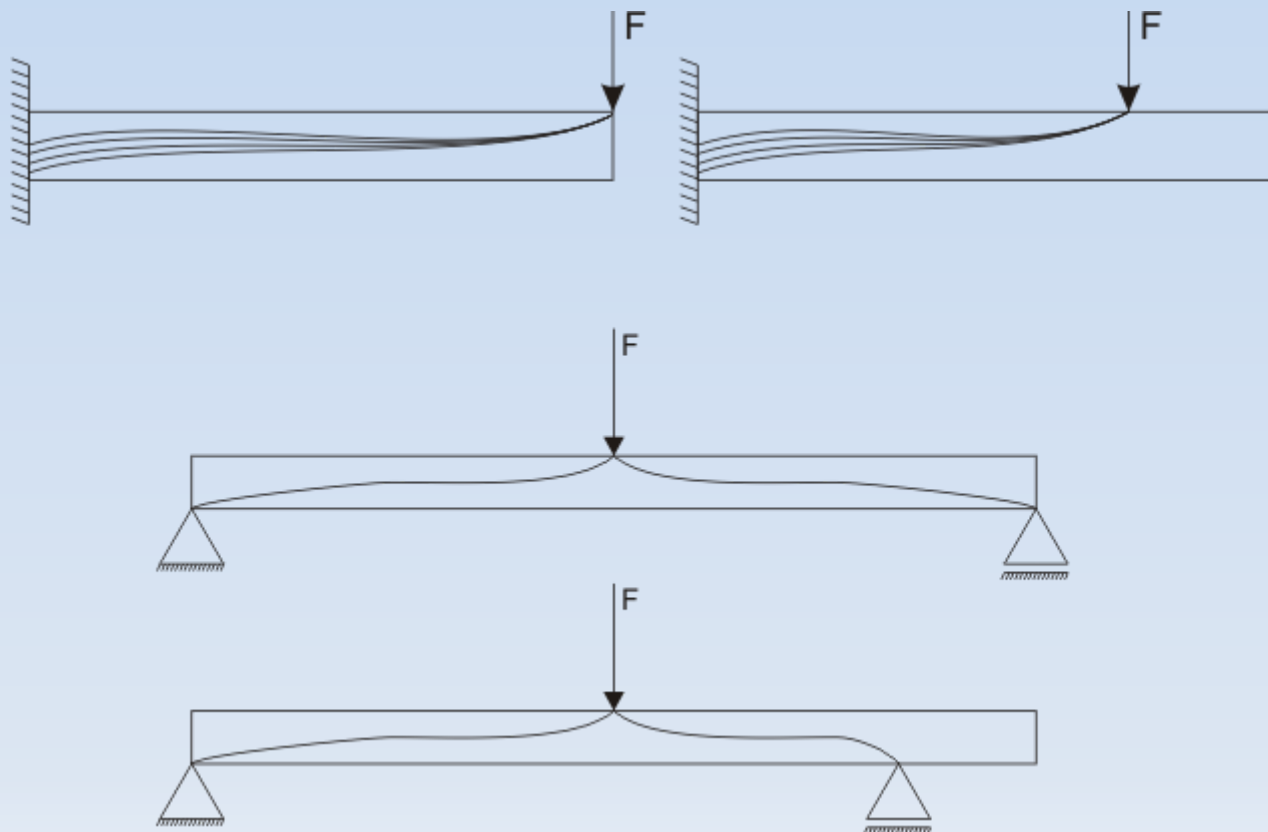


$$F_1 + P_1 = F \cdot \sin \varphi + P \cdot \sin \theta$$

$$P_2 - F_2 = P \cdot \cos \theta - F \cdot \cos \varphi$$

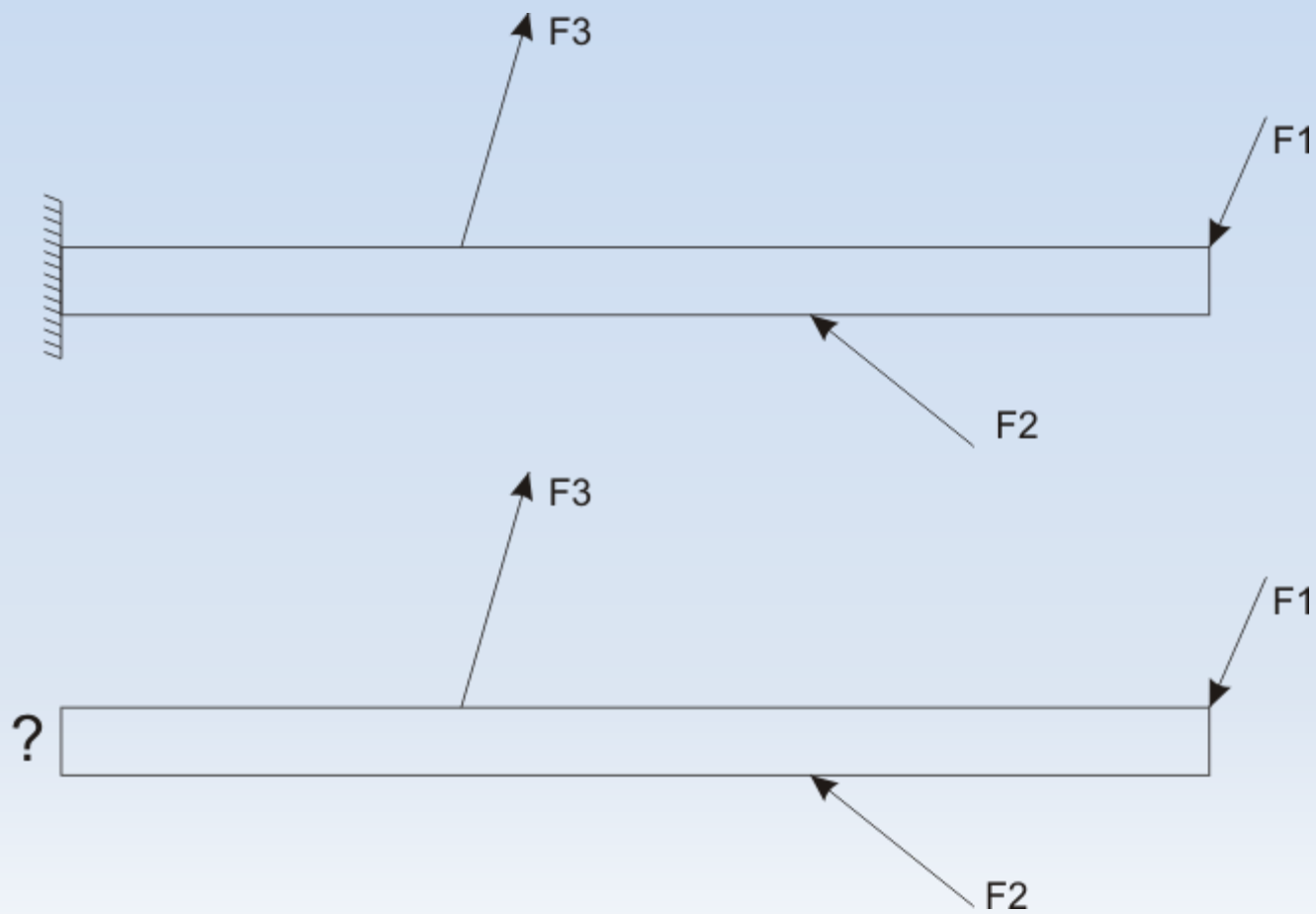


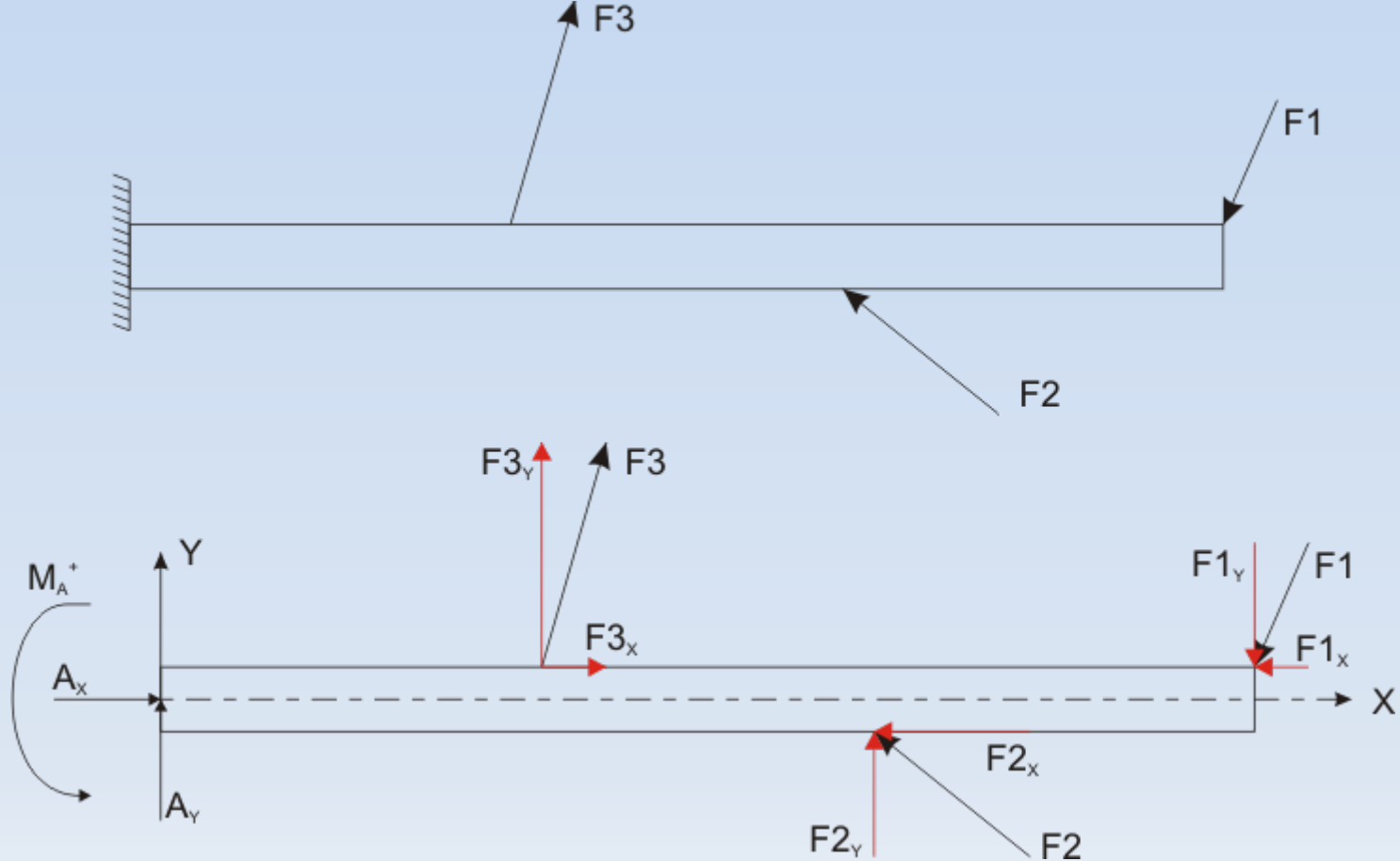




Η ροή δύναμης του εξωτερικού φορτίου έχει κατεύθυνση ΠΑΝΤΑ ΑΠΟ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΣΤΗΡΙΞΗ





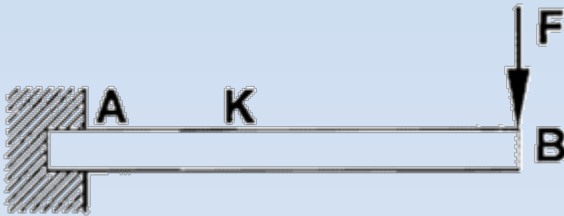


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + F3_x - F2_x - F1_x = 0$$

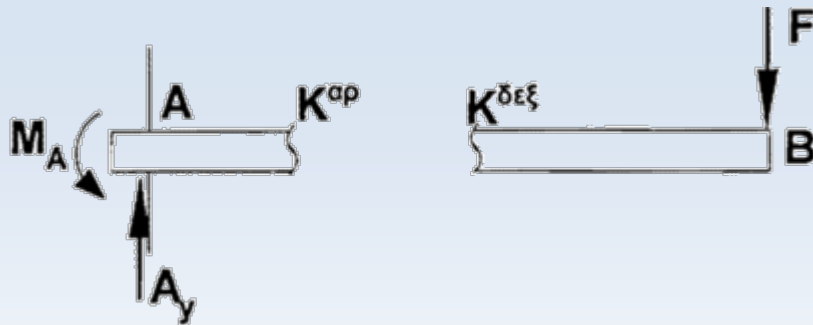
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + F3_y + F2_y - F1_y = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + F3_y \cdot \ell_3 + F2_y \cdot \ell_2 - F1_y \cdot \ell_1 = 0$$





Πως υπολογίζουμε τα φορτία που υπάρχουν στο εσωτερικό του σώματος, π.χ. σε κάποιο σημείο K ?

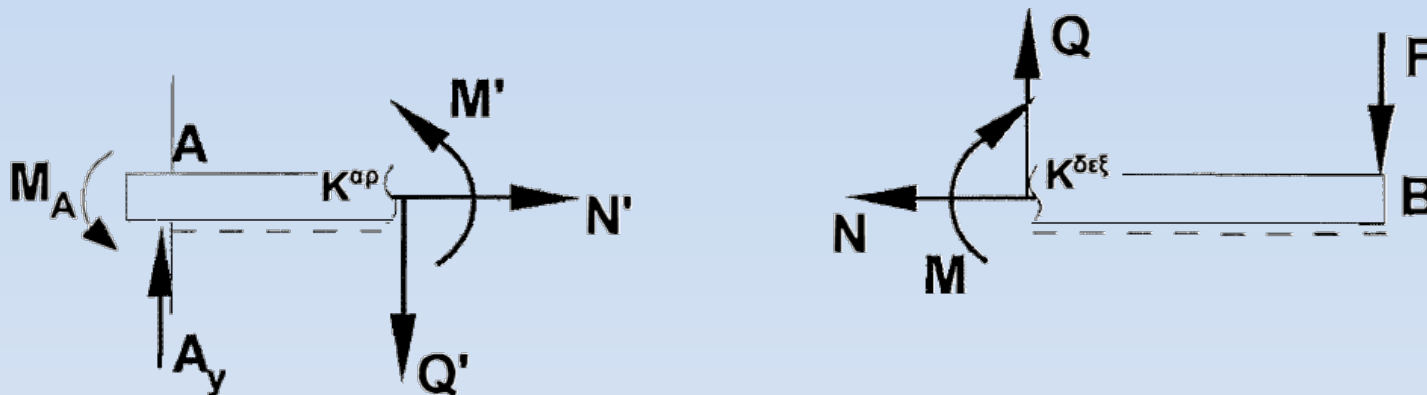


Για να υπολογίσουμε τα φορτία που υπάρχουν στο εσωτερικό του σώματος, σε κάποιο σημείο K που μας ενδιαφέρει, φανταζόμαστε ότι κόβουμε το σώμα στο σημείο (στο K) και το χωρίζουμε σε δύο τμήματα.

Ισχύουν οι ιδιότητες:

- Ισορροπία συνόλου και κάθε τμήματος ξεχωριστά
- Ισοδυναμία της τομής με πάκτωση





Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής της δοκού, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Επιλέγουμε αυθαίρετα μία από τις δύο πλευρές της δοκού (συνήθως την κάτω πλευρά) ως πλευρά αναφοράς και τοποθετούμε μία διακεκομμένη γραμμή, η οποία ονομάζεται **‘ίνα αναφοράς’**.
- Κόβουμε το δοκάρι, ξανασχεδιάζουμε το ένα μόνο από τα δύο τμήματά του, και τοποθετούμε στην τομή τα **φορτία διατομής** ως εξής:
 - μία δύναμη παράλληλη με το μήκος του δοκαριού, **την οποία συμβολίζουμε με N** , και την τοποθετούμε έτσι ώστε να κατευθύνεται προς τα έξω, να είναι δηλαδή **εφελκυστική** για το δοκάρι
 - μία δύναμη κάθετη στο μήκος της δοκού, την οποία ονομάζουμε διατμητική δύναμη και συμβολίζουμε με Q , με κατεύθυνση που προκύπτει αν στρέψουμε τη N κατά 90° ωρολογιακά
 - μία ροπή M που ονομάζεται καμπτική ροπή, και την τοποθετούμε στην κατεύθυνση που εφελκύει την ίνα αναφοράς.



Υπολογισμός φορτίων διατομής στα εξής σημεία:

- στα Γ, Γ' (λίγο αριστερά και λίγο δεξιά του σημείου εφαρμογής της F)
- στα Δ, Ε

Υπολογίζουμε τα φορτία των στηρίξεων:

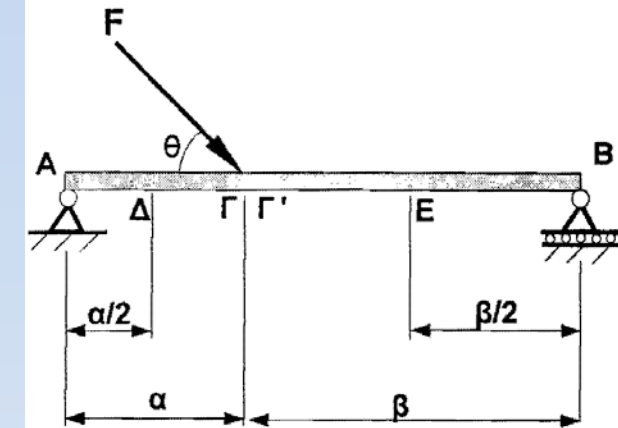
$$F_x = F \cos \theta = 1414 \text{ N} \cdot \cos 45^\circ = 1000 \text{ N}$$

$$F_y = F \sin \theta = 1414 \text{ N} \cdot \sin 45^\circ = 1000 \text{ N}$$

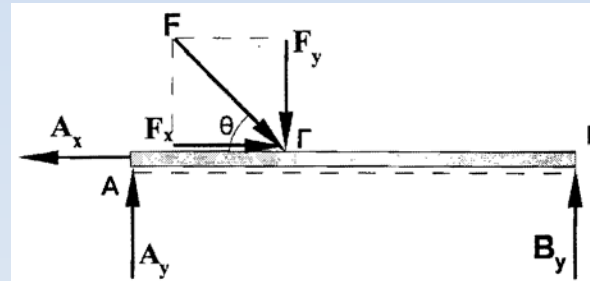
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = F_x = 1000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y = F_y \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 300 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = F_y - B_y = 700 \text{ N}$$



$$F = 1414 \text{ N}, \theta = 45^\circ, \alpha = 0.3 \text{ m}, \beta = 0.7 \text{ m}$$



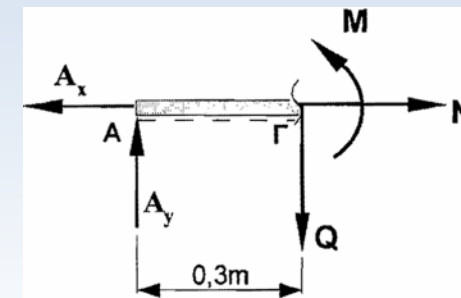
Τοποθετούμε την ίνα αναφοράς από κάτω.

Τομή στο σημείο Γ (από αριστερά):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = A_x = 1000 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q = A_y = 700 \text{ N}$$

$$\sum M_\Gamma = 0 \Rightarrow A_y \cdot 0.3 - M = 0 \Rightarrow M = A_y \cdot 0.3 = 700 \text{ N} \cdot 0.3 \text{ m} = 210 \text{ Nm}$$

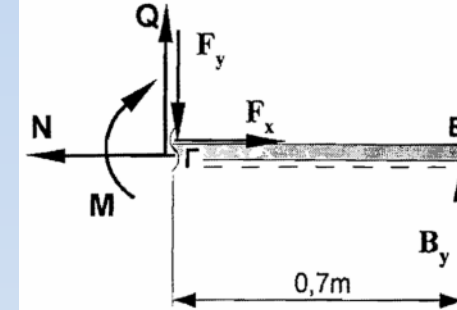


Τομή στο σημείο Γ (από δεξιά):

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N = F_X = 1000N$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow Q - F_Y + B_Y = 0 \Rightarrow Q = F_Y - B_Y = 700N$$

$$\sum M_{\Gamma} = 0 \Rightarrow M - B_Y \cdot 0.7 = 0 \Rightarrow M = B_Y \cdot 0.7 = 300N \cdot 0.7m = 210Nm$$

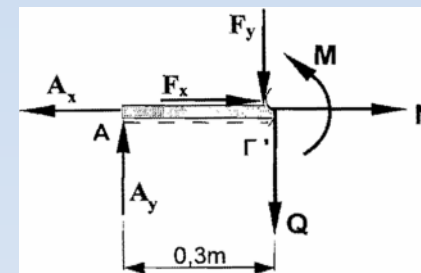


Τομή στο σημείο Γ' (από αριστερά):

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N + F_X - A_X = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow A_Y - F_Y - Q = 0 \Rightarrow Q = A_Y - F = 700N - 1000N = -300N$$

$$\sum M_{\Gamma'} = 0 \Rightarrow A_Y \cdot 0.3 - M = 0 \Rightarrow M = A_Y \cdot 0.3 = 700N \cdot 0.3m = 210Nm$$

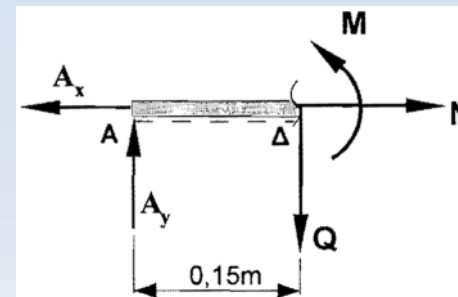


Τομή στο σημείο Δ (από αριστερά):

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N = A_X = 1000N$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow Q = A_Y = 700N$$

$$\sum M_{\Delta} = 0 \Rightarrow A_Y \cdot 0.15 - M = 0 \Rightarrow M = A_Y \cdot 0.15 = 700N \cdot 0.15m = 105Nm$$

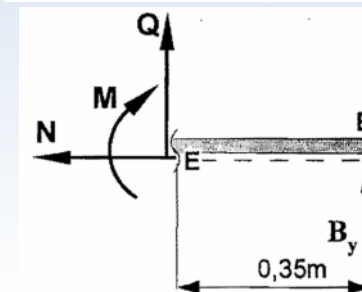


Τομή στο σημείο Ε (από δεξιά):

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow Q + B_Y = 0 \Rightarrow Q = -B_Y = -300N$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M - B_Y \cdot 0.35 = 0 \Rightarrow M = B_Y \cdot 0.35 = 300N \cdot 0.35m = 105Nm$$



Τομή σε τυχαίο σημείο Κ με απόσταση x από το Α (από αριστερά):
 $0 \leq X \leq 0.3m$

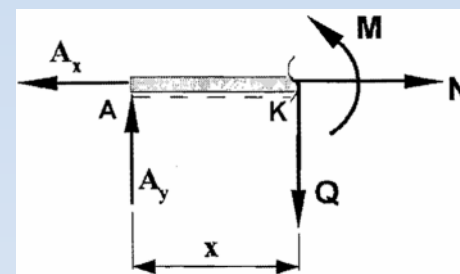
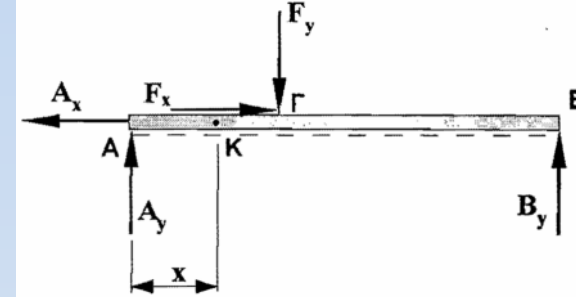
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N = A_X = 1000N$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow Q = A_Y = 700N$$

$$\sum M_\Gamma = 0 \Rightarrow A_Y \cdot X - M = 0 \Rightarrow M = A_Y \cdot X = 700 \cdot X$$

$$M(X = 0) = 0$$

$$M(X = 0.3m) = 700N \cdot 0.3m = 210Nm$$



Τομή σε τυχαίο σημείο Λ με απόσταση x από το Α (από αριστερά):
 $0.3 \leq X \leq 1m$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N + F_X - A_X = 0 \Rightarrow N = F_X - A_X = 0$$

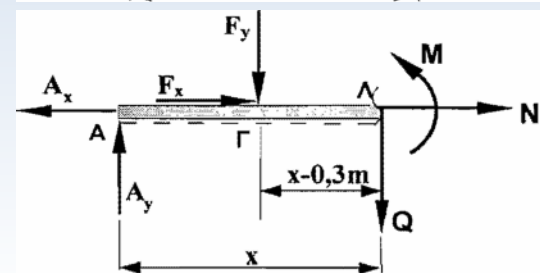
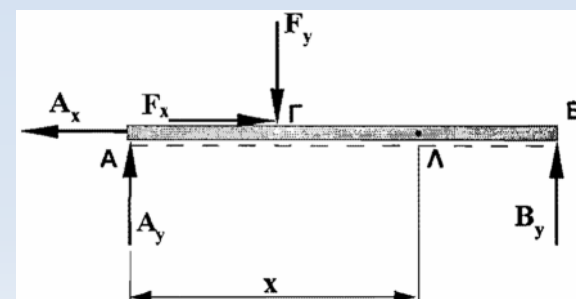
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow A_Y - F_Y - Q = 0 \Rightarrow Q = A_Y - F = 700N - 1000N = -300N$$

$$\sum M_\Lambda = 0 \Rightarrow A_Y \cdot X - F_Y(X - a) - M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = A_Y \cdot X - F_Y(X - a) = 700N \cdot X - 1000N \cdot (X - 0.3)$$

$$M(X = 0.3) = 700N \cdot 0.3m = 210Nm$$

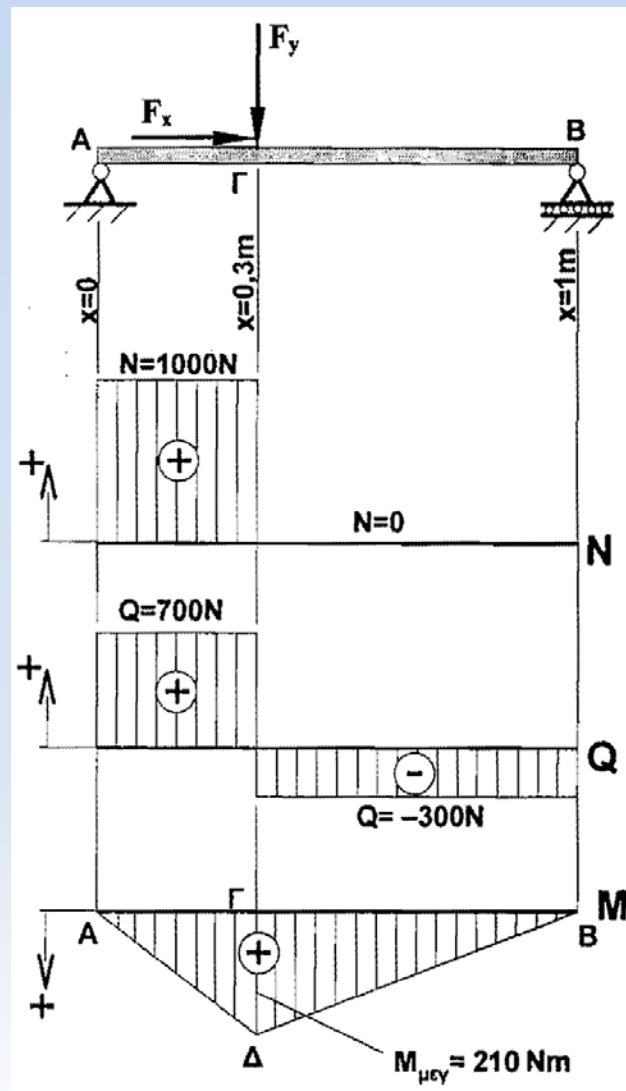
$$M(X = 1m) = 700N \cdot 1m - 1000N \cdot (1 - 0.3)m = 700Nm - 700Nm = 0$$



Παράδειγμα υπολογισμού φορτίων διατομής
 Διαγράμματα N, Q, M

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 23



Παράδειγμα υπολογισμού φορτίων διατομής
Διαγράμματα N,Q,M

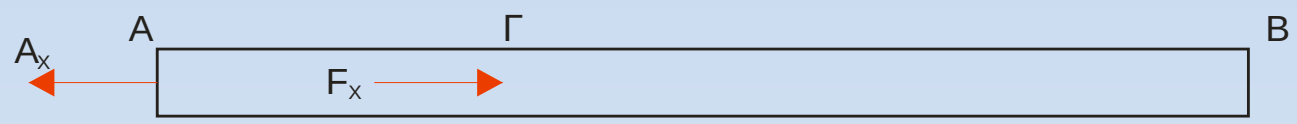
Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 24

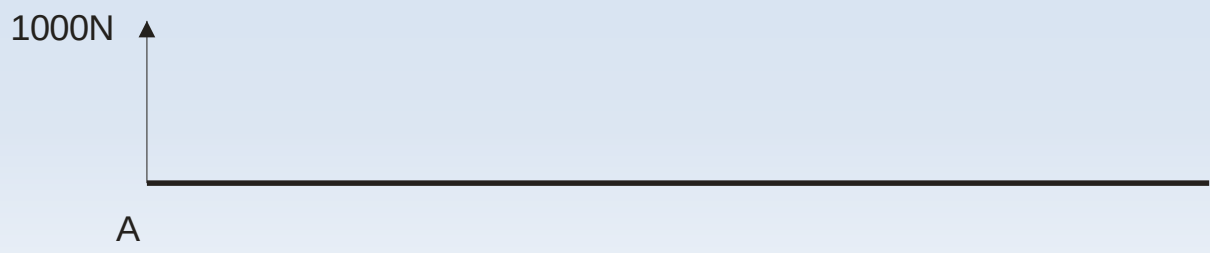
Κατασκευή διαγραμμάτων:

Διάγραμμα N (αξονικών φορτίων)

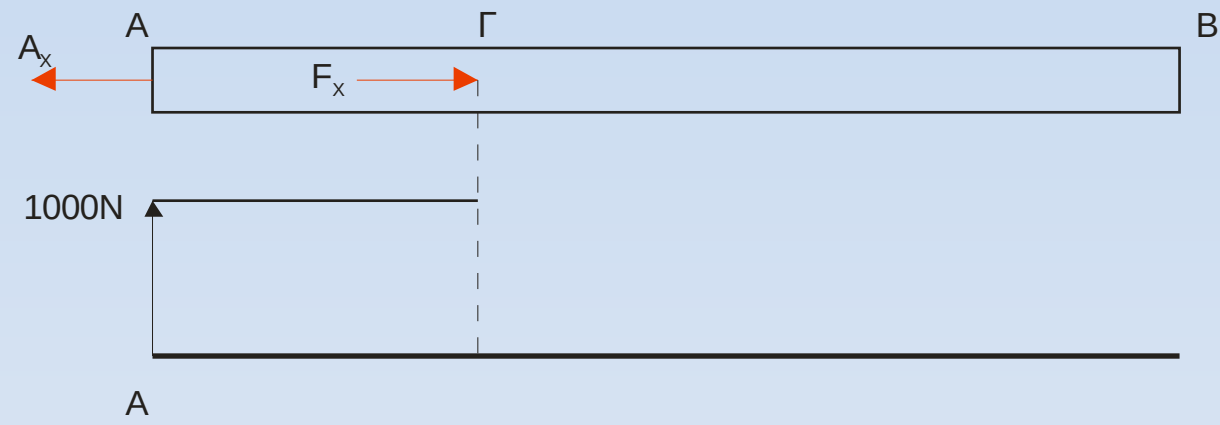
Ξεκινάμε από την αριστερή πλευρά της δοκού (είτε από δεξιά) και απομονώνουμε τα αξονικά φορτία:



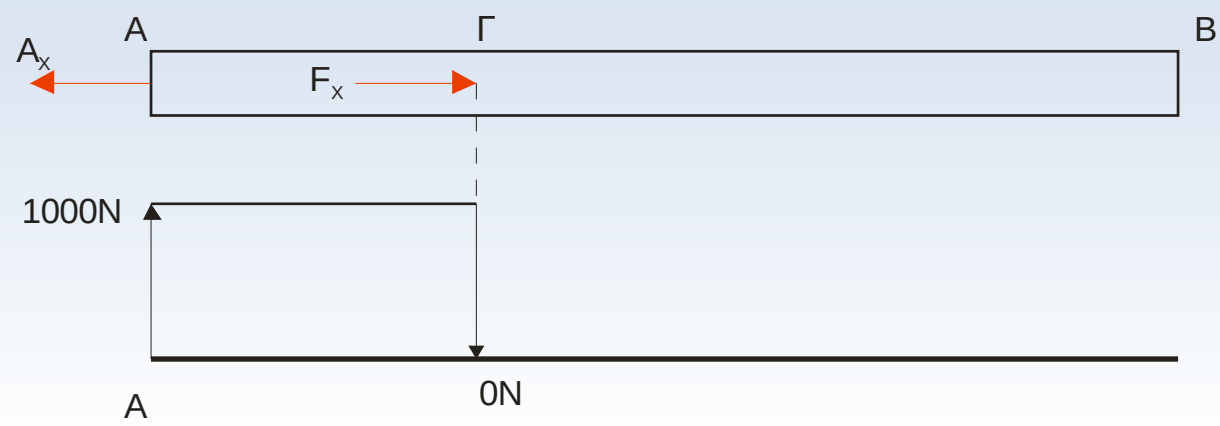
Παρατηρούμε ότι ασκούνται δύο συγκεντρωμένα αξονικά φορτία (A_x και F_x). Ξεκινάμε το διάγραμμα από το σημείο A όπου και έχουμε το συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο A_x . Το συγκεκριμένο φορτίο προκαλεί εφελκυσμό στη δοκό (το διαπιστώνουμε αν αφαιρέσουμε τα υπόλοιπα αξονικά φορτία και θεωρούμε ότι ‘κρατάμε’ τη δοκό στο σημείο B). Εφόσον έχουμε συγκεντρωμένο φορτίο το διάγραμμα ξεκινάει με ‘άλμα’ της φόρτισης στο σημείο A και μάλιστα θετικό αφού το φορτίο προκαλεί εφελκυσμό:



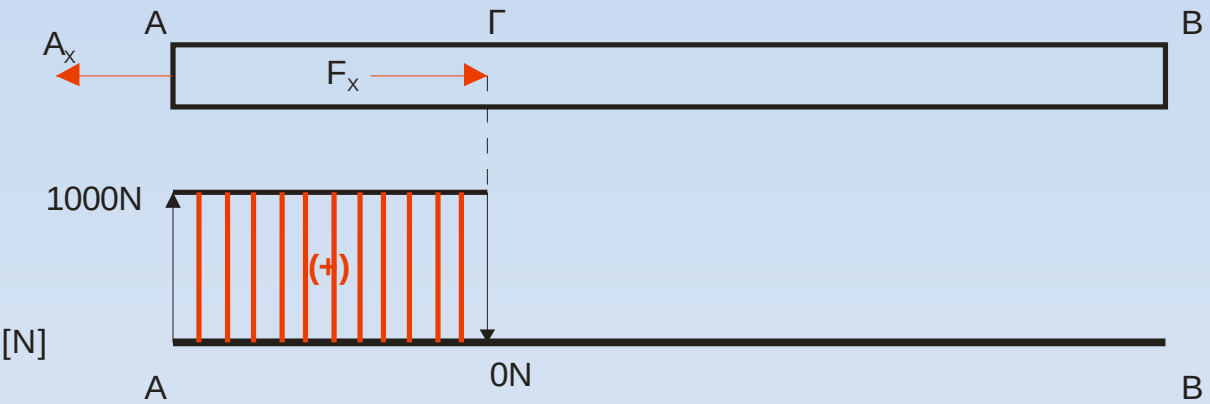
Στη συνέχεια προχωράμε προς την δεξιά πλευρά της δοκού μέχρι να συναντήσουμε το επόμενο αξονικό φορτίο. Στο μεσοδιάστημα η φόρτιση παραμένει σταθερή, οπότε το διάγραμμα παριστάνεται με μια παράλληλη στη δοκό ευθεία. Στο παράδειγμα συναντάμε το επόμενο αξονικό φορτίο στο σημείο Γ:



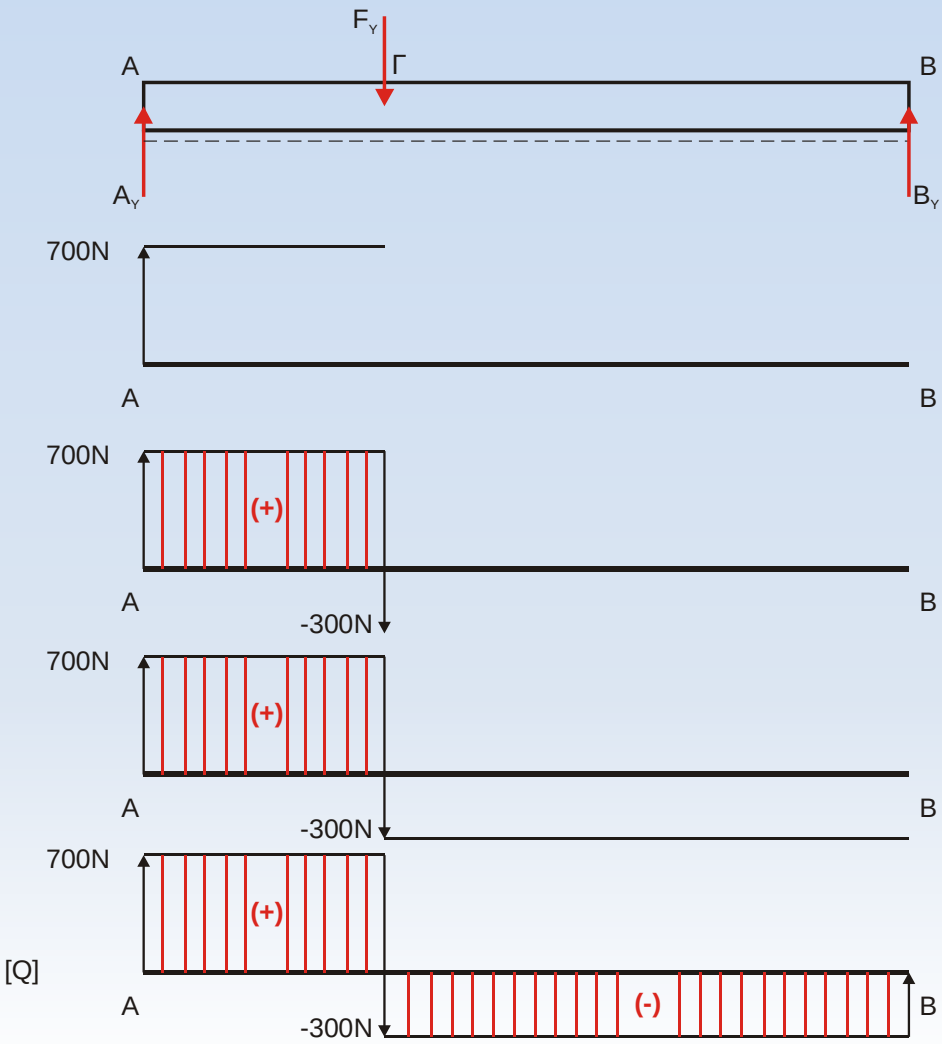
Στο συγκεκριμένο σημείο εφαρμόζεται η F_x , η οποία έχει αντίθετη φορά με την A_x οπότε και το 'άλμα' θα είναι προς την αντίθετη κατεύθυνση και με μέτρο όσο είναι η τιμή του φορτίου F_x :



Προχωρώντας προς τα δεξιά παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει άλλο αξονικό φορτίο, οπότε το τελικό διάγραμμα [N] έχει την παρακάτω μορφή:



Διάγραμμα Q (διατμητικών ή εγκάρσιων φορτίων)
Ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία:



Το πρόσημο της φόρτισης μπορεί να καθοριστεί με δύο τρόπους:

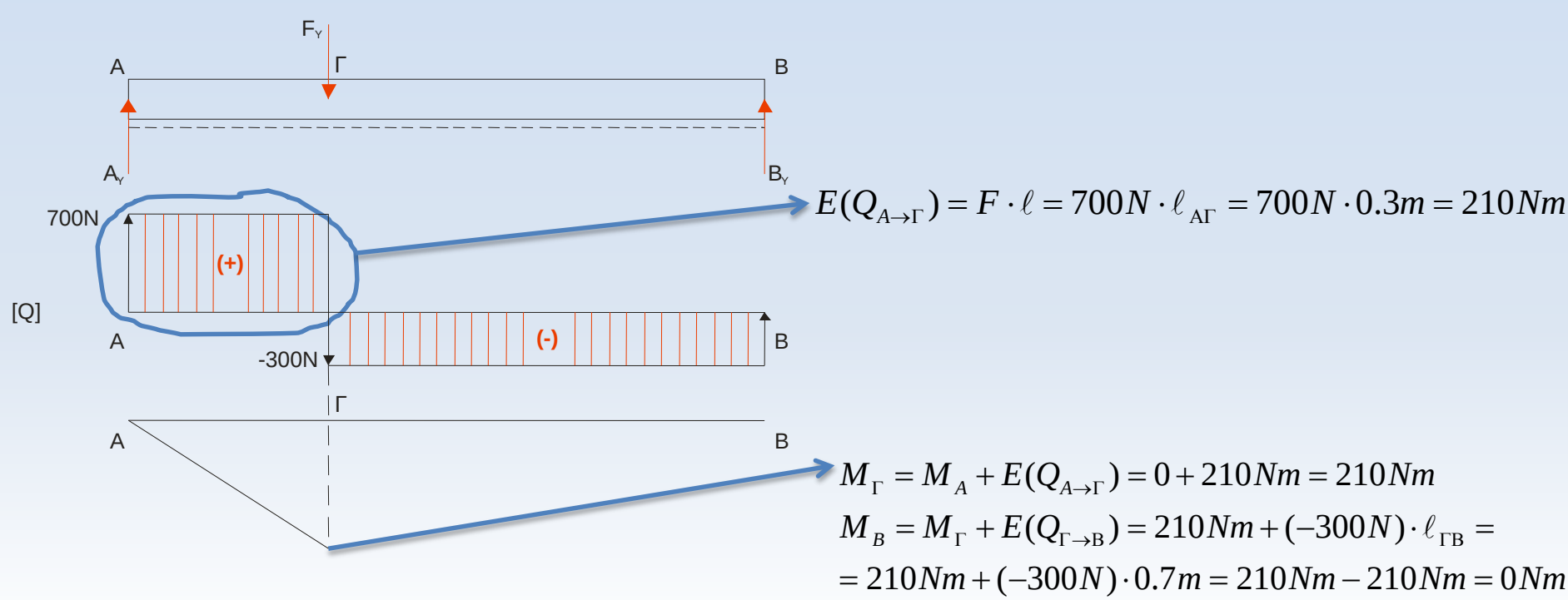
1. Βάση της παραμόρφωσης της ίνας αναφοράς
Εγκάρσιο φορτίο που προκαλεί εφελκυσμό στην ίνα αναφοράς θεωρείται θετικό. Αν προκαλεί θλίψη είναι αρνητικό.
2. Βάση της κατεύθυνσης του φορτίου ως προς την ίνα αναφοράς:
Εγκάρσιο φορτίο που συναντά πρώτα την ίνα αναφοράς και μετά τη δοκό θεωρείται θετικό. Σε αντίθετη περίπτωση είναι αρνητικό.



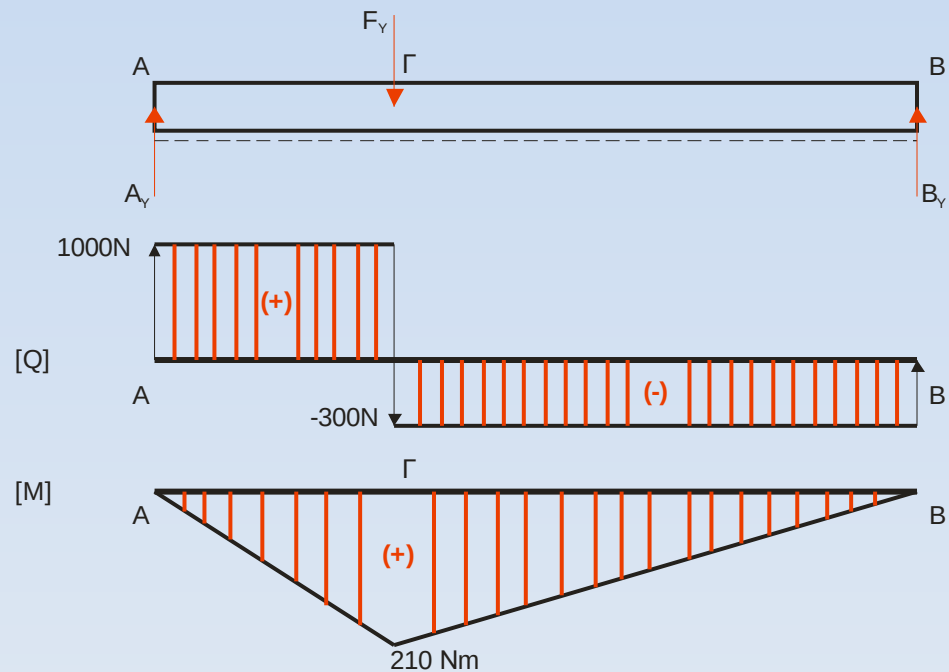
Διάγραμμα M (καμπτικών ροπών)

Το διάγραμμα καμπτικών ροπών προκύπτει πολύ εύκολα από το διάγραμμα διατμητικών φορτίων ως εξής:

Στο παρόν παράδειγμα γνωρίζουμε ότι η καμπτική ροπή στα άκρα της δοκού είναι μηδενική (γιατί;). Οπότε προκειμένου να σχεδιάσουμε το διάγραμμα μας λείπει η τιμή της καμπτικής ροπής στο σημείο Γ. Αυτό υπολογίζεται με τον εξής τρόπο: Έσε δύο διαδοχικά σημεία μιας δοκού η καμπτική ροπή του δεύτερου σημείου προκύπτει εάν προσθέσουμε στην καμπτική ροπή του πρώτου το εμβαδόν του αντίστοιχου τμήματος του διαγράμματος Q'.



Το ολοκληρωμένο διάγραμμα καμπτικών ροπών φαίνεται παρακάτω:



Παράδειγμα υπολογισμού φορτίων διατομής
Διαγράμματα N, Q, M
(Πρακτική μέθοδος)

Δρ. Μηχ. Μηχ. Α. Τσουκνίδας

Σχήμα 30

Η αβαρής οριζόντια ράβδος AB στηρίζεται με άρθρωση στο άκρο της A, ενώ το σημείο Δ είναι προσδεμένο στο άκρο κατακόρυφου νήματος, του οποίου το άκρο E είναι ακλόνητο. Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στήριξης στην άρθρωση A και η δύναμη που ασκείται στο νήμα ΔΕ.

Δίδονται:

$F_1=30 \text{ kN}$, $F_2=10 \text{ kN}$

