

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την ευθεία και αντίστροφη κινηματική για χειριστές με συνδέσμους σε σειρά. Το πρόβλημα της κινηματικής είναι να περιγράψει την κίνηση χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι δυνάμεις και οι ροπές εξαιτίας της κίνησης. Η κινηματική περιγραφή δηλαδή είναι γεωμετρική. Πρώτα θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της ευθείας κινηματικής σύμφωνα με το οποίο θα καθορίσουμε την θέση και τον προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης, με δεδομένες τις τιμές για τις μεταβλητές των αρθρώσεων του ρομπότ. Το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής είναι ο καθορισμός των τιμών των μεταβλητών των αρθρώσεων με δεδομένη τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης.

3.1 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Όπως περιγράφηκε και στο κεφάλαιο ένα, ένας ρομποτικός χειριστής αποτελείται από ένα σύνολο από συνδέσμους που είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους μέσω αρθρώσεων. Οι αρθρώσεις μπορεί να είναι είτε πολύ μικρές, όπως μια περιστροφική άρθρωση ή μια πρισματική άρθρωση είτε μπορεί να είναι περισσότερο πολύπλοκες, όπως μια σφαιρική και κοίλη άρθρωση (υπενθυμίζοντας ότι μια περιστροφική άρθρωση μοιάζει με αρμό και επιτρέπει μια σχετική περιστροφή γύρω από έναν άξονα, ενώ μια πρισματική άρθρωση επιτρέπει μια γραμμική κίνηση κατά μήκος ενός άξονα που ονομάζεται προέκταση ή ανάκληση). Η διαφορά μεταξύ των δυο καταστάσεων είναι ότι στην πρώτη περίπτωση η άρθρωση έχει μόνο ένα DOF κίνησης : τη γωνία περιστροφής στην περίπτωση της περιστροφικής άρθρωσης και την ποσότητα της γραμμικής μετατόπισης στην περίπτωση της πρισματικής άρθρωσης. Σε αντίθεση μια σφαιρική και κοίλη άρθρωση έχει δυο DOF. Σε αυτό το βιβλίο υποθέτουμε ότι αυτές οι αρθρώσεις έχουν ένα DOF. Αυτή η υπόθεση δεν εμπεριέχει κάποια πραγματική απώλεια της γενικότητας από τη στιγμή που αρθρώσεις τύπου σφαιρικής και κοίλης άρθρωσης (2 DOF) ή του σφαιρικού καρπού (3 DOF) μπορούν πάντα να θεωρηθούν ως αλληλουχία αρθρώσεων ενός βαθμού ελευθερίας με συνδέσμους μηδενικού μήκους ανάμεσά τους.

Με αυτήν την υπόθεση ότι κάθε άρθρωση έχει ένα DOF, η ενέργεια της κάθε άρθρωσης μπορεί να περιγραφεί με έναν πραγματικό αριθμό : τη γωνία της περιστροφής στην περίπτωση της περιστροφικής άρθρωσης ή τη μετατόπιση στην περίπτωση της πρισματικής άρθρωσης. Ο στόχος της

ευθείας κινηματικής ανάλυσης είναι ο καθορισμός, αθροιστικά του αποτελέσματος, ολόκληρου του συνόλου των μεταβλητών των αρθρώσεων, δηλαδή ο καθορισμός της θέσης και του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης με δεδομένες τις τιμές των μεταβλητών των αρθρώσεων. Αντίθετα ο σκοπός της αντίστροφης κινηματικής ανάλυσης είναι ο καθορισμός των τιμών των μεταβλητών των αρθρώσεων δεδομένης της θέσης και του προσανατολισμού του πλαισίου του τελικού στοιχείου δράσης.

Ένας ρομποτικός χειρίστης με n αρθρώσεις θα έχει $n+1$ συνδέσμους, από την στιγμή που μια τέτοια άρθρωση συνδέει 2 συνδέσμους. Αριθμούμε τις αρθρώσεις από το 1 έως το n , και τους συνδέσμους από το 0 έως το n , ξεκινώντας από τη βάση. Σύμφωνα με αυτήν την συνθήκη η άρθρωση i συνδέει τον σύνδεσμο $i-1$ με το σύνδεσμο i . Θεωρούμε ότι η θέση της άρθρωσης i είναι αμετακίνητη σε σχέση με το σύνδεσμο $i-1$. Όταν ενεργοποιείται η άρθρωση i κινείται ο σύνδεσμος i . Άρα ο σύνδεσμος 0 (δηλαδή ο πρώτος σύνδεσμος) είναι αμετακίνητος και δεν κινείται καθώς μετακινούνται οι αρθρώσεις. Φυσικά ο ρομποτικός χειρίστης μπορεί να είναι κινητός (δηλαδή μπορεί να είναι στερεωμένος σε μια κινητή πλατφόρμα ή σε ένα αυτόνομο όχημα).

Με την άρθρωση i^{th} σχετίζουμε μια μεταβλητή άρθρωσης η οποία συμβολίζεται με q_i . Στην περίπτωση περιστροφικής άρθρωσης το q_i είναι γωνία περιστροφής και στην περίπτωση της πρισματικής άρθρωσης το q_i είναι η μετατόπιση της άρθρωσης :

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{if joint } i \text{ is revolute} \\ d_i & \text{if joint } i \text{ is prismatic} \end{cases} \quad (3.1)$$

Για την πραγματοποίηση της κινηματικής ανάλυσης τοποθετούμε ένα πλαίσιο αναφοράς (άκαμπτα) σε κάθε σύνδεσμο. Ποιο συγκεκριμένα τοποθετούμε το πλαίσιο $O_i X_i Y_i Z_i$ στο σύνδεσμο i . Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε κίνηση εκτελεί το ρομπότ οι συντεταγμένες του κάθε σημείου στο σύνδεσμο i είναι σταθερές όταν εκφράζονται στο i^{th} πλαίσιο συντεταγμένων. Επίσης όταν ενεργοποιείται η άρθρωση i , ο σύνδεσμος i και το πλαίσιο $O_i X_i Y_i Z_i$ που είναι τοποθετημένο πάνω του, ακολουθούν την κίνηση. Το πλαίσιο $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ το οποίο είναι τοποθετημένο στη βάση του ρομπότ, αναφέρεται ως πλαίσιο αδράνειας. Το σχήμα 3.1 παρουσιάζει τα τοποθετημένα πλαίσια (άκαμπτα) στους συνδέσμους για την περίπτωση χειριστή τύπου αγκώνα .

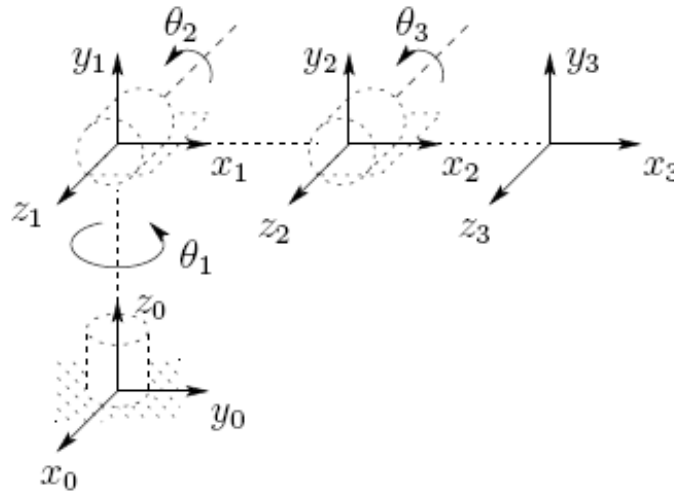


Fig. 3.1 Coordinate frames attached to elbow manipulator

Σχήμα 3.1 Συστήματα συντεταγμένων τοποθετημένα στο χειριστή τύπου αγκώνα

Υποθέτουμε ότι ο A_i είναι ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού ο οποίος εκφράζει τη θέση και προσανατολισμό του σ_i x_i y_i z_i σε σχέση με το σ_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1} . Ο πίνακας A_i δεν είναι σταθερός αλλά μεταβάλλεται καθώς η διαμόρφωση του ρομπότ αλλάζει. Επομένως η υπόθεση ότι όλες οι αρθρώσεις είναι πρισματικές ή περιστροφικές σημαίνει ότι ο A_i είναι μια συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής της άρθρωσης και ονομάζεται q_i , δηλαδή :

$$A_i = A_i(q_i) \tag{3.2}$$

Ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού ο οποίος εκφράζει τη θέση και τον προσανατολισμό του σ_j x_j y_j z_j σε σχέση με το σ_i x_i y_i z_i ονομάζεται κατά συνθήκη, πίνακας μετασχηματισμού και συμβολίζεται με T_j^i . Από το κεφάλαιο 2 είδαμε ότι

$$T_j^i = \begin{cases} A_{i+1}A_{i+2} \dots A_{j-1}A_j & \text{if } i < j \\ I & \text{if } i = j \\ (T_i^j)^{-1} & \text{if } j > i \end{cases} \tag{3.3}$$

Επειδή έχουμε τοποθετήσει τα διάφορα πλαίσια άκαμπτα στους αντίστοιχους συνδέσμους αυτό σημαίνει ότι η θέση του κάθε σημείου του τελικού στοιχείου δράσης, όταν εκφράζεται στο πλαίσιο n , είναι μια σταθερά ανεξάρτητη της διαμόρφωσης του ρομπότ. Συμβολίζουμε τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης σε σχέση με το πλαίσιο της βάσης ή πλαίσιο αδράνειας με ένα τριπλό διάνυσμα O_n^0 (το οποίο δίνει τις

συντεταγμένες της αρχής των αξόνων του τελικού στοιχείου δράσης σε σχέση με το πλαίσιο της βάσης) και τον 3Χ3 πίνακα περιστροφής R_n^0 και έτσι καθορίζουμε τον πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού

$$H = \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Έτσι η θέση και ο προσανατολισμός του τελικού στοιχείου δράσης σε σχέση με το πλαίσιο αδρανείας δίνονται από

$$H = T_n^0 = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n) \quad (3.5)$$

Κάθε ομογενείς μετασχηματισμός A_i είναι της μορφής

$$A_i = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & o_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Έτσι

$$T_j^i = A_{i+1} \cdots A_j = \begin{bmatrix} R_j^i & o_j^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Ο πίνακας R_j^i εκφράζει τον προσανατολισμό του $O_j X_j Y_j Z_j$ σε σχέση με το $O_i X_i Y_i Z_i$ και δίνεται από τα περιστροφικά μέρη των πινάκων A σαν :

$$R_j^i = R_{i+1}^i \cdots R_j^{j-1} \quad (3.8)$$

Τα διανύσματα συντεταγμένων O_j^i δίνονται περιοδικά από τον τύπο :

$$o_j^i = o_{j-1}^i + R_{j-1}^i o_j^{j-1} \quad (3.9)$$

Για την ευθεία κινηματική αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ο καθορισμός των συναρτήσεων $A_i(q_i)$ και τις πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους. Ωστόσο μπορεί να απλοποιηθεί το πρόβλημα εισάγοντας διάφορες συνθήκες όπως η αναπαράσταση μιας άρθρωσης κατά Denavit-Hartenberg.

3.2 ΕΥΘΕΙΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ : ΣΥΝΘΗΚΗ DENAVIT HARTENBERG

Σ αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε τις εξισώσεις της ευθείας κινηματικής για άκαμπτα ρομπότ. Το πρόβλημα της ευθείας κινηματικής έχει σχέση με τις αρθρώσεις μεμονωμένα του ρομποτικού χειριστή κ με την θέση κ τον προσανατολισμό του εργαλείου ή τελικού στοιχείου δράσης. Οι μεταβλητές των αρθρώσεων μεταξύ των συνδέσμων στην περίπτωση των περιστροφικών αρθρώσεων και η επέκταση του συνδέσμου στην περίπτωση των ολισθαινόντων αρθρώσεων.

Η ανάλυση αυτή είναι μια συστηματική διαδικασία, με την ανάπτυξη κάποιων συνθηκών. Βέβαια είναι δυνατόν η ευθεία κινηματική ανάλυση να γίνει και χωρίς αυτές τις συνθήκες, όπως στο παράδειγμα του επίπεδου χειριστή δυο συνδέσμων (κεφάλαιο 1). Ωστόσο η κινηματική ανάλυση η συνδέσμων μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκη κ για αυτό οι συνθήκες που αναπτύσσονται παρακάτω απλοποιούν την ανάλυση αυτή.

Μια συνηθισμένη συνθήκη για επιλεγμένα πλαίσια αναφοράς σε ρομποτικές εφαρμογές είναι η Denavit-Hartenberg ή DH συνθήκη. Σε αυτήν τη συνθήκη κάθε ομογενής μετασχηματισμός A_i παριστάνεται σαν ένα γινόμενο τεσσάρων βασικών μετασχηματισμών

$$\begin{aligned}
 A_i &= Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

όπου οι τέσσερις ποσότητες θ_i , a_i , d_i , α_i είναι παράμετροι οι οποίες σχετίζονται με τον σύνδεσμο i και την άρθρωση i . Οι τέσσερις παράμετροι a_i , α_i , d_i , θ_i γενικά ονομάζονται μήκος συνδέσμου, περιστροφή συνδέσμου, μετατόπιση συνδέσμου και γωνία άρθρωσης, αντίστοιχα. Τα ονόματα αυτά εξάγονται από τις γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ δυο πλαισίων συντεταγμένων. Από τη στιγμή που ο πίνακας A_i είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής προκύπτει ότι οι τρεις από τις παραπάνω τέσσερις ποσότητες είναι σταθερές για ένα δεδομένο σύνδεσμο, ενώ η τέταρτη παράμετρος θ_i για περιστροφική άρθρωση και d_i για πρισματική άρθρωση, είναι η μεταβλητή της άρθρωσης.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 ένας τυχαίος πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού χαρακτηρίζεται από έξι αριθμούς όπως για παράδειγμα, τρεις αριθμοί για τον καθορισμό της τέταρτης στήλης του πίνακα και τρεις γωνίες Euler για τον καθορισμό του άνω αριστερά 3×3 πίνακα περιστροφής. Στην αναπαράσταση DH αντίθετως υπάρχουν μόνο τέσσερις παράμετροι. Αυτό γίνεται ως εξής : ενώ το πλαίσιο i πρέπει να είναι τοποθετημένο άκαμπτα στο σύνδεσμο i έχουμε ελευθερία επιλογής της αρχής των αξόνων του πλαισίου και των αξόνων συντεταγμένων. Για παράδειγμα δεν είναι απαραίτητο η αρχή O_i του πλαισίου i να είναι τοποθετημένη στο φυσικό τέρμα του συνδέσμου i . Στην πράξη δεν είναι καν απαραίτητο ότι το πλαίσιο i να είναι τοποθετημένο εντός του φυσικού συνδέσμου. Το πλαίσιο i μπορεί να βρίσκεται σε ελεύθερο χώρο όσο το πλαίσιο i είναι άκαμπτα τοποθετημένο στο σύνδεσμο i . Με σωστή επιλογή της αρχής και των αξόνων συντεταγμένων είναι δυνατόν να μειωθούν αριθμητικά οι παράμετροι που χρειάζονται, από έξι σε τέσσερις (ή ακόμα λιγότερες σε ορισμένες περιπτώσεις).

3.2.1 Ζητήματα ύπαρξης και μοναδικότητας

Είναι ξεκάθαρο ότι δεν είναι δυνατή η αναπαράσταση οποιουδήποτε τυχαίου ομογενούς μετασχηματισμού χρησιμοποιώντας μόνο τέσσερις παραμέτρους. Για αυτό καθορίζουμε ποιοι ομογενείς μετασχηματισμοί μπορούν να εκφραστούν σύμφωνα με τη σχέση (3.10). Έστω ότι τα δυο πλαίσια συμβολίζονται με 0 και 1 αντίστοιχα. Έτσι υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας A ομογενούς μετασχηματισμού που μεταφέρει τις συντεταγμένες από το πλαίσιο 1 σε αυτές του πλαισίου 0. Υποθέτουμε ότι τα δυο πλαίσια έχουν τα ακόλουθα δυο επιπλέον χαρακτηριστικά :

Υποθέσεις για το πλαίσιο συντεταγμένων

(DH1) Ο άξονας x_1 είναι κάθετος στον άξονα z_0 .

(DH2) Ο άξονας x_1 τέμνει τον άξονα z_0 .

Αυτές οι δυο ιδιότητες παρουσιάζονται στο σχήμα 3.2 .

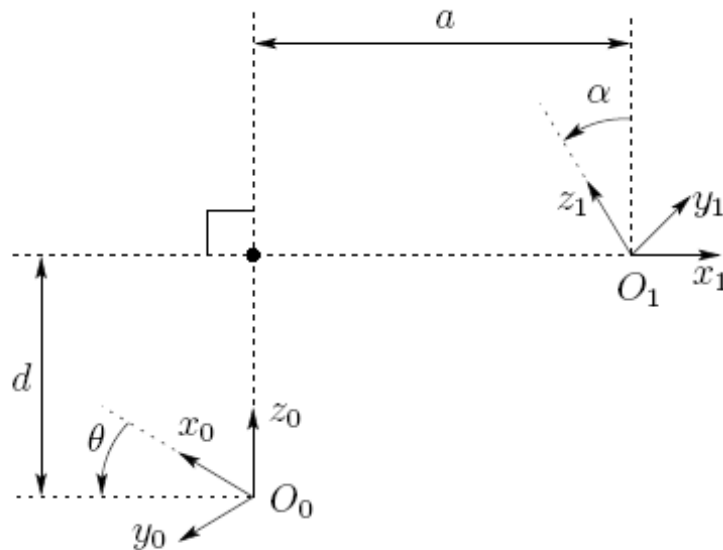


Fig. 3.2 Coordinate frames satisfying assumptions DH1 and DH2

Σχήμα 3.2 Πλαίσια συντεταγμένων που ικανοποιούν τις συνθήκες DH1 και DH2

Υπό αυτές τις συνθήκες μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί a, d, θ, α τέτοιοι ώστε :

$$A = Rot_{z,\theta} Trans_{z,d} Trans_{x,a} Rot_{x,\alpha} \tag{3.11}$$

Φυσικά από την στιγμή που θ και a είναι γωνίες, αυτό σημαίνει ότι είναι μοναδικές εντός πολλαπλασίου του 2π . Έτσι ο πίνακας A μπορεί να γράφει ως :

$$A = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Αν ικανοποιείται η (DH1) τότε ο x_1 είναι κάθετος στο z_0 και έχουμε $x_1 \cdot z_0 = 0$. Εκφράζοντας αυτό τον περιορισμό σε σχέση με το $O_0 x_0 y_0 z_0$ και κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι η πρώτη στήλη του R_1^0 είναι η αναπαράσταση του μοναδιαίου διανύσματος x_1 σε σχέση με το πλαίσιο O , λαμβάνουμε :

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^0 \cdot z_0^0 \\ &= [r_{11}, r_{21}, r_{31}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = r_{31} \end{aligned}$$

Από τη στιγμή που $r_{31} = 0$ αρκεί μόνο να δείξουμε ότι υπάρχουν μοναδικές γωνίες θ και α τέτοιες ώστε :

$$R_1^0 = R_{x,\theta} R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta c_\alpha & s_\theta s_\alpha \\ s_\theta & c_\theta c_\alpha & -c_\theta s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Η μόνη πληροφορία που έχουμε είναι ότι $r_{31} = 0$, αλλά δεν αρκεί . Έτσι από την στιγμή που κάθε γραμμή και στήλη του R_1^0 πρέπει να έχουν μοναδιαίο μήκος, $r_{31} = 0$ σημαίνει ότι :

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1, \\ r_{32}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Έτσι υπάρχουν μοναδικές θ και α τέτοιες ώστε :

$$(r_{11}, r_{21}) = (c_\theta, s_\theta), \quad (r_{33}, r_{32}) = (c_\alpha, s_\alpha)$$

Από τη στιγμή που βρήκαμε τις θ και α είναι εύκολο ναδειχτεί ότι τα στοιχεία του R_1^0 που υπολείπονται πρέπει να έχουν τη μορφή της σχέσης (3.13), γνωρίζοντας ότι ο R_1^0 είναι ένας πίνακας περιστροφής.

Η άλλη υπόθεση (DH2) σημαίνει ότι η μετατόπιση ανάμεσα στο O_0 και O_1 μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων z_0 και x_1 . Αυτό μπορεί να γραφτεί ως $O_1 = O_0 + dz_0 + ax_1$. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε αυτήν τη σχέση στις συντεταγμένες του O_0 x_0 y_0 z_0 λαμβάνοντας

$$\begin{aligned} o_1^0 &= o_0^0 + dz_0^0 + ax_1^0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} c_\theta \\ s_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ac_\theta \\ as_\theta \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα λαμβάνουμε την (3.10) όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Άρα, βλέπουμε ότι οι τέσσερις παράμετροι είναι αρκετές για τον καθορισμό κάθε ομογενούς μετασχηματισμού που ικανοποιεί τους περιορισμούς (DH1) και (DH2).

Από τη στιγμή που έχουμε δημιουργήσει κάθε τέτοιο πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού ικανοποιώντας τις συνθήκες (DH1) και (DH2) τα παραπάνω μπορούν να εκφραστούν στη μορφή (3.10), πρακτικά δίνουμε μια φυσική ερμηνεία σε κάθε μια από τις τέσσερις παραμέτρους της (3.10). Η παράμετρος a είναι η απόσταση μεταξύ των αξόνων z_0 και z_1 και μετράται κατά μήκος του άξονα x_1 . Η γωνία α είναι η γωνία μεταξύ των αξόνων z_0 και z_1 και μετράται σε επίπεδο κάθετο στον x_1 . Το θετικό πρόσημο για τη γωνία α καθορίζεται από τον z_0 στον z_1 σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3 η παράμετρος d είναι η κάθετη απόσταση από την αρχή O_0 ως την τομή του άξονα x_1 με τον z_0 , μετρούμενη κατά μήκος του άξονα z_0 . Τέλος, θ είναι η γωνία ανάμεσα στον x_0 και x_1 μετρούμενη σε επίπεδο κάθετο στον z_0 . Αυτές οι φυσικές ερμηνείες είναι χρήσιμες για την ανάπτυξη μιας διαδικασίας για την τοποθέτηση των πλαισίων συντεταγμένων τα οποία ικανοποιούν τους περιορισμούς (DH1) και (DH2).

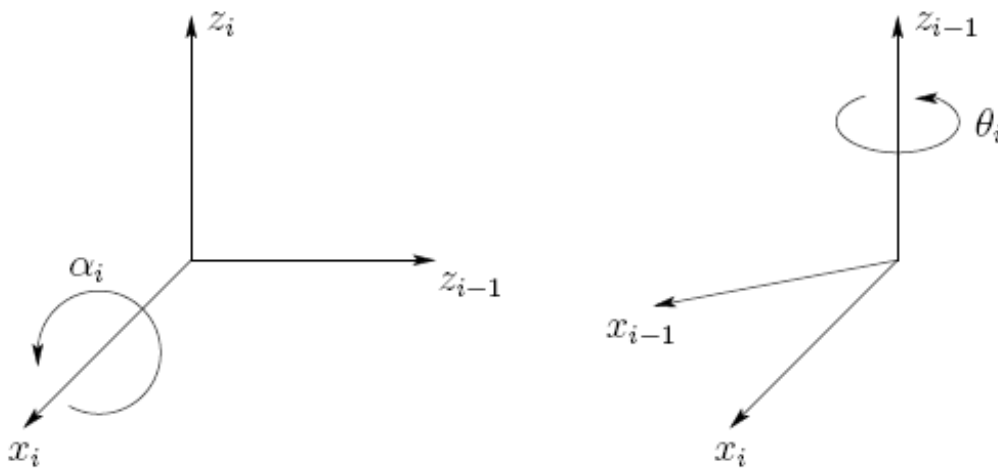


Fig. 3.3 Positive sense for α_i and θ_i

[Σχήμα 3.3 Θετική φορά για τις γωνίες \$\alpha_i\$ και \$\theta_i\$](#)

3.2.2 Τοποθέτηση των πλαισίων συντεταγμένων

Για έναν δεδομένο ρομποτικό χειριστή κάποιος μπορεί να επιλέξει τα πλαίσια O_0, \dots, O_n με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες. Σε ορισμένες περιπτώσεις αυτό απαιτεί τοποθέτηση της αρχής O_i

του πλαισίου i σε μια θέση που μπορεί να μην είναι ικανοποιητική. Είναι σημαντικό να έχουμε υπόψη μας ότι οι επιλογές των πλαισίων συντεταγμένων δεν είναι μοναδικές ακόμα και με τους περιορισμούς που θέσαμε παραπάνω. Έτσι είναι δυνατόν διαφορετικοί μηχανικοί να τοποθετούν τα πλαίσια συντεταγμένων για τους συνδέσμους των ρομπότ λειτουργώντας διαφορετικά αλλά εξίσου σωστά. Για αυτό είναι πολύ σημαντικό ότι το τελικό αποτέλεσμα (δηλαδή ο πίνακας T_n^0) θα είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από την τοποθέτηση των ενδιάμεσων πλαισίων των συνδέσμων (υποθέτοντας ότι τα πλαίσια συντεταγμένων για το σύνδεσμο n συμπίπτουν).

Η επιλογή του z_i είναι τυχαία. Από την εξίσωση (3.13) βλέπουμε ότι επιλέγοντας κατάλληλα τις a_i και θ_i , μπορούμε να λάβουμε οποιαδήποτε τυχαία κατεύθυνση για τον z_i . Έτσι σαν πρώτο βήμα, τοποθετούμε τους άξονες z_0, \dots, z_{n-1} . Συγκεκριμένα τοποθετούμε τον άξονα z_i ώστε να είναι ο άξονας της κίνησης για την άρθρωση $i+1$. Έτσι ο άξονας z_0 είναι ο άξονας κίνησης της άρθρωσης 1, z_1 είναι ο άξονας της κίνησης της άρθρωσης 2 κ.λπ. Υπάρχουν δυο περιπτώσεις :

1. Αν η άρθρωση $i+1$ είναι περιστροφική τότε ο z_i είναι ο άξονας περιστροφής της άρθρωσης $i+1$.
2. Αν η άρθρωση $i+1$ είναι πρισματική τότε ο z_i είναι ο άξονας της μετατόπισης της άρθρωσης $i+1$.

Αρχικά μπορεί να προκαλεί σύγχυση το ότι σχετίζουμε τον z_i με την άρθρωση $i+1$, αλλά αυτό ικανοποιεί τη συνθήκη την οποία αναφέραμε παραπάνω, που λέει ότι η άρθρωση i είναι αμετακίνητη σε σχέση με το πλαίσιο i και όταν η άρθρωση i ενεργοποιείται, ο σύνδεσμος i και το πλαίσιο O_i x_i y_i z_i που είναι εγκατεστημένο πάνω του, ακολουθούν την κίνηση.

Από τη στιγμή που έχουμε εγκαταστήσει τους άξονες z στους συνδέσμους έχουμε εγκαταστήσει και το πλαίσιο της βάσης. Η επιλογή του πλαισίου της βάσης είναι σχεδόν αυθαίρετη. Μπορεί να επιλέξουμε την αρχή O_0 του πλαισίου της βάσης που μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο πάνω στον z_0 . Έπειτα επιλέγουμε τους x_0, y_0 με οποιοδήποτε τρόπο μας βολεύει ώστε το πλαίσιο που προκύπτει να είναι δεξιόστροφο. Έτσι ορίζεται το πλαίσιο O .

Από τη στιγμή που το πλαίσιο O έχει εγκατασταθεί, ξεκινούμε μια ιεραρχική διαδικασία σύμφωνα με την οποία ορίζουμε το πλαίσιο i χρησιμοποιώντας το πλαίσιο $i-1$ (ξεκινάμε με το πλαίσιο 1). Το σχήμα 3.4 μας βοηθά να κατανοήσουμε αυτήν τη διαδικασία.

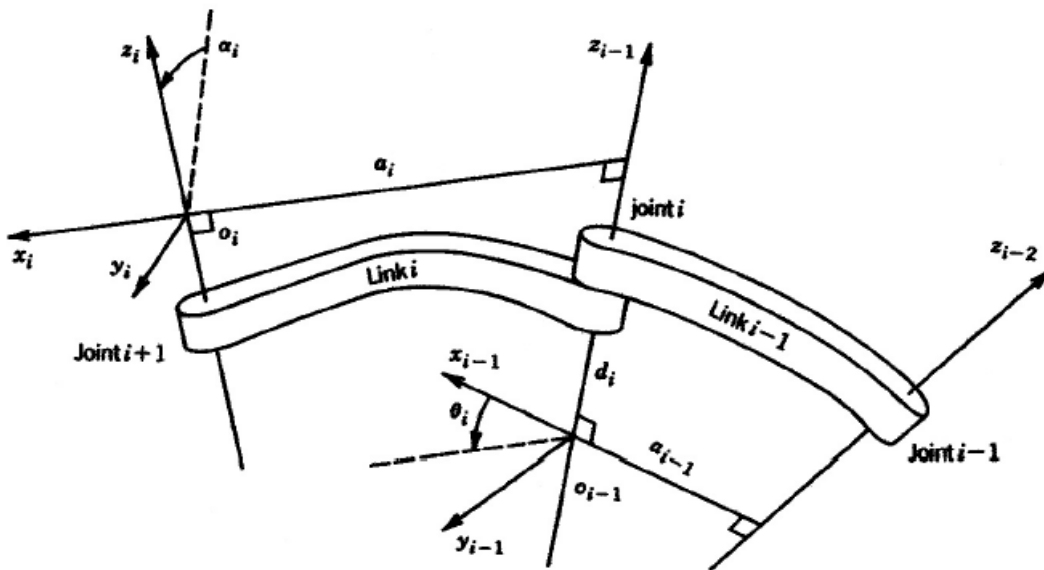


Fig. 3.4 Denavit-Hartenberg frame assignment

Σχήμα 3.4 Τοποθέτηση πλαισίων κατά Denavit Hartenberg

Για να ορίσουμε το πλαίσιο i είναι απαραίτητο να λάβουμε υπόψη τρεις περιπτώσεις :

1. Οι άξονες z_{i-1} και z_i δεν είναι στο ίδιο επίπεδο
2. Οι άξονες z_{i-1} και z_i τέμνονται
3. Οι άξονες z_{i-1} και z_i είναι παράλληλοι

Στις περιπτώσεις 2 και 3 οι άξονες z_{i-1} και z_i δεν είναι στο ίδιο επίπεδο. Αυτή η περίπτωση είναι αρκετά συνηθισμένη όπως θα δούμε στην ενότητα 3.2.3. Αναλύουμε παρακάτω καθεμία από αυτές τις τρεις περιπτώσεις.

1. Οι άξονες z_{i-1} και z_i δεν είναι στο ίδιο επίπεδο : αν οι z_{i-1} και z_i δεν είναι στο ίδιο επίπεδο τότε υπάρχει μια μοναδική γραμμή κάθετη και στους δυο αυτούς άξονες τέτοια ώστε να τους συνδέει και να έχει το ελάχιστο δυνατό μήκος. Αυτή η γραμμή είναι κάθετη στους z_{i-1} και z_i , καθορίζει τον x_i και το σημείο όπου αυτή η γραμμή τέμνει τον z_i είναι η αρχή O_i . Έτσι και οι δυο συνθήκες (DH1) και (DH2) ικανοποιούνται και το διάνυσμα από το O_{i-1} στο O_i είναι ένας γραμμικός συνδυασμός του z_{i-1} και του x_i . Ο χαρακτηρισμός του πλαισίου i έχει ολοκληρωθεί με την επιλογή του άξονα y_i έτσι ώστε να σχηματίζει ένα δεξιόστροφο πλαίσιο. Από τη στιγμή που οι συνθήκες (DH1) και (DH2) ικανοποιούνται ο πίνακας A_i ομογενούς μετασχηματισμού είναι της μορφής 3.10.

2. Οι άξονες z_{i-1} και z_i τέμνονται : σε αυτήν την περίπτωση ο x_i είναι κάθετος στο επίπεδο που σχηματίζεται από τους z_i και z_{i-1} . Η θετική κατεύθυνση του x_i είναι αυθαίρετη . Η καλύτερη επιλογή για την αρχή O_i είναι να βρίσκεται στο σημείο τομής του z_i και z_{i-1} . Ωστόσο οποιοδήποτε κατάλληλο σημείο κατά μήκος του άξονα z_i αρκεί. Σε αυτήν την περίπτωση η παράμετρος a_i είναι 0.

3. Οι άξονες z_{i-1} και z_i είναι παράλληλοι : αν οι άξονες z_{i-1} και z_i είναι παράλληλοι, τότε υπάρχουν άπειρες κοινές κάθετοι μεταξύ τους και η συνθήκη (DH1) δεν καθορίζει τελείως τον x_i . Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε την αρχή O_i οπουδήποτε κατά μήκος του z_i . Έτσι ο άξονας x_i επιλέγεται με φορά από το O_i προς τον z_{i-1} κατά μήκος της κοινής καθέτου ή με φορά αντίθετη σε αυτό το διάνυσμα . Μια συνηθισμένη μέθοδος για την επιλογή του O_i είναι να διαλέξουμε την κάθετο που πέρνα από το O_{i-1} όπως ο άξονας x_i . Έτσι το O_i είναι το σημείο στο οποίο αυτή η κάθετος τέμνει τον z_i . Σε αυτήν την περίπτωση το a_i θα ισούται με μηδέν. Από τη στιγμή που ο x_i είναι αμετακίνητος, ο y_i έχει καθοριστεί σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού . Επιπλέον οι αφού οι άξονες z_{i-1} και z_i είναι παράλληλοι το a_i θα είναι 0.

Αυτή η διαδικασία λειτουργεί εποικοδομητικά για τα πλαίσια $O_0, \dots, n-1$ σε ένα ρομπότ n συνδέσμων. Για την ολοκλήρωση της διαδικασίας είναι απαραίτητο να οριστεί και το πλαίσιο n . Το τελικό σύστημα συντεταγμένων O_n, x_n, y_n, z_n αναφέρεται ως πλαίσιο του τελικού στοιχείου δράσης ή πλαίσιο του εργαλείου (σχήμα 3.5).

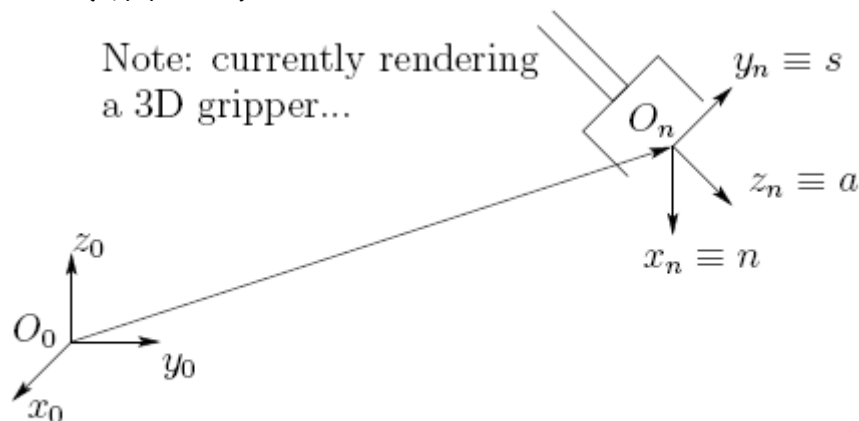


Fig. 3.5 Tool frame assignment

Σχήμα 3.5 Τοποθέτηση πλαισίου στο εργαλείο

Η αρχή O_n συνήθως τοποθετείται συμμετρικά, ανάμεσα στα δάχτυλα της αρπάγης. Τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x_n, y_n, z_n

συμβολίζονται με n , s και a αντίστοιχα. Αυτή η ορολογία προκύπτει από το γεγονός ότι η κατεύθυνση a είναι η κατεύθυνση προσέγγισης, με την έννοια ότι η αρπαγή προσεγγίζει ένα αντικείμενο κατά μήκος της κατεύθυνσης a . Ομοίως η κατεύθυνση s είναι η κατεύθυνση ολίσθησης, κατά την οποία τα δάχτυλα της αρπάγης ολισθαίνουν κατά το άνοιγμα ή κλείσιμο και n είναι η κάθετη κατεύθυνση στο επίπεδο που σχηματίζεται από τα a και s .

Στα σύγχρονα ρομπότ η κίνηση της τελικής άρθρωσης είναι μια περιστροφή του τελικού στοιχείου δράσης κατά θ_n και οι τελικοί δυο άξονες των αρθρώσεων z_{n-1} και z_n συμπίπτουν. Σε αυτήν την περίπτωση ο μετασχηματισμός ανάμεσα στα τελικά δυο πλαίσια συντεταγμένων είναι μια μετατόπιση κατά μήκος του z_{n-1} κατά απόσταση d_n ακολουθούμενη από μια περιστροφή κατά θ_n γύρω από τον άξονα z_{n-1} . Αυτή είναι μια πολύ σημαντική παρατήρηση η οποία απλοποιεί τον υπολογισμό της αντίστροφης κινηματικής στην επόμενη ενότητα.

Σε όλες τις περιπτώσεις ανεξάρτητα αν η άρθρωση είναι περιστροφική ή πρισματική, οι ποσότητες a_i και α_i είναι πάντα σταθερές για όλα τα i και είναι χαρακτηριστικές για τον χειριστή. Αν η άρθρωση i είναι πρισματική τότε η θ_i είναι επίσης σταθερή ενώ το d_i είναι η i^{th} μεταβλητή άρθρωσης. Ομοίως αν η άρθρωση i είναι περιστροφική τότε το d_i είναι σταθερό και η θ_i είναι η i^{th} μεταβλητή της άρθρωσης.

3.2.3 Παραδείγματα

Κατά τη συνθήκη DH η μοναδική μεταβαλλόμενη γωνία είναι η θ , οπότε μπορούν να γίνουν κάποιες απλοποιήσεις στους συμβολισμούς. Έτσι, c_i σημαίνει $\cos\theta_i$, s_i σημαίνει $\sin\theta_i$ κλπ. Επίσης δηλώνουμε με θ_{12} το $\theta_1 + \theta_2$, με c_{12} το $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ κλπ. Στα ακολουθία παραδείγματα είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η συνθήκη DH μας παρέχει ελευθερία επιλογών για μερικές από τις παραμέτρους του χειριστή, όπως στην περίπτωση των παραλλήλων αξόνων των αρθρώσεων ή όταν εμπλέκονται πρισματικές αρθρώσεις.

Παράδειγμα 3.1 Επίπεδος χειριστής τύπου αγκώνα

Έστω ότι έχουμε τον επίπεδο χειριστή δυο συνδέσμων, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6. Οι άξονες των αρθρώσεων z_0 και z_1 είναι κάθετοι στη σελίδα. Τοποθετούμε το πλαίσιο της βάσης $O_0 x_0 y_0 z_0$ όπως δείχνεται. Η αρχή των αξόνων O_0 επιλέγεται στο σημείο τομής του άξονα z_0 με τη σελίδα και η κατεύθυνση του άξονα x_0 είναι τελείως αυθαίρετη. Από τη στιγμή που έχει

εγκατασταθεί το πλαίσιο της βάσης, το πλαίσιο $O_1 x_1 y_1 z_1$ είναι αμετακίνητο όπως φαίνεται, συμφωνά με τη συνθήκη DH. Η αρχή των αξόνων O_1 βρίσκεται στην τομή του άξονα z_1 με τη σελίδα. Το τελικό πλαίσιο $O_2 x_2 y_2 z_2$ είναι αμετακίνητο, έχοντας επιλέξει σαν αρχή των αξόνων O_2 το σημείο στο τέλος του συνδέσμου 2, όπως φαίνεται.

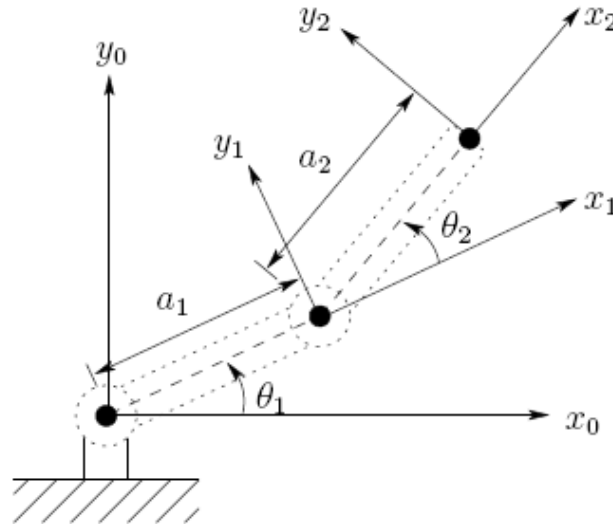


Fig. 3.6 Two-link planar manipulator. The z -axes all point out of the page, and are not shown in the figure

Σχήμα 3.6 Επίπεδος χειριστής δυο συνδέσμων. Οι άξονες z έχουν φορά προς τον αναγνώστη, είναι κάθετοι στη σελίδα και δε φαίνονται στο σχήμα.

Οι παράμετροι DH δείχνονται στον πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1 :Παράμετροι συνδέσμων για τον επίπεδο χειριστή δυο συνδέσμων

Table 3.1 Link parameters for 2-link planar manipulator

| Link | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|------|-------|------------|-------|--------------|
| 1 | a_1 | 0 | 0 | θ_1^* |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | θ_2^* |

* variable

Οι πίνακες A ορίζονται από την (3.10) ως

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε οι πίνακες T δίνονται από

$$T_1^0 = A_1$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι δυο πρώτες είσοδοι της τελευταίας στήλης του T_2^0 είναι τα x και y μέρη της αρχής O_2 στο πλαίσιο της βάσης, δηλαδή είναι

$$x = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$y = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

οι συντεταγμένες του τελικού στοιχείου δράσης στο πλαίσιο της βάσης. Το περιστροφικό μέρος του T_2^0 μας δίνει τον προσανατολισμό του πλαισίου O_2 x_2 y_2 z_2 σε σχέση με το πλαίσιο της βάσης.

Παράδειγμα 3.2 Κυλινδρικό ρομπότ τριών συνδέσμων

Έστω ότι έχουμε ένα κυλινδρικό ρομπότ τριών συνδέσμων, όπως αναπαριστάται συμβολικά στο σχήμα 3.7. Τοποθετούμε την αρχή O_0 στην άρθρωση 1. Η τοποθέτηση της αρχής O_0 κατά μήκος του άξονα z_0 , όπως και η κατεύθυνση του άξονα x_0 είναι αυθαίρετες. Αυτή η επιλογή του O_0 είναι η πιο φυσική, αλλά θα μπορούσε να τοποθετηθεί και στην άρθρωση 2. Ο άξονας x_0 επιλέγεται κάθετος στη σελίδα. Έπειτα, αφού οι άξονες z_0 και z_1 συμπίπτουν, η αρχή O_1 επιλέγεται στην άρθρωση 1, όπως φαίνεται. Ο άξονας x_1 είναι κάθετος στη σελίδα όταν $\theta_1 = 0$, αλλά φυσικά η κατεύθυνσή του θα αλλάζει από τη στιγμή που η θ_1 είναι μεταβαλλόμενη. Αφού οι άξονες z_2 και z_1 τέμνονται, η αρχή O_2 τοποθετείται σε αυτήν την τομή. Η κατεύθυνση του x_2

επιλέγεται παράλληλα στον x_1 ώστε η θ_2 είναι μηδέν. Τέλος το τρίτο πλαίσιο επιλέγεται στο τέλος του συνδέσμου 3, όπως φαίνεται.

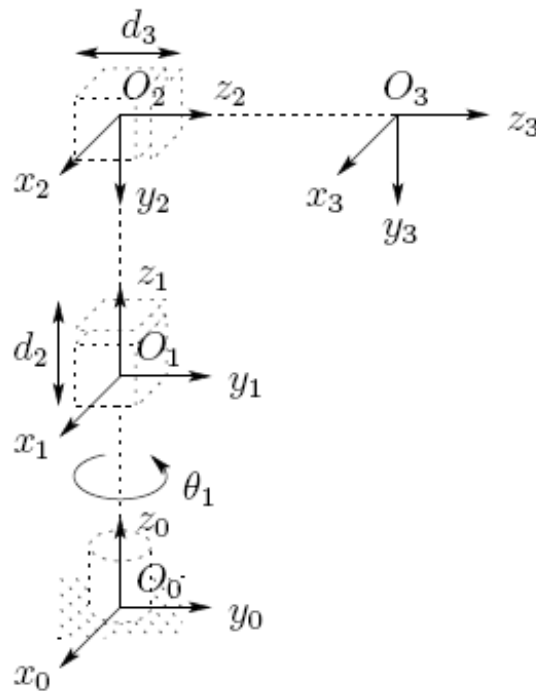


Fig. 3.7 Three-link cylindrical manipulator

Σχήμα 3.7 Κυλινδρικός χειριστής τριών συνδέσμων

Οι παράμετροι DH δείχνονται στον πίνακα 3.2.

Πίνακας 3.2 :Παράμετροι συνδέσμων για τον κυλινδρικό χειριστή τριών συνδέσμων

Table 3.2 Link parameters for 3-link cylindrical manipulator

| Link | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|------|-------|------------|---------|--------------|
| 1 | 0 | 0 | d_1 | θ_1^* |
| 2 | 0 | -90 | d_2^* | 0 |
| 3 | 0 | 0 | d_3^* | 0 |

* variable

Οι αντίστοιχοι πίνακες A και T είναι

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Παράδειγμα 3.3 Σφαιρικός χειριστής

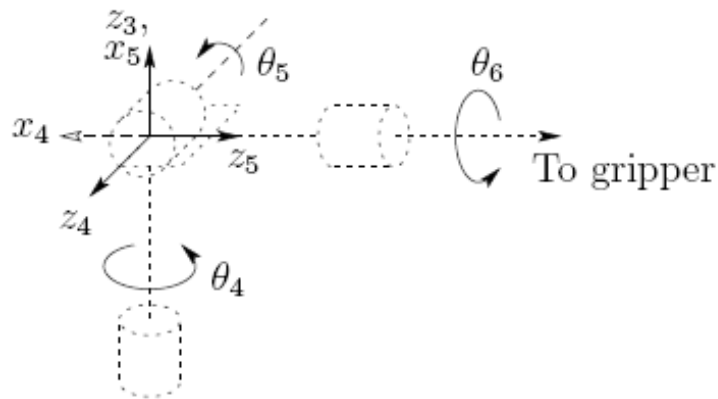


Fig. 3.8 The spherical wrist frame assignment

Σχήμα 3.8 Τοποθέτηση πλαισίων στο σφαιρικό χειριστή

Η διαμόρφωση του σφαιρικού χειριστή φαίνεται στο σχήμα 3.8, όπου βλέπουμε ότι οι άξονες z_3 , z_4 , z_5 τέμνονται στο O . Οι παράμετροι DH

δείχνονται στον πίνακα 3.2. Ο χειριστής Stanford είναι ένα παράδειγμα ενός χειριστή που έχει έναν καρπό τέτοιου τύπου.

Πίνακας 3.3 :Παράμετροι συνδέσμων για το σφαιρικό καρπό

Table 3.3 DH parameters for spherical wrist

| Link | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|------|-------|------------|-------|--------------|
| 4 | 0 | -90 | 0 | θ_4^* |
| 5 | 0 | 90 | 0 | θ_5^* |
| 6 | 0 | 0 | d_6 | θ_6^* |

* variable

Θα δείξουμε τώρα ότι οι $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ τελικές τρεις μεταβλητές των αρθρώσεων είναι οι γωνίες Euler φ, θ, ψ αντίστοιχα, σε σχέση με το πλαίσιο συντεταγμένων $O_3 X_3 Y_3 Z_3$. Για να γίνει αυτό αρκεί να υπολογίσουμε τους πίνακες A_4, A_5, A_6 , χρησιμοποιώντας τον πίνακα 3.3 και τη σχέση (3.10). Έτσι έχουμε

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντάς τους μεταξύ τους λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
 T_6^3 &= A_4 A_5 A_6 \\
 &= \begin{bmatrix} R_6^3 & o_6^3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Συγκρίνοντας το περιστροφικό μέρος R_6^3 του T_6^3 με το μετασχηματισμό (2.27) της γωνίας Euler, φαίνεται ότι οι $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ μπορούν να αναγνωριστούν ως οι γωνίες Euler φ, θ, ψ σε σχέση με το πλαίσιο συντεταγμένων $o_3 x_3 y_3 z_3$.

Παράδειγμα 3.4 Κυλινδρικός χειριστής με σφαιρικό καρπό

Έστω ότι έχουμε τοποθετήσει ένα σφαιρικό καρπό στον κυλινδρικό χειριστή του παραδείγματος 3.2, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.9.

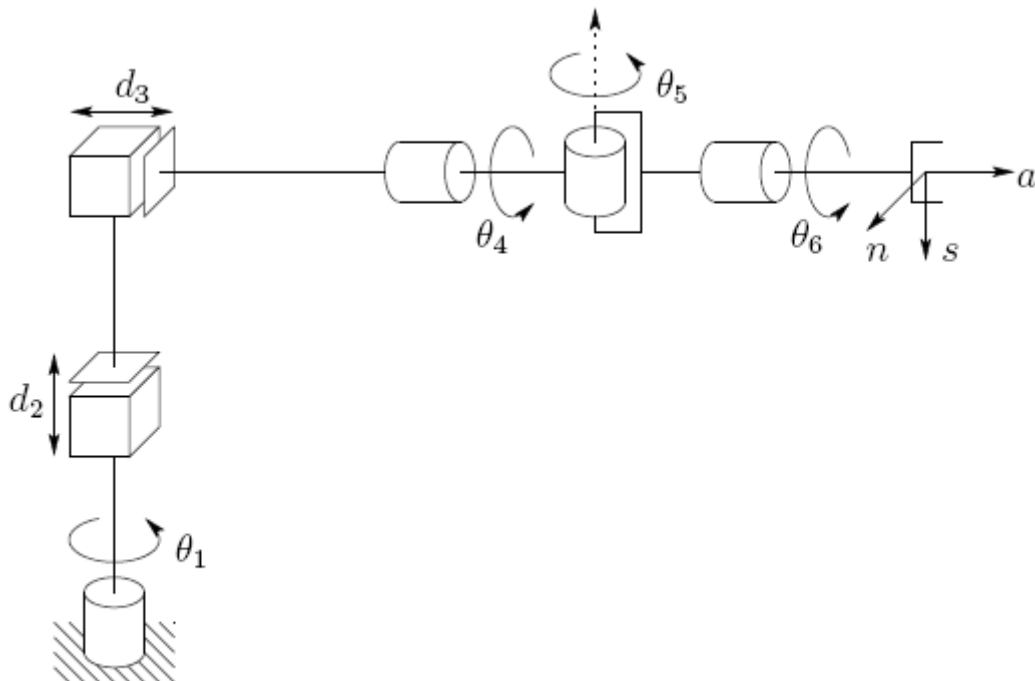


Fig. 3.9 Cylindrical robot with spherical wrist

Σχήμα 3.9 Κυλινδρικό ρομπότ με σφαιρικό καρπό

Ο άξονας της περιστροφής της άρθρωσης 4 είναι παράλληλος με τον z_2 και έτσι συμπίπτει με τον άξονα z_3 του παραδείγματος 3.2. Αυτό σημαίνει ότι συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.14) και (3.15) λαμβάνουμε

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3 \quad (3.16)$$

με τον T_3^0 να δίνεται από την (3.14) και τον T_6^3 να δίνεται από την (3.15). Έτσι, η ευθεία κινηματική αυτού του χειριστή περιγράφεται από

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

όπου

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1 c_4 c_5 c_6 - c_1 s_4 s_6 + s_1 s_5 c_6 \\ r_{21} &= s_1 c_4 c_5 c_6 - s_1 s_4 s_6 - c_1 s_5 c_6 \\ r_{31} &= -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \\ r_{12} &= -c_1 c_4 c_5 s_6 - c_1 s_4 c_6 - s_1 s_5 c_6 \\ r_{22} &= -s_1 c_4 c_5 s_6 - s_1 s_4 s_6 + c_1 s_5 c_6 \\ r_{32} &= s_4 c_5 c_6 - c_4 c_6 \\ r_{13} &= c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5 \\ r_{23} &= s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5 \\ r_{33} &= -s_4 s_5 \\ d_x &= c_1 c_4 s_5 d_6 - s_1 c_5 d_6 - s_1 d_3 \\ d_y &= s_1 c_4 s_5 d_6 + c_1 c_5 d_6 + c_1 d_3 \\ d_z &= -s_4 s_5 d_6 + d_1 + d_2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε την πολυπλοκότητα της ευθείας κινηματικής αυτού του χειριστή που προκύπτει από τον προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης ενώ η έκφραση για τη θέση του βραχίονα από την (3.14) είναι σχετικά απλή. Η υπόθεση του σφαιρικού καρπού όχι μόνο απλοποιεί την εξαγωγή της ευθείας κινηματικής αλλά επίσης απλοποιεί παρά πολύ και το πρόβλημα της αντιστροφής κινηματικής, στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 3.5 Ο χειριστής Stanford

Έστω ότι έχουμε τον χειριστή Stanford, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.10. Αυτός ο χειριστής είναι ένα παράδειγμα του σφαιρικού χειριστή (RAP) με σφαιρικό καρπό. Αυτός ο χειριστής έχει μια μετατόπιση στην άρθρωση του ώμου, που δυσκολεύει σχετικά το πρόβλημα της ευθείας και αντίστροφης κινηματικής. Πρώτα τοποθετούμε τα πλαίσια συντεταγμένων κατά τη συνθήκη DH.

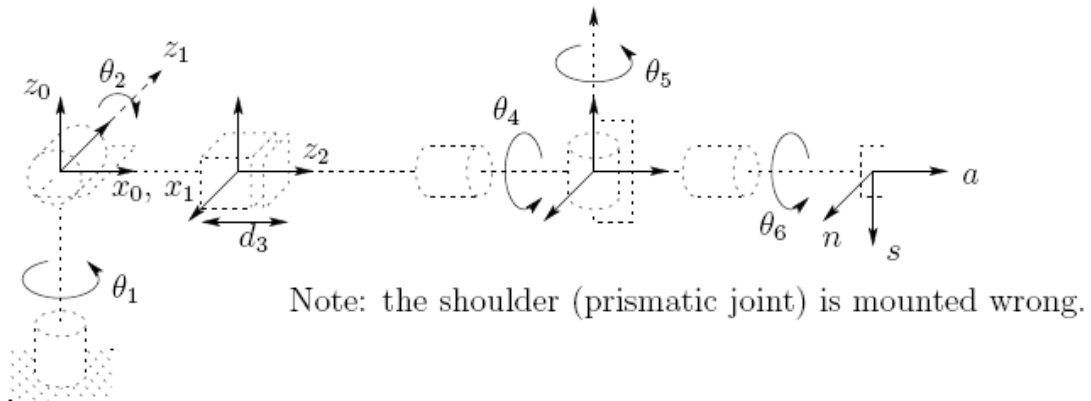


Fig. 3.10 DH coordinate frame assignment for the Stanford manipulator

Σχήμα 3.10 Τοποθέτηση πλαισίων συντεταγμένων κατά DH για τον χειριστή Stanford

Οι παράμετροι DH δείχνονται στον πίνακα 3.4.

Πίνακας 3.4 :DH παράμετροι για τον χειριστή Stanford

Table 3.4 DH parameters for Stanford Manipulator

| Link | d_i | a_i | α_i | θ_i |
|------|-------|-------|------------|------------|
| 1 | 0 | 0 | -90 | θ^* |
| 2 | d_2 | 0 | +90 | θ^* |
| 3 | d^* | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | -90 | θ^* |
| 5 | 0 | 0 | +90 | θ^* |
| 6 | d_6 | 0 | 0 | θ^* |

* joint variable

Οι πίνακες A_i υπολογίζονται εύκολα ως

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Ο T_6^0 δίνεται από

$$T_6^0 = A_1 \cdots A_6 \quad (3.24)$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

όπου

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - d_2(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
 r_{21} &= s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
 r_{31} &= -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \\
 r_{12} &= c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\
 r_{22} &= -s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\
 r_{32} &= s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \\
 r_{13} &= c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 \\
 r_{23} &= s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 \\
 r_{33} &= -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \\
 d_x &= c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5) \\
 d_y &= s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) \\
 d_z &= c_2d_3 + d_6(c_2c_5 - c_4s_2s_5)
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.6 Ο χειριστής SCARA

Έστω ότι έχουμε τον χειριστή SCARA όπως φαίνεται στο σχήμα 3.11. Αυτός ο χειριστής είναι μέρος του Adeptone ρομπότ του σχήματος 1.14, αποτελείται από ένα βραχίονα RRP και έναν καρπό ενός DOF του οποίου η κίνηση είναι κύλιση πάνω σε έναν κάθετο άξονα.

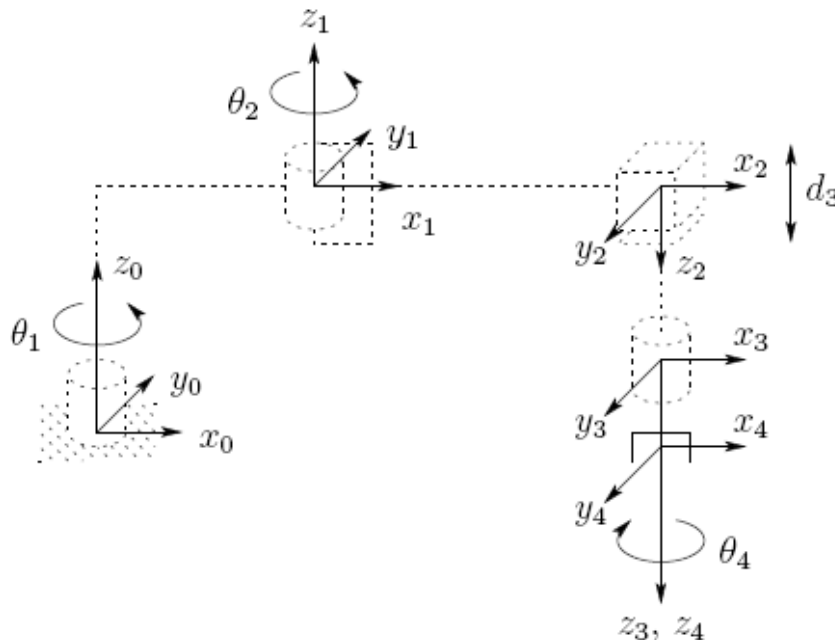


Fig. 3.11 DH coordinate frame assignment for the SCARA manipulator

Σχήμα 3.11 Τοποθέτηση πλαισίων συντεταγμένων κατά DH για τον χειριστή SCARA

Το πρώτο βήμα είναι η τοποθέτηση και ονομασία των αξόνων των αρθρώσεων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από τη στιγμή που όλοι οι άξονες είναι παράλληλοι, έχουμε ευχέρεια επιλογών για την τοποθέτηση των αρχών των αξόνων. Οι αρχές των αξόνων τοποθετούνται, όπως φαίνεται, κατά το βολικότερο τρόπο. Τοποθετούμε τον άξονα x_0 στο επίπεδο της σελίδας, όπως φαίνεται. Αυτό είναι τελείως αυθαίρετο και επηρεάζει μόνο τη μηδενική διαμόρφωση του χειριστή, δηλαδή τη θέση του χειριστή όταν $\theta_1 = 0$.

Οι παράμετροι των αρθρώσεων δίνονται στον πίνακα 3.5.

Πίνακας 3.5 :Παράμετροι των αρθρώσεων για τον χειριστή SCARA

Table 3.5 Joint parameters for SCARA

| Link | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|------|-------|------------|-------|------------|
| 1 | a_1 | 0 | 0 | θ^* |
| 2 | a_2 | 180 | 0 | θ^* |
| 3 | 0 | 0 | d^* | 0 |
| 4 | 0 | 0 | d_4 | θ^* |

* joint variable

Οι πίνακες A είναι

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Οπότε οι εξισώσεις της ευθείας κινηματικής είναι

$$\begin{aligned}
 T_4^0 &= A_1 \cdots A_4 \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

3.3 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε πως γίνεται ο προσδιορισμός της θέσης του τελικού στοιχείου δράσης και ο προσανατολισμός σε σχέση με τις μεταβλητές των αρθρώσεων. Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της εύρεσης των μεταβλητών των αρθρώσεων σε σχέση με τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης. Αυτό είναι ένα πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής και γενικά είναι δυσκολότερο από το πρόβλημα της ευθείας κινηματικής.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει τυποποίηση του γενικού προβλήματος της αντίστροφης κινηματικής. Συμφωνά με αυτό, θα γίνει περιγραφή της αρχής της κινηματικής αποσύζευξης και πως μπορεί να απλοποιηθεί η αντίστροφη κινηματική για τους περισσότερους σύγχρονους χειριστές. Χρησιμοποιώντας την κινηματική αποσύζευξη μπορούμε να θεωρήσουμε τη θέση και τον προσανατολισμό, ανεξάρτητα προβλήματα. Θα περιγράψουμε με γεωμετρική προσέγγιση την επίλυση του προβλήματος της εύρεσης της θέσης, καθώς και ότι θα γίνει αξιοποίηση της παραμετροποίησης της γωνίας Euler, για την επίλυση του προβλήματος του προσανατολισμού.

3.3.1 Το γενικό πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής

Το γενικό πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής μπορεί να χαρακτηριστεί ως εξής : έστω ότι έχουμε έναν 4×4 ομογενή μετασχηματισμό

$$H = \begin{bmatrix} R & o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)
 \tag{3.31}$$

όπου $R \in SO(3)$ και θέλουμε να βρούμε τις λύσεις (μια ή όλες) της εξίσωσης

$$T_n^0(q_1, \dots, q_n) = H \quad (3.32)$$

όπου

$$T_n^0(q_1, \dots, q_n) = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n) \quad (3.33)$$

Εδώ ο H αναπαριστά την επιθυμητή θέση και προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης. Αυτό που επιζητούμε είναι να βρούμε τις τιμές q_1, \dots, q_n των μεταβλητών των αρθρώσεων, έτσι ώστε $T_n^0(q_1, \dots, q_n) = H$.

Η εξίσωση (3.32) καταλήγει σε δώδεκα μη γραμμικές εξισώσεις με n άγνωστες μεταβλητές και μπορεί να γραφεί ως

$$T_{ij}(q_1, \dots, q_n) = h_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.34)$$

όπου T_{ij} , h_{ij} , αναφέρονται στις δώδεκα σημαντικές εισόδους των T_n^0 και H αντίστοιχα (από τη στιγμή που η τελευταία γραμμή των T_n^0 και H είναι $(0,0,0,1)$, τέσσερις από τις έξι εξισώσεις που αναπαρίστανται με την (3.32) δεν είναι σημαντικές).

Παράδειγμα 3.7

Έχουμε τον χειριστή Stanford του παραδειγματος 3.3.5. Έστω ότι η επιθυμητή θέση και προσανατολισμός του τελικού πλαισίου δίνεται από

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -0.154 \\ 0 & 0 & 1 & 0.763 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Για να βρούμε τις αντίστοιχες μεταβλητές των αρθρώσεων $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5$ και θ_6 πρέπει να επιλύσουμε το ακόλουθο σύνολο μη γραμμικών τριγωνομετρικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned}
 c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= 0 \\
 s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) &= 0 \\
 -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 &= 1 \\
 c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= 1 \\
 s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) &= 0 \\
 s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 &= 0 \\
 c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 &= 0 \\
 s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 &= 1 \\
 -s_2c_4s_5 + c_2c_5 &= 0 \\
 c_1s_2d_3 - s_1d_2 + d_6(c_1c_2c_4s_5 + c_1c_5s_2 - s_1s_4s_5) &= -0.154 \\
 s_1s_2d_3 + c_1d_2 + d_6(c_1s_4s_5 + c_2c_4s_1s_5 + c_5s_1s_2) &= 0.763 \\
 c_2d_3 + d_6(c_2c_5 - c_4s_2s_5) &= 0
 \end{aligned}$$

Αν οι τιμές των μη μηδενικών DH παραμέτρων είναι $d_2 = 0.154$ και $d_6 = 0.263$, μια λύση για αυτό το σύνολο εξισώσεων δίνεται από :

$$\theta_1 = \pi/2, \quad \theta_2 = \pi/2, \quad d_3 = 0.5, \quad \theta_4 = \pi/2, \quad \theta_5 = 0, \quad \theta_6 = \pi/2.$$

Ακόμα και αν δεν έχουμε δει πως εξάγεται αυτή η λύση, δεν είναι δύσκολο να εξακριβώσουμε ότι ικανοποιεί τις εξισώσεις ευθείας κινηματικής για το βραχίονα Stanford.

Οι εξισώσεις στο προηγούμενο παράδειγμα είναι φυσικά, αρκετά δύσκολο να επιλυθούν απευθείας σε κλειστή μορφή. Αυτή η περίπτωση είναι κοινή για τους περισσότερους ρομποτικούς βραχίονες. Για αυτό χρειάζεται να αναπτυχθούν αποτελεσματικές και συστηματικές τεχνικές που να αξιοποιούν τη συγκεκριμένη κινηματική δομή του χειριστή. Ενώ το πρόβλημα της ευθείας κινηματικής έχει πάντα μοναδική λύση που λαμβάνεται από την αξιολόγηση των ευθέων εξισώσεων, το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής μπορεί να έχει ή να μην έχει λύση. Ακόμα και αν υπάρχει λύση, μπορεί να είναι ή να μην είναι μοναδική. Επίσης, λόγω του ότι αυτές οι εξισώσεις της ευθείας κινηματικής είναι σε γενικές γραμμές πολύπλοκες μη γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών των αρθρώσεων, οι λύσεις μπορεί να είναι δύσκολο να εξαχθούν ακόμη και αν υπάρχουν.

Για την επίλυση του προβλήματος της αντίστροφης κινηματικής, μας ενδιαφέρει περισσότερο η εύρεση κλειστής μορφής λύσης των εξισώσεων

παρά αριθμητική λύση. Η εύρεση κλειστής μορφής λύσης σημαίνει σαφή σχέση της μορφής :

$$q_k = f_k(h_{11}, \dots, h_{34}), \quad k = 1, \dots, n \quad (3.36)$$

Οι λύσεις κλειστής μορφής προτιμώνται για δυο λόγους. Πρώτον, σε ιδιαίτερες περιπτώσεις, όπως η ιχνηλάτηση μιας ραφής συγκόλλησης που εξασφαλίζεται με ένα σύστημα ηλεκτρονικής όρασης, οι εξισώσεις της αντίστροφης κινηματικής πρέπει να επιλυθούν ταχύτατα, π.χ κάθε 20millisec. Είναι πιο πρακτικό να έχουμε εκφράσεις κλειστής μορφής παρά μια επαναληπτική αναζήτηση. Δεύτερον, οι κινηματικές εξισώσεις, γενικά έχουν πολλαπλές λύσεις. Το να έχουμε λύσεις κλειστής μορφής μας επιτρέπει να αναπτύξουμε κανόνες για την επιλογή μιας συγκεκριμένης λύσης μεταξύ πολλών.

Το ερώτημα για την ύπαρξη λύσεων στο πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής εξαρτάται από μηχανικούς όπως και μαθηματικούς παράγοντες. Για παράδειγμα, η κίνηση των περιστροφικών αρθρώσεων μπορεί να περιορίζεται σε λιγότερο από 360° περιστροφής, έτσι ώστε όλες οι μαθηματικές λύσεις των κινηματικών εξισώσεων να αντιστοιχούν σε φυσικά υλοποιήσιμες διαμορφώσεις του χειριστή. Υποθέτουμε τώρα, ότι η δεδομένη θέση και προσανατολισμός είναι τέτοιοι ώστε υπάρχει μια λύση για την (3.32). Αφού η λύση των μαθηματικών εξισώσεων έχει εξακριβωθεί, πρέπει να ελεγχθεί περαιτέρω αν ικανοποιεί ή όχι όλους τους περιορισμούς για την εμβέλεια των πιθανών κινήσεων των αρθρώσεων. Εμείς θεωρούμε ότι ο δεδομένος ομογενής πίνακας H στην (3.32) αντιστοιχεί σε μια διαμόρφωση, εντός του χώρου εργασίας του χειριστή, με εφικτό προσανατολισμό. Αυτό μας εγγυάται ότι οι μαθηματικές λύσεις που λαμβάνονται αντιστοιχούν σε πραγματοποιήσιμες διαμορφώσεις.

3.3.2 Κινηματική αποσύζευξη

Αν και το γενικό πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής είναι αρκετά δύσκολο, αποδυνκνείται ότι για χειριστές που έχουν έξι αρθρώσεις, με τις τρεις τελευταίες αρθρώσεις να τέμνονται σε ένα σημείο (όπως στο χειριστή Stanford), είναι δυνατόν να αποσυνδεθεί το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής σε δυο απλούστερα προβλήματα, που είναι γνωστά ως αντίστροφη κινηματική θέσης και αντίστροφη κινηματική προσανατολισμού. Με άλλα λόγια, για ένα χειριστή έξι DOF με σφαιρικό καρπό, το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής μπορεί να διαχωριστεί σε δυο απλούστερα

προβλήματα, με πρώτο την εύρεση της θέσης της τομής των αξόνων του καρπού (κέντρο του καρπού) και δεύτερο την εύρεση του προσανατολισμού του καρπού.

Έστω τώρα ότι έχουμε ακριβώς έξι DOF και ότι οι τελευταίοι τρεις άξονες των αρθρώσεων τέμνονται στο σημείο O_c . Εκφράζοντας την (3.32) ως δυο σύνολα εξισώσεων που αναπαριστούν τις περιστροφικές εξισώσεις και τις εξισώσεις θέσης

$$R_6^0(q_1, \dots, q_6) = R \quad (3.37)$$

$$o_6^0(q_1, \dots, q_6) = o \quad (3.38)$$

όπου O και R είναι η επιθυμητή θέση και προσανατολισμός του πλαισίου του εργαλείου, που εκφράζονται σε σχέση με το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, δίνονται τα O και R και το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής είναι η επίλυση των q_1, \dots, q_6 .

Το ότι έχουμε σφαιρικό καρπό σημαίνει ότι οι άξονες z_3 , z_4 και z_5 τέμνονται στο O_c και έτσι οι αρχές O_4 και O_5 που τοποθετούνται κατά τη συνθήκη DH, θα είναι πάντα στο κέντρο του καρπού O_c . Συχνά η O_3 βρίσκεται επίσης στο O_c , αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο για τη δική μας ανάπτυξη που ακολουθεί. Το σημαντικό σημείο αυτής της υπόθεσης για την αντίστροφη κινηματική είναι ότι η κίνηση των τριών τελικών συνδέσμων γύρω από αυτούς τους άξονες, δεν αλλάζει τη θέση του O_c , οπότε η θέση του κέντρου του καρπού είναι συνάρτηση μόνο των τριών πρώτων μεταβλητών των αρθρώσεων.

Η αρχή του πλαισίου του εργαλείου (του οποίου οι επιθυμητές συντεταγμένες δίνονται από το O) λαμβάνεται απλά από τη μετατόπιση κατά απόσταση d_6 κατά μήκος του άξονα z_5 από το O_c (πίνακας 3.3). Στην περίπτωση μας ο z_5 και z_6 είναι ο ίδιος άξονας και η τρίτη στήλη του R εκφράζει την κατεύθυνση του z_6 σε σχέση με το πλαίσιο της βάσης. Έτσι, έχουμε

$$o = o_c^0 + d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Για να βρίσκεται το τελικό στοιχείο δράσης του ρομπότ στο σημείο με συντεταγμένες που δίνονται από το O και με προσανατολισμό του τελικού

στοιχείου δράσης που δίνεται από τον $R = (r_{ij})$, είναι απαραίτητο το κέντρο του καρπού O_c να έχει συντεταγμένες που δίνονται από

$$o_c^0 = o - d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

και ότι ο προσανατολισμός του πλαισίου $O_6 \ X_6 \ Y_6 \ Z_6$ σε σχέση με τη βάση να δίνεται από τον R . Αν τα στοιχεία της θέσης O του τελικού στοιχείου δράσης συμβολίζονται με O_x, O_y, O_z και τα στοιχεία του κέντρου του καρπού O_c^0 συμβολίζονται με x_c, y_c, z_c , τότε η (3.40) δίνει τη σχέση

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_x - d_6 r_{13} \\ o_y - d_6 r_{23} \\ o_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.41) μπορούμε να βρούμε τις τιμές των τριών πρώτων μεταβλητών των αρθρώσεων. Αυτό προσδιορίζει το μετασχηματισμένο προσανατολισμό R_3^0 που εξαρτάται μόνο από αυτές τις τρεις πρώτες μεταβλητές των αρθρώσεων. Τώρα μπορούμε να καθορίσουμε τον προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης σε σχέση με το πλαίσιο $O_3 \ X_3 \ Y_3 \ Z_3$ από τη σχέση

$$R = R_3^0 R_6^3 \quad (3.42)$$

ως

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R = (R_3^0)^T R \quad (3.43)$$

Όπως θα δούμε στην ενότητα 3.3.4, οι τελικές τρεις γωνίες των αρθρώσεων μπορούν να ευρεθούν σαν σύνολο γωνιών Euler αντιστοιχώντας στον R_6^3 . Το δεξιό μέρος της (3.43) είναι τελείως γνωστό από τη στιγμή που δίνεται ο R και ο R_3^0 μπορεί να υπολογιστεί, αφού είναι γνωστές οι τρεις πρώτες μεταβλητές των αρθρώσεων. Η ιδέα της κινηματικής αποσύζευξης παρουσιάζεται στο σχήμα 3.12.

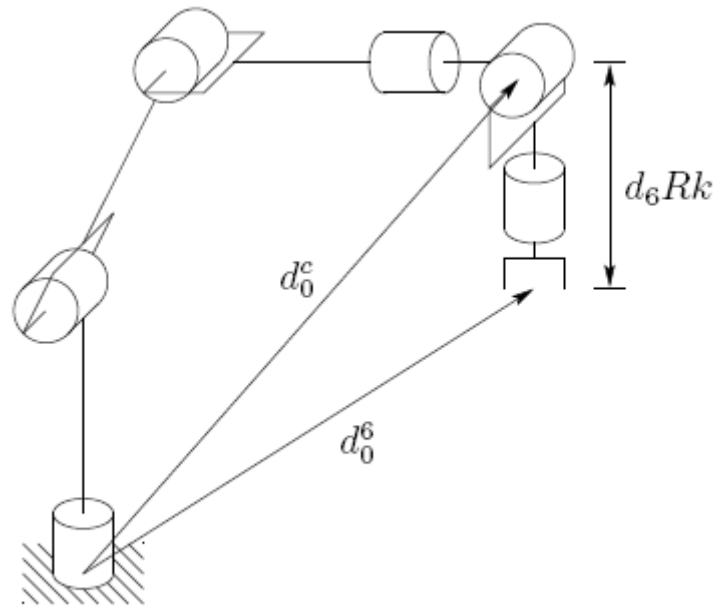


Fig. 3.12 Kinematic decoupling

[Σχήμα 3.12 Κινηματική αποσύζευξη](#)

3.3.3 Αντίστροφη θέση : Γεωμετρική προσέγγιση

Για τις συνηθισμένες κινηματικές διατάξεις που μελετούμε, μπορούμε με τη χρήση γεωμετρικής προσέγγισης να βρούμε τις μεταβλητές q_1, q_2, q_3 , που αντιστοιχούν στο O_c^0 που δίνεται από την (3.40). Περιοριζόμαστε στη γεωμετρική προσέγγιση για δυο λόγους. Πρώτον, όπως έχει ειπωθεί, τα περισσότερα σύγχρονα σχέδια χειριστών είναι κινηματικά απλά, αποτελούμενα συνήθως από μια από τις πέντε βασικές διαμορφώσεις (που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 1) με σφαιρικό καρπό. Εν μέρει ισχύει ότι η δυσκολία του γενικού προβλήματος της αντίστροφης κινηματικής έχει οδηγήσει στην εξέλιξη του σχεδιασμού των χειριστών, στη σημερινή τους μορφή. Δεύτερον, υπάρχουν λίγες τεχνικές που μπορούν να διαχειριστούν το γενικό πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής για αυθαίρετες διαμορφώσεις.

Γενικά, η πολυπλοκότητα του προβλήματος της αντίστροφης κινηματικής αυξάνει με τον αριθμό των μη μηδενικών παραμέτρων των συνδέσμων. Για τους περισσότερους χειριστές, πολλά από τα a_i, d_i είναι μηδέν ενώ τα a_i είναι 0 ή $\pm\pi/2$ κλπ. Ειδικά σε αυτές τις περιπτώσεις, η γεωμετρική προσέγγιση είναι η πιο απλή και πιο φυσική. Η γενική ιδέα της γεωμετρικής προσέγγισης είναι η επίλυση για τις μεταβλητές των αρθρώσεων q_i , προβάλλοντας το χειριστή στο επίπεδο $x_{i-1} - y_{i-1}$ και λύνοντας ένα απλό

τριγωνομετρικό πρόβλημα. Για παράδειγμα, για την επίλυση για θ_1 , προβάλλουμε το βραχίονα στο επίπεδο $x_0 - y_0$ και με τη χρήση τριγωνομετρίας βρίσκουμε την θ_1 . Θα αναλυθεί παρακάτω η μέθοδος, με τη βοήθεια δυο σημαντικών παραδειγμάτων : τους αρθρωτούς χειριστές και τους σφαιρικούς χειριστές.

3.3.3.1 Αρθρωτή διαμόρφωση

Έστω ότι έχουμε το χειριστή τύπου αγκώνα που φαίνεται στο σχήμα 3.13 με τα στοιχεία του O_c^0 να δηλώνονται ως x_c, y_c, z_c . Προβάλλουμε το O_c στο επίπεδο $x_0 - y_0$ όπως φαίνεται στο σχήμα 3.14.

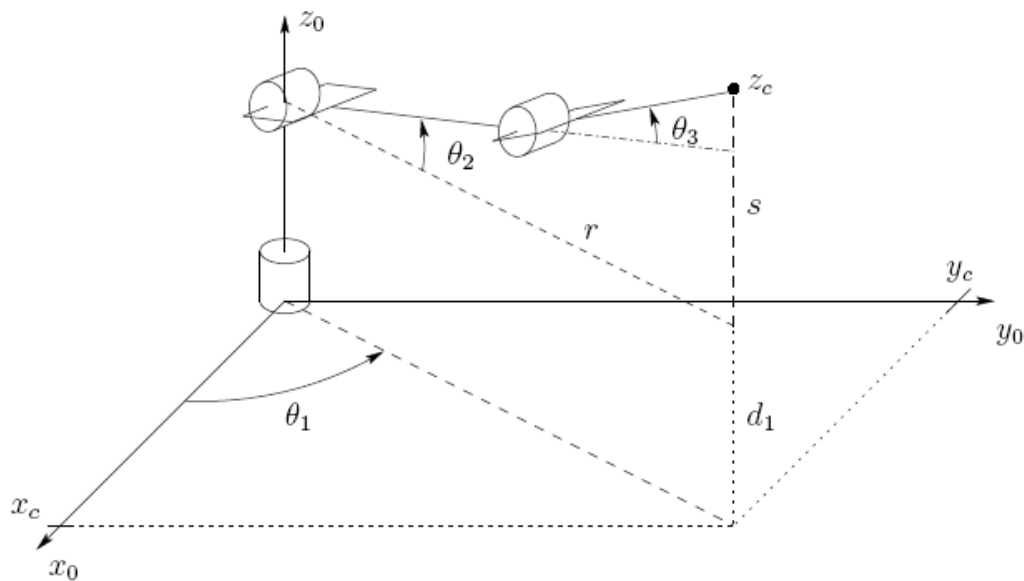


Fig. 3.13 Elbow manipulator

Σχήμα 3.13 Χειριστής τύπου αγκώνα

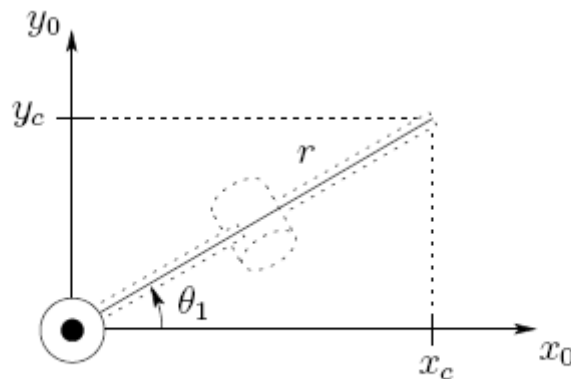


Fig. 3.14 Projection of the wrist center onto $x_0 - y_0$ plane

Σχήμα 3.14 Προβολή του κέντρου του καρπού στο επίπεδο $x_0 - y_0$

Από αυτήν την προβολή βλέπουμε ότι

$$\theta_1 = \text{atan2}(x_c, y_c) \quad (3.44)$$

όπου $\text{atan2}(x, y)$ δηλώνει τα δυο ορίσματα της συνάρτησης του τόξου εφαπτομένης, που ορίζεται στο κεφάλαιο 2.

Μια δεύτερη ισχύουσα λύση για τη θ_1 είναι

$$\theta_1 = \pi + \text{atan2}(x_c, y_c) \quad (3.45)$$

Αυτή όμως η λύση θα οδηγήσει φυσικά, σε διαφορετικές λύσεις για τις θ_2 και θ_3 , όπως θα δούμε παρακάτω.

Αυτές οι λύσεις για τη θ_1 ισχύουν, εκτός αν $x_c = y_c = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η (3.44) δεν ορίζεται και ο χειριστής είναι σε μοναδική διαμόρφωση, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.15. Σε αυτήν τη θέση, το κέντρο του καρπού O_c τέμνει τον z_0 . Έτσι, οποιαδήποτε τιμή για τη θ_1 αφήνει το O_c αμετακίνητο. Επομένως υπάρχουν άπειρες λύσεις για τη θ_1 όταν το O_c τέμνει τον z_0 .

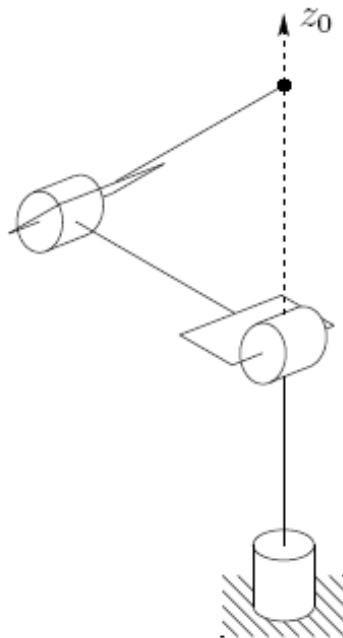


Fig. 3.15 Singular configuration

Σχήμα 3.15 Μοναδική διαμόρφωση

Αν υπάρχει μετατόπιση $d \neq 0$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.16, τότε το κέντρο του καρπού δε μπορεί να τέμνει τον z_0 . Σε αυτήν την περίπτωση, εξαρτάται από το πώς έχουν ορισθεί οι παράμετροι DH και θα είναι $d_2 = d$ ή $d_3 = d$, οπότε θα υπάρχουν δυο λύσεις για τη θ_1 . Αυτό αντιστοιχεί στην αποκαλούμενη αριστερή και δεξιά διαμόρφωση του βραχίονα, όπως φαίνεται στα σχήματα 3.17 και 3.18. Το σχήμα 3.17 δείχνει την αριστερή διαμόρφωση του βραχίονα. Από αυτό το σχήμα φαίνεται γεωμετρικά ότι

$$\theta_1 = \phi - \alpha \tag{3.46}$$

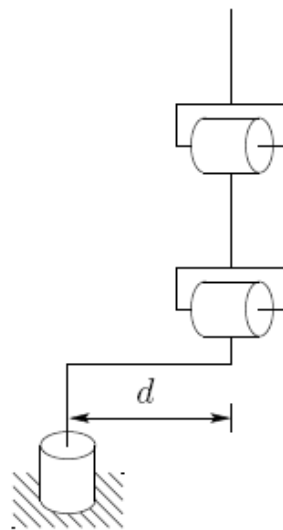


Fig. 3.16 Elbow manipulator with shoulder offset

Σχήμα 3.16 Χειριστής τύπου αγκώνα με μετατόπιση ώμου

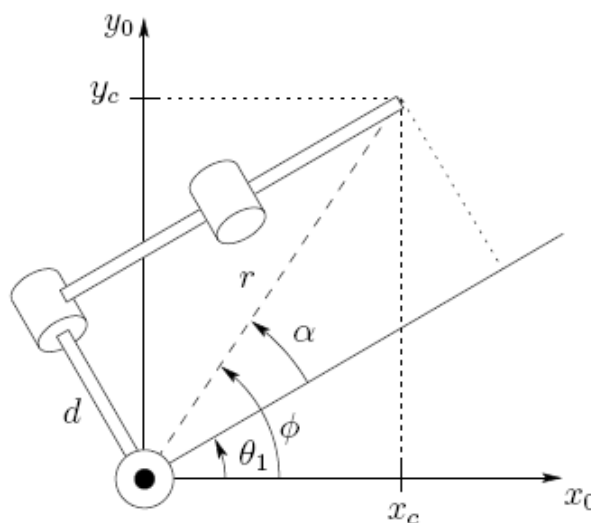


Fig. 3.17 Left arm configuration

Σχήμα 3.17 Αριστερή διαμόρφωση βραχίονα

όπου

$$\phi = \text{atan2}(x_c, y_c) \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}\left(\sqrt{r^2 - d^2}, d\right) \\ &= \text{atan2}\left(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}, d\right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

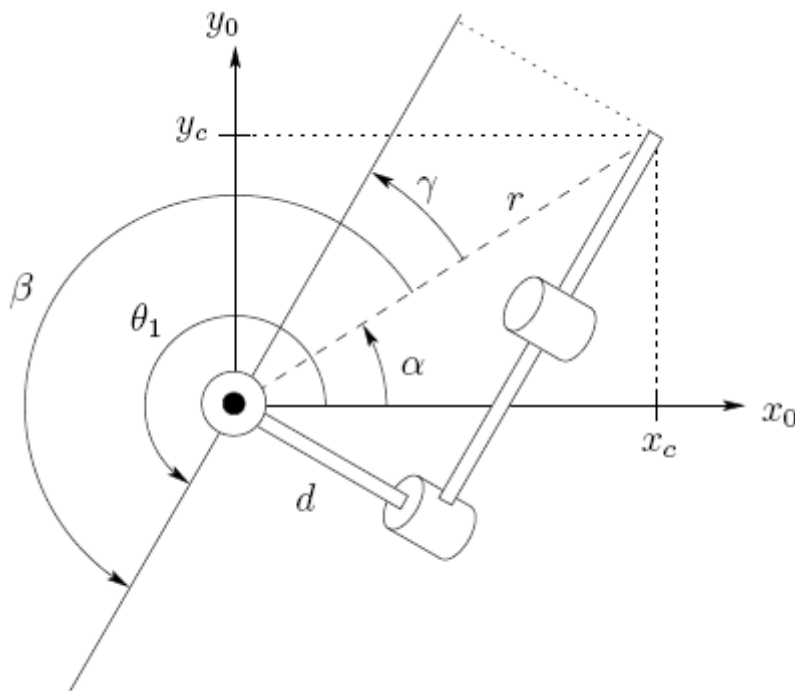


Fig. 3.18 Right arm configuration

Σχήμα 3.18 Δεξιά διαμόρφωση βραχίονα

Η δεύτερη λύση που λαμβάνεται από τη δεξιά διαμόρφωση του βραχίονα στο σχήμα 3.18, δίνεται από

$$\theta_1 = \text{atan2}(x_c, y_c) + \text{atan2}\left(-\sqrt{r^2 - d^2}, -d\right) \quad (3.49)$$

και αναλύεται ως εξής

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (3.50)$$

$$\alpha = \text{atan2}(x_c, y_c) \quad (3.51)$$

$$\beta = \gamma + \pi \quad (3.52)$$

$$\gamma = \text{atan2}\left(\sqrt{r^2 - d^2}, d\right) \quad (3.53)$$

οπότε είναι

$$\beta = \text{atan2} \left(-\sqrt{r^2 - d^2}, -d \right) \quad (3.54)$$

από τη στιγμή που $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ και $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$.

Για να βρούμε τις γωνίες θ_2 και θ_3 για το χειριστή τύπου αγκώνα, με γνωστή τη θ_1 , λαμβάνουμε υπόψη το επίπεδο που σχηματίζεται από το δεύτερο και τρίτο σύνδεσμο, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.19.

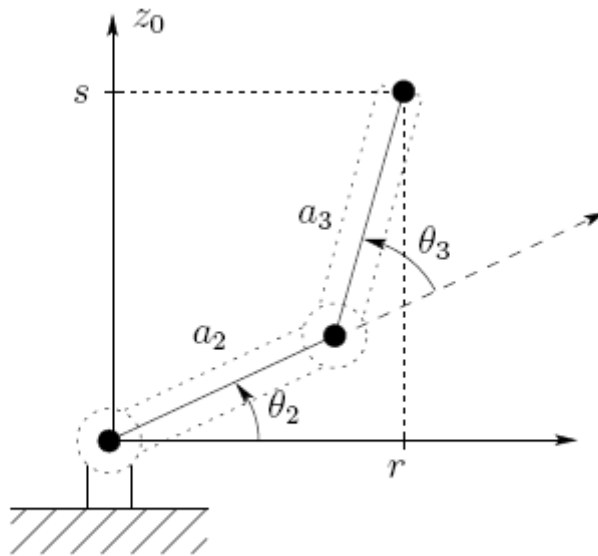


Fig. 3.19 Projecting onto the plane formed by links 2 and 3

Σχήμα 3.19 Προβολή στο επίπεδο που σχηματίζεται από τους συνδέσμους 2 και 3

Από τη στιγμή που η κίνηση των συνδέσμων δυο και τρία είναι στο επίπεδο, η λύση είναι ανάλογη με αυτήν του χειριστή δυο συνδέσμων στο κεφάλαιο 1. Όπως και σε κείνη την περίπτωση, από τις (1.17) και (1.18), εφαρμόζοντας το νομό των συνημίτονων λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \cos \theta_3 &= \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad (3.55) \\ &= \frac{x_c^2 + y_c^2 - d^2 + (z_c - d_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} := D \end{aligned}$$

αφού

$$r^2 = x_c^2 + y_c^2 - d^2 \quad \text{και} \quad s = z_c - d_1.$$

Έτσι η θ_3 δίνεται από

$$\theta_3 = \text{atan2} \left(D, \pm \sqrt{1 - D^2} \right) \quad (3.56)$$

Οι δυο λύσεις για τη θ_3 αντιστοιχούν στις θέσεις ανύψωσης και βύθισης αγκώνα.

Ομοίως η θ_2 δίνεται από

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \text{atan2}(r, s) - \text{atan2}(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \\ &= \text{atan2} \left(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}, z_c - d_1 \right) - \text{atan2}(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ένα παράδειγμα ενός χειριστή τύπου αγκώνα με μετατοπίσεις, είναι το PUMA που φαίνεται στο σχήμα 3.20.

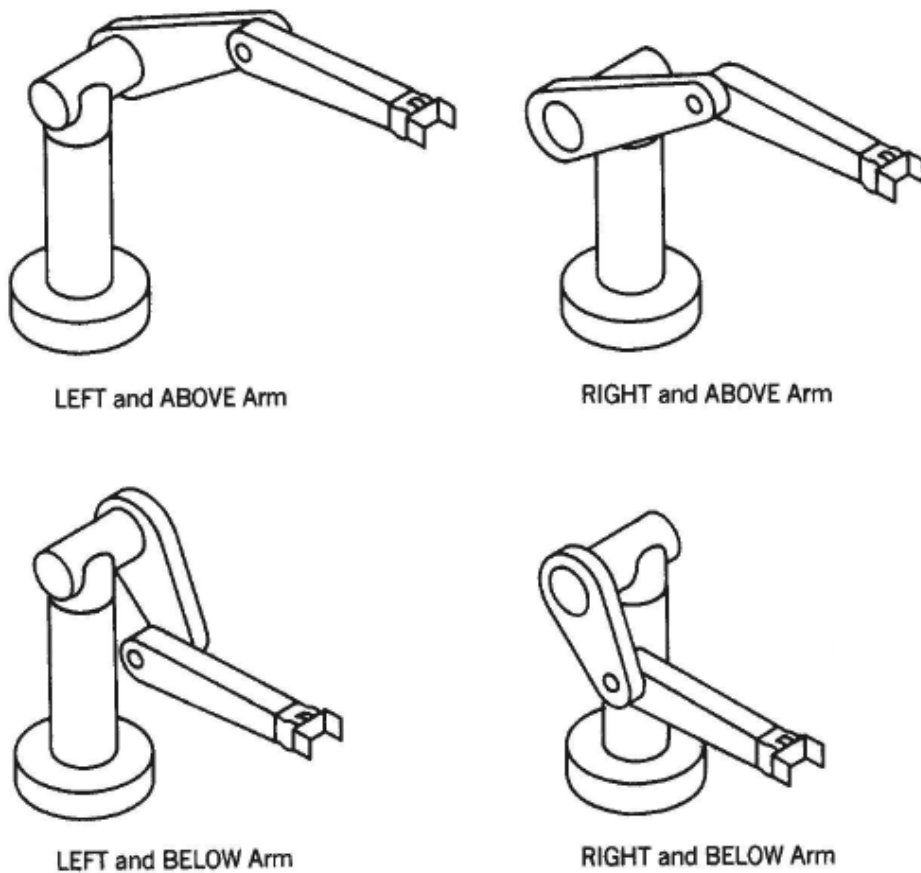


Fig. 3.20 Four solutions of the inverse position kinematics for the PUMA manipulator

Σχήμα 3.20 Τέσσερις λύσεις για την κινηματική της αντίστροφης θέσης, για το χειριστή ΡΥΜΑ

Υπάρχουν τέσσερις λύσεις για την κινηματική της αντίστροφης θέσης, όπως φαίνεται. Αυτές αντιστοιχούν στις θέσεις αριστερός βραχίονας - αγκώνας πάνω, αριστερός βραχίονας - αγκώνας κάτω, δεξιός βραχίονας - αγκώνας πάνω και δεξιός βραχίονας - αγκώνας κάτω. Θα δούμε ότι υπάρχουν δυο λύσεις για τον προσανατολισμό του καρπού, οι οποίες δίνουν οκτώ συνολικά λύσεις για την αντίστροφη κινηματική του χειριστή ΡΥΜΑ.

3.3.3.2 Σφαιρική διαμόρφωση

Εδώ θα γίνει επίλυση της κινηματικής της αντίστροφης θέσης για ένα σφαιρικό χειριστή τριών DOF, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.21.

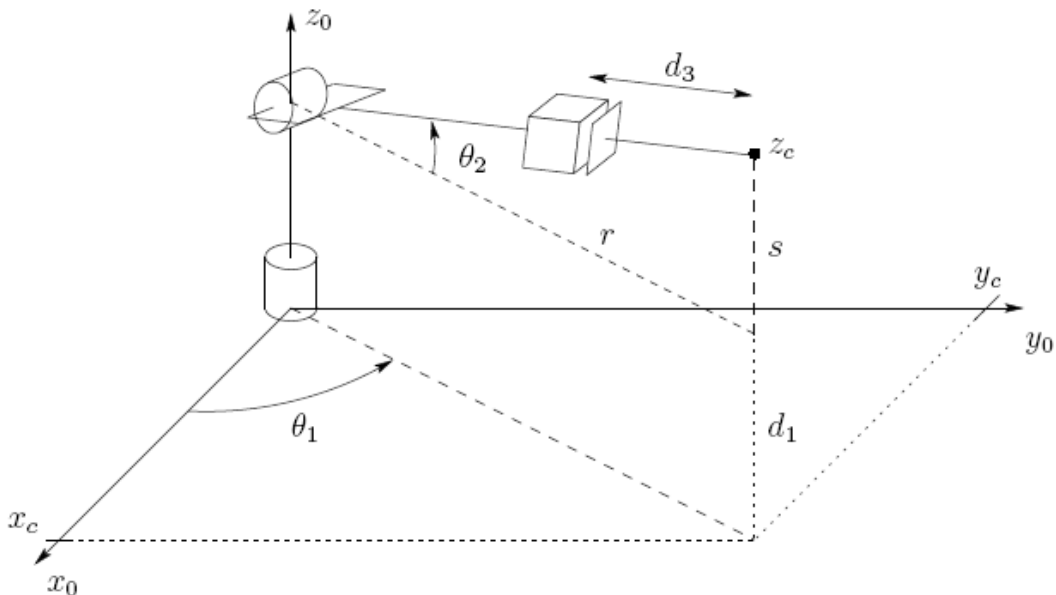


Fig. 3.21 Spherical manipulator

Σχήμα 3.21 Σφαιρικός χειριστής

Όπως και στην περίπτωση του χειριστή τύπου αγκώνα, η πρώτη μεταβλητή της άρθρωσης είναι η περιστροφή της βάσης και η λύση δίνεται ως

$$\theta_1 = \text{atan2}(x_c, y_c) \quad (3.58)$$

με την προϋπόθεση ότι τα x_c και y_c δεν είναι μηδέν. Αν και τα δυο είναι μηδέν τότε η διαμόρφωση είναι μοναδική όπως προηγουμένως και η θ_1 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Όπως στην περίπτωση του χειριστή τύπου αγκώνα, μια δεύτερη λύση για τη θ_1 δίνεται από

$$\theta_1 = \pi + \text{atan2}(x_c, y_c) \quad (3.59)$$

Η γωνία θ_2 λαμβάνεται από το σχήμα 3.21 ως

$$\theta_2 = \text{atan2}(r, s) + \frac{\pi}{2} \quad (3.60)$$

όπου είναι

$$r^2 = x_c^2 + y_c^2, s = z_c - d_1.$$

Η γραμμική απόσταση d_3 βρίσκεται ως

$$d_3 = \sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + (z_c - d_1)^2} \quad (3.61)$$

Η αρνητική λύση της τετραγωνικής ρίζας για το d_3 παραβλέπει και άρα λαμβάνουμε δυο λύσεις για την κινηματική της αντίστροφης θέσης, όσο βέβαια το κέντρο του καρπού δεν τέμνει τον z_0 . Αν υπάρχει μια μετατόπιση, τότε θα έχουμε αριστερές και δεξιές διαμορφώσεις του βραχίονα, όπως και στην περίπτωση του χειριστή τύπου αγκώνα.

Πίνακας 3.6 : Παράμετροι των συνδέσμων για τον αρθρωτό χειριστή στο σχήμα 3.13

Table 3.6 Link parameters for the articulated manipulator of Figure 3.13

| Link | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|------|-------|------------|-------|--------------|
| 1 | 0 | 90 | d_1 | θ_1^* |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | θ_2^* |
| 3 | a_3 | 0 | 0 | θ_3^* |

* variable

3.3.4 Αντίστροφος προσανατολισμός

Στην προηγούμενη ενότητα χρησιμοποιήσαμε τη γεωμετρική προσέγγιση για την επίλυση του προβλήματος της αντίστροφης θέσης. Αυτό δίνει τις τιμές για τις τρεις πρώτες μεταβλητές των αρθρώσεων που αντιστοιχούν σε μια γνωστή θέση της αρχής του καρπού. Το πρόβλημα του αντίστροφου προσανατολισμού είναι η εύρεση των τιμών των τελικών τριών μεταβλητών των αρθρώσεων, που αντιστοιχούν σε ένα δεδομένο προσανατολισμό σε σχέση με το πλαίσιο $O_3 X_3 Y_3 Z_3$. Για ένα σφαιρικό καρπό, αυτό μπορεί να

ερμηνευτεί ως το πρόβλημα εύρεσης ενός συνόλου γωνιών Euler που αντιστοιχούν σε ένα δεδομένο πίνακα περιστροφής R. Υπενθυμίζουμε πως η εξίσωση (3.15) δείχνει ότι ο πίνακας περιστροφής που λαμβάνεται για το σφαιρικό καρπό, έχει την ίδια μορφή με τον πίνακα περιστροφής για το μετασχηματισμό Euler, που δίνεται στην (2.27). Για αυτό το λόγω, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην ενότητα 2.5.1, για την επίλυση των τριών γωνιών των αρθρώσεων του σφαιρικού καρπού. Πιο συγκεκριμένα, λύνουμε για τις τρεις γωνίες Euler ϕ, θ, ψ με τη χρήση των εξισώσεων (2.29) - (2.34) και έπειτα κάνουμε την αντιστοίχηση

$$\begin{aligned}\theta_4 &= \phi \\ \theta_5 &= \theta \\ \theta_6 &= \psi\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.8 Αρθρωτός χειριστής με σφαιρικό καρπό

Οι παράμετροι DH για την τοποθέτηση των πλαισίων στο σχήμα 3.13 συνοψίζονται στον πίνακα 3.6. Πολλαπλασιάζοντας τους αντίστοιχους πίνακες A_i λαμβάνουμε τον πίνακα R_3^0 , για τον αρθρωτό ή τύπου αγκώνα χειριστή, ως

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Ο πίνακας $R_6^3 = A_4 A_5 A_6$ δίνεται ως

$$R_6^3 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Η εξίσωση που πρέπει να επιλυθεί για τις τελικές τρεις μεταβλητές είναι

$$R_6^3 = (R_3^0)^T R \quad (3.64)$$

και η λύση της γωνίας Euler μπορεί να εφαρμοσθεί σε αυτήν την εξίσωση. Για παράδειγμα, οι τρεις εξισώσεις που λαμβάνονται από την τρίτη στήλη στην παραπάνω εξίσωση πίνακα, δίνονται από

$$c_4 s_5 = c_1 c_{23} r_{13} + s_1 c_{23} r_{23} + s_{23} r_{33} \quad (3.65)$$

$$s_4 s_5 = -c_1 s_{23} r_{13} - s_1 s_{23} r_{23} + c_{23} r_{33} \quad (3.66)$$

$$c_5 = s_1 r_{13} - c_1 r_{23} \quad (3.67)$$

Έτσι, αν και οι δυο εκφράσεις (3.65) και (3.66) δεν είναι μηδέν, λαμβάνουμε τη θ_5 από τις (2.29) και (2.30) ως

$$\theta_5 = \operatorname{atan2} \left(s_1 r_{13} - c_1 r_{23}, \pm \sqrt{1 - (s_1 r_{13} - c_1 r_{23})^2} \right) \quad (3.68)$$

Αν επιλεχθεί η θετική τετραγωνική ρίζα στην (3.68), τότε οι θ_4 και θ_6 δίνονται από τις (2.31) και (2.32) αντίστοιχα, ως

$$\theta_4 = \operatorname{atan2}(c_1 c_{23} r_{13} + s_1 c_{23} r_{23} + s_{23} r_{33}, -c_1 s_{23} r_{13} - s_1 s_{23} r_{23} + c_{23} r_{33}) \quad (3.69)$$

$$\theta_6 = \operatorname{atan2}(-s_1 r_{11} + c_1 r_{21}, s_1 r_{12} - c_1 r_{22}) \quad (3.70)$$

Οι άλλες λύσεις λαμβάνονται αναλόγως. Αν $s_5 = 0$, τότε οι άξονες των αρθρώσεων z_3 και z_5 είναι ομοαξονικοί. Αυτή είναι μια μοναδική διαμόρφωση και μόνο το άθροισμα $\theta_4 + \theta_6$ μπορεί να προσδιοριστεί. Μια λύση είναι να επιλεχθεί η θ_4 αυθαίρετα και έπειτα να προσδιοριστεί η θ_6 με τη χρήση της (2.36) ή (2.38).

3.3.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.9 Χειριστής τύπου αγκώνα. Ολική λύση

Συνοψίζοντας τη γεωμετρική προσέγγιση για την επίλυση των εξισώσεων της αντίστροφης κινηματικής, δίνουμε παρακάτω μια λύση της αντίστροφης κινηματικής για το χειριστή τύπου αγκώνα έξι DOF (σχήμα 3.13), με σφαιρικό καρπό και που δεν έχει μετατοπίσεις αρθρώσεων.

Δίνεται

$$o = \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

οπότε με

$$x_c = o_x - d_6 r_{13} \quad (3.72)$$

$$y_c = o_y - d_6 r_{23} \quad (3.73)$$

$$z_c = o_z - d_6 r_{33} \quad (3.74)$$

ένα σύνολο μεταβλητών των αρθρώσεων DH δίνονται από

$$\theta_1 = \text{atan2}(x_c, y_c) \quad (3.75)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}\left(\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - d^2}, z_c - d_1\right) - \text{atan2}(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \quad (3.76)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}\left(D, \pm\sqrt{1 - D^2}\right),$$

$$\text{where } D = \frac{x_c^2 + y_c^2 - d^2 + (z_c - d_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \quad (3.77)$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(c_1 c_{23} r_{13} + s_1 c_{23} r_{23} + s_{23} r_{33},$$

$$-c_1 s_{23} r_{13} - s_1 s_{23} r_{23} + c_{23} r_{33}) \quad (3.78)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}\left(s_1 r_{13} - c_1 r_{23}, \pm\sqrt{1 - (s_1 r_{13} - c_1 r_{23})^2}\right) \quad (3.79)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(-s_1 r_{11} + c_1 r_{21}, s_1 r_{12} - c_1 r_{22}) \quad (3.80)$$

Παράδειγμα 3.10 Χειριστής SCARA

Έστω ότι έχουμε το χειριστή SCARA του οποίου η ευθεία κινηματική καθορίζεται με τον T_4^0 από την (3.30). Η λύση της αντίστροφης κινηματικής τότε δίνεται σαν ένα σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$T_4^1 = \begin{bmatrix} R & o \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -c_{12}c_4 - s_{12}s_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Από τη στιγμή που ο χειριστής SCARA έχει μόνο τέσσερις DOF, τότε κάθε πιθανός πίνακας H από το SE(3) δε σημαίνει ότι έχει μια λύση της μορφής (3.81). Μάλιστα, φαίνεται εύκολα ότι δεν υπάρχει λύση της (3.81) εκτός αν ο R είναι της μορφής

$$R = \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & -c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

οπότε σε αυτήν την περίπτωση το άθροισμα $\theta_1 + \theta_2 - \theta_4$ ορίζεται από

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \alpha = \text{atan2}(r_{11}, r_{12}) \quad (3.83)$$

Προβάλλοντας τη διαμόρφωση του χειριστή πάνω στο επίπεδο $x_0 - y_0$ λαμβάνουμε την κατάσταση που φαίνεται στο σχήμα 3.22.

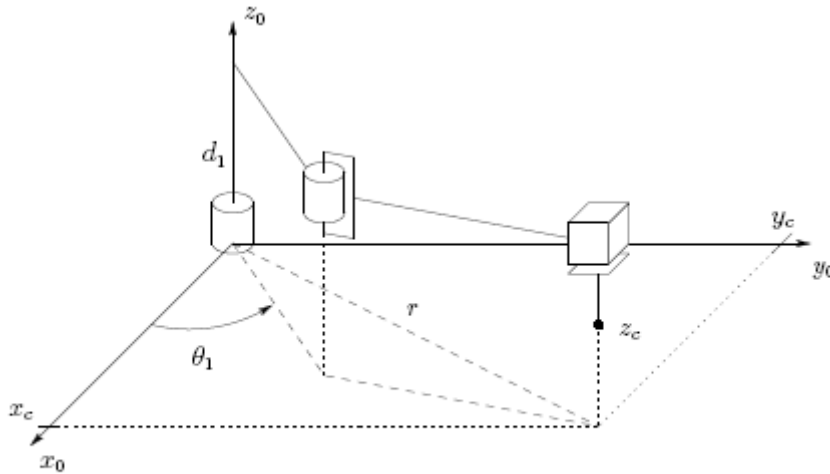


Fig. 3.22 SCARA manipulator

Σχήμα 3.22 Χειριστής SCARA

Από εκεί λαμβάνουμε

$$\theta_2 = \text{atan2}(c_2, \pm\sqrt{1-c_2}) \quad (3.84)$$

όπου

$$c_2 = \frac{o_x^2 + o_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \quad (3.85)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(o_x, o_y) - \text{atan2}(a_1 + a_2c_2, a_2s_2) \quad (3.86)$$

Τώρα μπορεί να προσδιοριστεί η θ_4 από την (3.83) ως

$$(3.87)$$

$$\begin{aligned}\theta_4 &= \theta_1 + \theta_2 - \alpha \\ &= \theta_1 + \theta_2 - \text{atan2}(r_{11}, r_{12})\end{aligned}$$

Τέλος, η d_3 δίνεται ως

$$d_3 = o_z + d_4 \quad (3.88)$$

3.4 ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετήσαμε τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών των αρθρώσεων q_i και της θέσης και προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης. Έγινε εισαγωγή της συνθήκης Denavit Hartenberg για την τοποθέτηση των πλαισίων συντεταγμένων στους συνδέσμους ενός σειριακού χειριστή. Η μεθοδολογία που βασίζεται στη συνθήκη DH, μπορεί να συνοψιστεί στον παρακάτω αλγόριθμο, για την εξαγωγή της ευθείας κινηματικής για οποιοδήποτε χειριστή :

ΒΗΜΑ 1 : Τοποθέτηση και ονομασία των αξόνων των αρθρώσεων z_0, \dots, z_{n-1} .

ΒΗΜΑ 2 : Εγκατάσταση του πλαισίου της βάσης. Τοποθέτηση της αρχής των αξόνων οπουδήποτε πάνω στον άξονα z_0 . Οι άξονες x_0 και y_0 επιλέγονται κατάλληλα ώστε να σχηματίσουν ένα δεξιόστροφο πλαίσιο.

Για $i = 1, \dots, n-1$ πάμε στο βήμα 3 έως 5.

ΒΗΜΑ 3 : Εντοπισμός της αρχής O_i όπου η κοινή κάθετος στους z_i και z_{i-1} τέμνει τον z_i . Αν ο z_i τέμνει τον z_{i-1} τότε εντοπίζεται το O_i σε αυτήν την τομή. Αν οι z_i και z_{i-1} είναι παράλληλοι, τότε εντοπίζεται το O_i σε οποιαδήποτε βολική θέση κατά μήκος του z_i .

ΒΗΜΑ 4 : Εγκατάσταση του x_i κατά μήκος της κοινής καθέτου (διαμέσου του O_i) ανάμεσα στον z_{i-1} και z_i ή στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στο επίπεδο $z_{i-1} - z_i$ αν οι z_{i-1} και z_i τέμνονται.

ΒΗΜΑ 5 : Εγκατάσταση του y_i για να ολοκληρωθεί το δεξιόστροφο πλαίσιο.

ΒΗΜΑ 6 : Εγκατάσταση του πλαισίου $o_n x_n y_n z_n$ του τελικού στοιχείου δράσης. Υποθέτοντας ότι η n -th άρθρωση είναι περιστροφική θέτουμε $z_n = a$ κατά μήκος της κατεύθυνσης z_{n-1} . Εγκατάσταση της αρχής O_n κατά μήκος του z_n , κατά προτίμηση στο κέντρο της αρπάγης ή στο άκρο οποιουδήποτε

εργαλείου που μπορεί να φέρει ο χειριστής. Θέτουμε $y_n = s$ στην κατεύθυνση που κλείνει η αρπάγη και θέτουμε $x_n = n$ ως $s \times a$. Αν το εργαλείο δεν είναι μια απλή αρπάγη θέτουμε x_n και y_n κατάλληλα, ώστε να σχηματιστεί ένα δεξιόστροφο σύστημα.

ΒΗΜΑ 7 : Δημιουργούμε έναν πίνακα για τις παραμέτρους των συνδέσμων a_i , d_i , α_i , θ_i .

a_i = απόσταση κατά μήκος του x_i από το O_i στην τομή του x_i και z_{i-1} .

d_i = απόσταση κατά μήκος του z_{i-1} από το O_{i-1} στην τομή του x_i και z_{i-1} . Το d_i μεταβάλλεται αν η άρθρωση i είναι πρισματική.

α_i = η γωνία μεταξύ z_{i-1} και z_i μετρούμενη γύρω από τον x_i .

θ_i = η γωνία μεταξύ x_{i-1} και x_i μετρούμενη γύρω από τον z_{i-1} . Η θ_i μεταβάλλεται αν η άρθρωση i είναι περιστροφική.

ΒΗΜΑ 8 : Δημιουργούμε τους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού A_i με αντικατάσταση των παραπάνω παραμέτρων στην (3.10).

ΒΗΜΑ 9 : Δημιουργούμε τους $T_n^0 = A_1 \dots A_n$. Αυτό δίνει τη θέση και τον προσανατολισμό του πλαισίου του εργαλείου σε σχέση με τις συντεταγμένες της βάσης.

Η συνθήκη DH προσδιορίζει τις εξισώσεις ευθείας κινηματικής για ένα χειριστή, δηλαδή την αντιστοίχιση των μεταβλητών των αρθρώσεων με τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης. Για τον έλεγχο του χειριστή, είναι απαραίτητο να επιλυθεί το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή με δεδομένη τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης, λύνουμε για το αντίστοιχο σύνολο των μεταβλητών των αρθρώσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε την ειδική περίπτωση των χειριστών, στους οποίους μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κινηματική αποσύζευξη (δηλαδή ένας χειριστής με σφαιρικό καρπό). Για τους χειριστές αυτού του τύπου ο προσδιορισμός της αντίστροφης κινηματικής μπορεί να συνοψισθεί στον παρακάτω αλγόριθμο :

ΒΗΜΑ 1 : Εύρεση των q_1, q_2, q_3 τέτοιων ώστε το κέντρο καρπού O_c να έχει συντεταγμένες που δίνονται από

$$o_c^0 = o - d_6 R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

ΒΗΜΑ 2 : Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές των αρθρώσεων που ορισθήκαν στο βήμα 1, αξιολογείται ο R_3^0 .

ΒΗΜΑ 3 : Εύρεση ενός συνόλου γωνιών Euler που αντιστοιχούν στον πίνακα περιστροφής

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R = (R_3^0)^T R \quad (3.90)$$

Σε αυτό το κεφάλαιο, έγινε χρήση της γεωμετρικής προσέγγισης για το βήμα 1. Πιο συγκεκριμένα, για την επίλυση των μεταβλητών των αρθρώσεων φ_i , προβάλλουμε το χειριστή (συμπεριλαμβανομένου και του κέντρου του καρπού) πάνω στο επίπεδο $x_{i-1} - y_{i-1}$ και με τη χρήση τριγωνομετρίας υπολογίζονται τα φ_i .