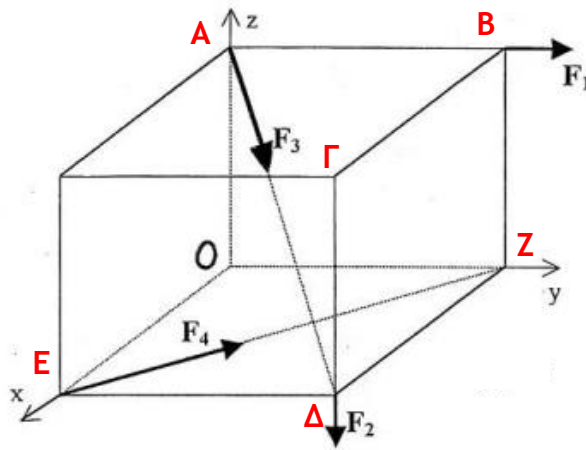


ΑΣΚΗΣΗ 1

Στις κορυφές κύβου ακμής 1m ασκούνται οι τέσσερις δυνάμεις που φαίνονται στο Σχήμα. Τα μέτρα τους είναι $F_1=400\text{N}$, $F_2=400\text{N}$, $F_3=400\sqrt{3}\text{ N}$ και $F_4=400\sqrt{2}\text{ N}$:

- α) εκφράστε συναρτήσει των i, j, k τις δυνάμεις, καθώς και τη συνισταμένη τους R .
- β) προσδιορίστε το μέτρο της συνισταμένης, R .
- γ) βρείτε τη ροπή της F_2 ως προς την αρχή των αξόνων
- δ) βρείτε τη ροπή της F_2 ως προς τον άξονα y .



ΛΥΣΗ:

α) Θέτω A (0,0,1) και B(0,1,1) (βλ. σχήμα)

$$\vec{F}_1 = |F_1| \cdot \lambda_1 \text{ και } \lambda_1 = \frac{AB}{|AB|} = \frac{0i+1j+0k}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = j$$

Επομένως $\vec{F}_1 = 400j$ [1]

Θέτω Γ(1,1,1) και Δ(1,1,0) (βλ. σχήμα)

$$\vec{F}_2 = |F_2| \cdot \lambda_2 \text{ και } \lambda_2 = \frac{\Gamma\Delta}{|\Gamma\Delta|} = \frac{0i+0j-1k}{\sqrt{0^2+0^2+(-1)^2}} = -k$$

Επομένως $\vec{F}_2 = -400k$ [2]

Από τα προηγούμενα έχω ότι A(0,0,1) και Δ(1,1,0) (βλ. σχήμα)

$$\vec{F}_3 = |F_3| \cdot \lambda_3 \text{ και } \lambda_3 = \frac{A\Delta}{|A\Delta|} = \frac{1i+1j-1k}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{i+j-k}{\sqrt{3}}$$

Επομένως $\vec{F}_3 = 400\sqrt{3} \frac{i+j-k}{\sqrt{3}} \Rightarrow \vec{F}_3 = 400i + 400j - 400k$ [3]

Θέτω E(1,0,0) και Z(0,1,0) (βλ. σχήμα)

$$\vec{F}_4 = |F_4| \cdot \lambda_4 \text{ και } \lambda_4 = \frac{EZ}{|EZ|} = \frac{-1i+1j-0k}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}} = \frac{-i+j}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Επομένως } \vec{F}_4 = 400\sqrt{2} \frac{-i+j}{\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{F}_4 = -400i + 400j \quad [4]$$

Η συνισταμένη $\vec{R}$ των δυνάμεων δίνεται από τον τύπο (ανάλυση ως προς τις συντεταγμένες της)

$$\vec{R} = R_x \cdot i + R_y \cdot j + R_z \cdot k$$

Αντικαθιστώ στον παραπάνω τύπο τις δυνάμεις από τις σχέσεις [1], [2], [3] και [4] και έχω

$$\vec{R} = (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}) \cdot i + (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}) \cdot j + (F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z}) \cdot k \Rightarrow$$

$$\vec{R} = (0 + 0 + 400 - 400) \cdot i + (400 + 0 + 400 + 400) \cdot j + (0 - 400 - 400 + 0) \cdot k \Rightarrow$$

$$\vec{R} = 0i + 1200j - 800k \Rightarrow$$

$$\vec{R} = 1200j - 800k \quad [5]$$

β) Το μέτρο $|R|$ της δύναμης $\vec{R}$ δίνεται από τον τύπο

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τη σχέση [5], έχουμε

$$|R| = \sqrt{0^2 + 1200^2 + (-200)^2} \Rightarrow$$

$$|R| = \sqrt{2.080.000} \Rightarrow |R| = 1442\text{N}$$

γ) Η ροπή της δύναμης $\vec{F}_2$ ως προς την αρχή των αξόνων **O** (0,0,0) δίνεται από τη σχέση

$$M_o^{F_2} = r_{O\Delta} \times F_2 \quad [6]$$

Όμως,

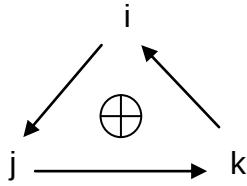
$$r_{O\Delta} = (x_\Delta - x_o) \cdot i + (y_\Delta - y_o) \cdot j + (z_\Delta - z_o) \cdot k \Rightarrow$$

$$r_{O\Delta} = 1i + 1j + 0k \Rightarrow r_{O\Delta} = i + j \quad [7]$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση [6] τις [2] και [7], έχουμε τελικά ότι

$$M_o^{F_2} = (i + j) \times (-400k) \Rightarrow M_o^{F_2} = -400_{i \times k} - 400_{j \times k}$$

Και επειδή



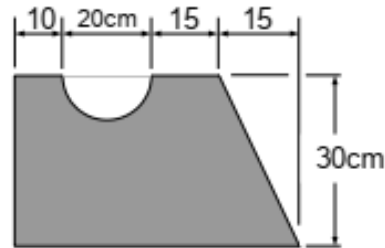
θα είναι $M_o^{F_2} = 400_j - 400_i \Rightarrow M_o^{F_2} = -400_i + 400_j$

δ) Η ροπή της $\vec{F}_2$ ως προς τον άξονα y υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση

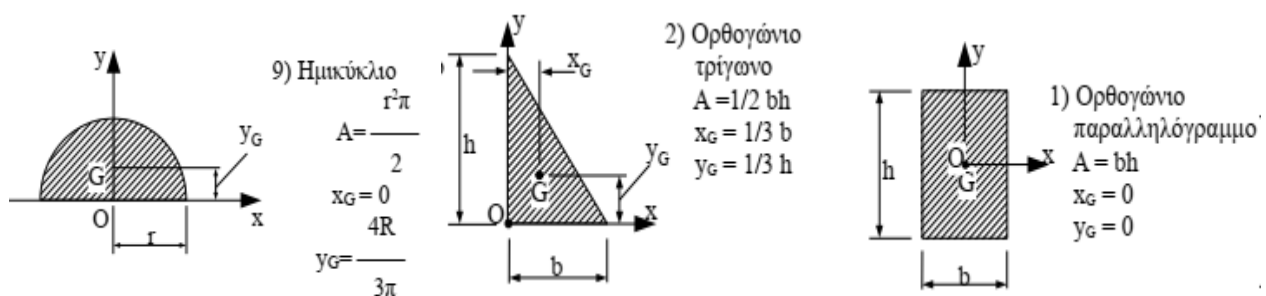
$$M_y^{F_2} = M_o^{F_2} \times j \Rightarrow M_y^{F_2} = (-400_i + 400_j) \times j = -400i \cdot j + 400j \cdot j \Rightarrow$$
$$M_y^{F_2} = 400 \text{ NM}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Προσδιορίστε τη θέση του κέντρου βάρους της επιφάνειας του παρακάτω σχήματος. Όλες οι διαστάσεις είναι σε cm.

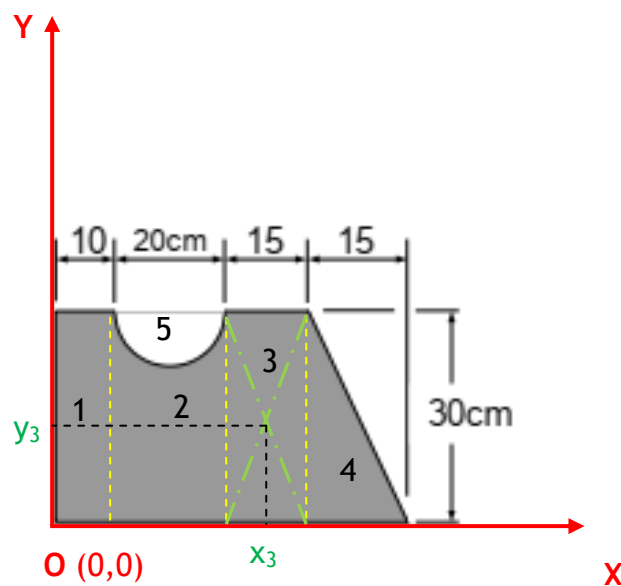


Δίνονται εμβαδά και θέση κέντρων βάρους ημικυκλίου, ορθογωνίου τριγώνου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου:



ΛΥΣΗ:

i) Τοποθετώ το σχήμα πάνω στους άξονες x και y, με την αρχή του σχήματος να βρίσκεται στην κορυφή O(0,0) και το χωρίζω σε γνωστά απλά σχήματα.



ii) Χρησιμοποιώντας τους τύπους που δίνονται στην εκφώνηση βρίσκω το κέντρο βάρους (x_i , y_i) και το εμβαδόν (A_i) για κάθε σχήμα και τα αποτελέσματα τα γράφω σε πίνακα.

ΠΡΟΣΟΧΗ 1. Τα σχήματα είναι 5 (3 ορθογώνια παραλληλόγραμμα, 1 ορθογώνιο τρίγωνο και 1 ημικύκλιο που έχει αφαιρεθεί από το ορθογώνιο #2).

ΠΡΟΣΟΧΗ 2. Εφόσον το σχήμα έχει τοποθετηθεί σε άξονες, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις πραγματικές συντεταγμένες του Κ.Β που βρίσκουμε κάθε φορά για κάθε σχήμα. Για παράδειγμα, για το **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 3**, οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους (x_G, y_G) δίνονται από τη σχέση:

$x_G = \frac{1}{2}b$ και $y_G = \frac{1}{2}h$ (το κέντρο βάρους βρίσκεται στην τομή των διαγωνίων του, βλ. πράσινες γραμμές), άρα

$$x_G = \frac{1}{2}15 = 7.5 \text{ και } y_G = \frac{1}{2}30 = 15$$

ΟΜΩΣ

Επειδή το σχήμα τοποθετήθηκε σε άξονες, το κέντρο βάρους του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου 3 (x_3, y_3) θα πρέπει να τοποθετηθεί και αυτό στους ίδιους άξονες, άρα θα πρέπει να βρούμε την απόσταση του x_3 από τον άξονα y και του y_3 από τον άξονα x .

Επομένως $x_3=10+20+7.5= 37.5$ και $y_3=15$.

ΠΡΟΣΟΧΗ 3. Το εμβαδόν του ημικυκλίου 5 «λείπει» επομένως έχει αρνητικό πρόσημο.

A/A	x_i	y_i	A_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	5	15	300	1.500	4.500
2	20	15	600	12.000	9.000
3	37.5	15	450	16.875	6.750
4	50	10	225	11.250	2.250
5	20	25.75	(-) 157	(-) 3.140	(-) 4.042,75
ΣΥΝΟΛΟ			1.418	38.485	18.457,25

Οι συντεταγμένες (x_K, y_K) του κέντρου βάρους K του σχήματος θα είναι:

$$x_K = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} = \frac{38.485}{1.418} = 24,17$$

$$y_K = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{18.457,25}{1.418} = 13$$

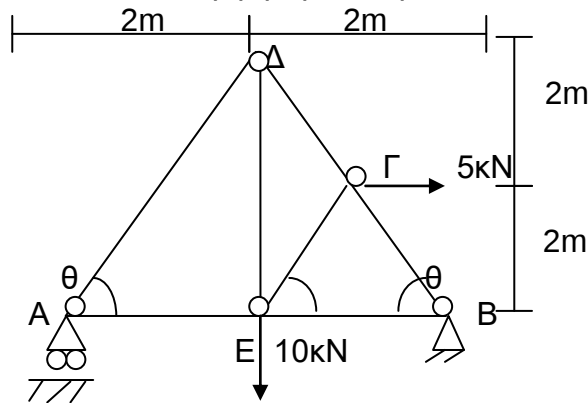
ΑΣΚΗΣΗ 3

Στο ακόλουθο δικτύωμα του σχήματος ζητούνται:

A) Να αποδειχθεί η ισοστατικότητα του δικτυώματος.

B) Ποιες είναι οι μέθοδοι επίλυσης των δικτυωμάτων? (αναφέρετε). Αν ζητούνταν οι δυνάμεις στις ράβδους ΓΔ, ΕΓ και ΕΒ ποια μέθοδο θα χρησιμοποιούσατε και γιατί (αναφέρετε χωρίς να λύσετε).

Γ) Αν τα φορτία στις ράβδους ΕΒ και ΕΓ είναι θετικά και το φορτίο της ΓΔ αρνητικό να διευκρινιστεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



ΛΥΣΗ

A) για να είναι το δικτύωμα ισοστατικό θα πρέπει

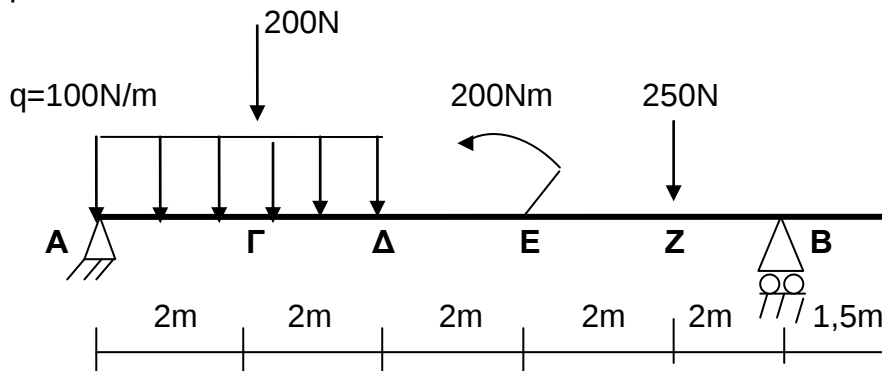
$$\rho_{\epsilon\sigma} + \rho_{\epsilon\zeta} = 2\kappa \Rightarrow 3 + 7 = 2 \times 5 \Rightarrow 10 = 10 \text{ άρα ισοστατικό}$$

B) Στο μάθημα διδάχτηκαν i) η μέθοδος κόμβων και ii) η μέθοδος Ritter (τομών). Από αυτές θα χρησιμοποιούσαμε τη μέθοδο τομών Ritter γιατί αυτή χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να υπολογίσουμε φορτίο συγκεκριμένων ράβδων και όχι όλων.

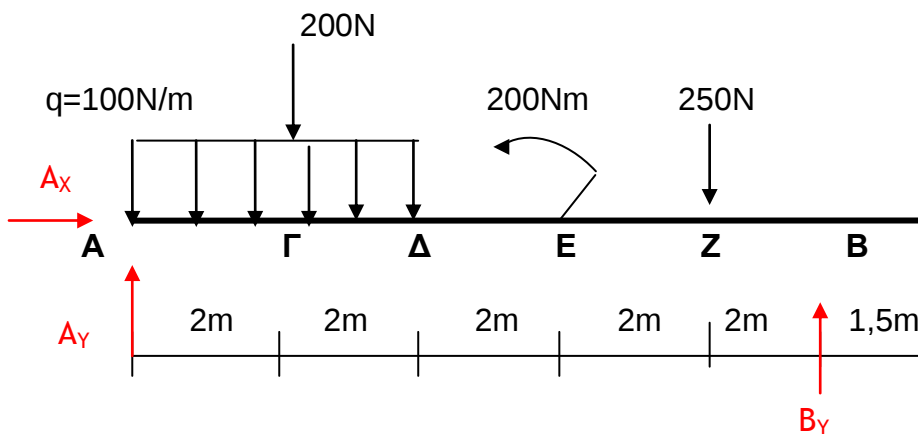
Γ) N_{EB} (+) : εφελκυσμός, N_{EG} (+) : εφελκυσμός, N_{GD} (-) : θλίψη

ΑΣΚΗΣΗ 4

Στη δοκό του σχήματος να γίνουν τα διαγράμματα, τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.



ΛΥΣΗ



Υπολογισμός Αντιδ. Στήριξης

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 200 - Q - 250 = 0$$

$$Q = q \cdot l = 100 \cdot 4 \Rightarrow Q = 400 \text{ N} \quad (\text{εφαρμόζεται στο } \frac{1}{2}).$$

Άρα,

$$A_y + B_y = 200 + 400 + 250 \Rightarrow A_y + B_y = 850 \text{ N} \quad [1]$$

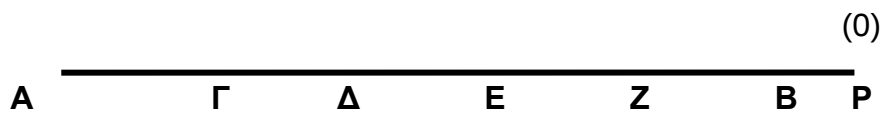
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -200 \cdot 2 - 400 + 200 - 250 \cdot 8 + B_y \cdot 10 = 0 \Rightarrow$$

$$10B_y = 300 \Rightarrow B_y = 300 \text{ N}$$

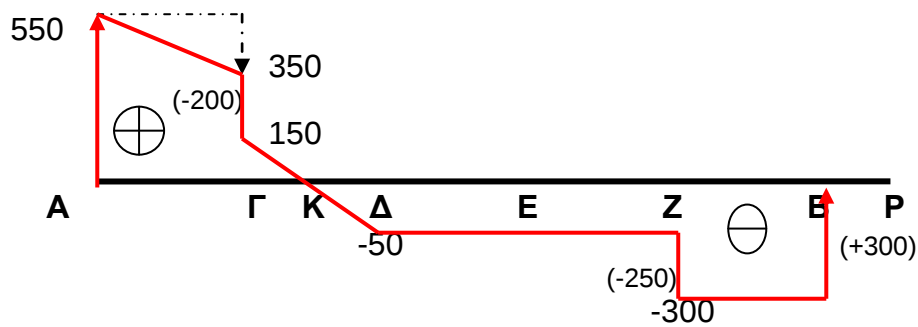
$$\text{Άρα από την [1] έχω } A_y = 550 \text{ N}$$

Υπολογισμός N, Q, M (τρόπος: εποπτικός + εμβαδών)

$N_{(x)}$:



$Q_{(x)}$:



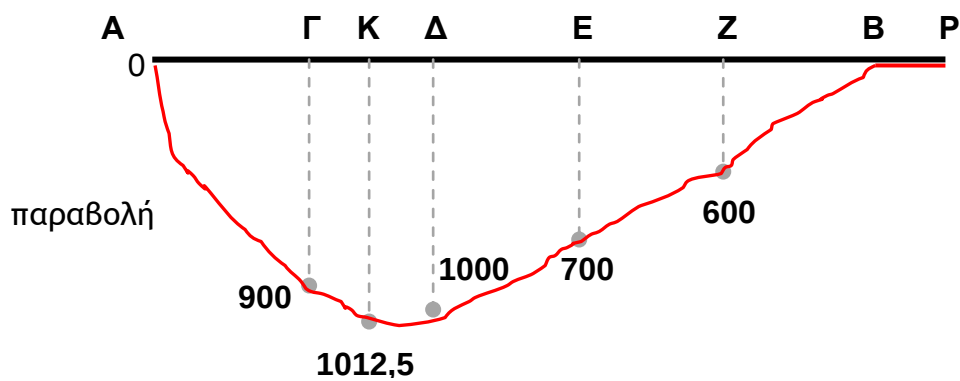
Υπολογισμός Κ:

$$Q_K=0 \Rightarrow Q_K=Q_{\Gamma}-E_{\Gamma-K} \Rightarrow$$

$$0=150-q \cdot \Gamma K \Rightarrow$$

$$\Gamma K=150/100=1,5m$$

$M_{(x)}$:



(ΔΕΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ)

$$M_A = 0Nm$$

$$M_\Gamma = M_A + E_{A \rightarrow \Gamma} = Q + \frac{550 + 350}{2} \cdot 2 \Rightarrow M_\Gamma = 900Nm$$

$$M_K = M_\Gamma + E_{\Gamma \rightarrow K} = 900 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 150 \Rightarrow M_K = 1012,5Nm$$

$$M_\Delta = M_\Gamma + E_{\Gamma \rightarrow \Delta} = 900 + \frac{1}{2} \cdot \Gamma K \cdot 150 + \frac{1}{2} \cdot (2 - \Gamma K) \cdot (-50) =$$

$$= 900 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 150 - \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 50 \Rightarrow M_\Delta = 1000Nm$$

$$M_E = M_\Delta + E_{\Delta \rightarrow E} = 1000 - 200 + 2 \cdot (-50) \Rightarrow M_E = 700Nm$$

$$M_Z = M_E + E_{E \rightarrow Z} = 700 + 2 \cdot (-50) \Rightarrow M_Z = 600Nm$$

$$M_B = M_Z + E_{Z \rightarrow B} = 600 + 2 \cdot (-300) \Rightarrow M_B = 0Nm$$

$$M_P = M_B + E_{B \rightarrow P} = 0 + 0 \Rightarrow M_P = 0Nm$$