

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΑΚΑΜΠΤΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Ένα μεγάλο κομμάτι της κινηματικής του ρομπότ έχει σχέση με την εγκατάσταση διάφορων συστημάτων συντεταγμένων που αναπαριστούν τις θέσεις και τους προσανατολισμούς των άκαμπτων αντικειμένων και τους μετασχηματισμούς ανάμεσα σε αυτά τα συστήματα συντεταγμένων. Πραγματικά, η γεωμετρία του τρισδιάστατου χώρου και των άκαμπτων κινήσεων παίζει σημαντικό ρόλο σε όλα τα θέματα για το χειρισμό του ρομπότ. Σ αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις λειτουργίες της περιστροφής και μετακίνησης και θα εισάγουμε την έννοια των ομογενών μετασχηματισμών. Οι ομογενείς μετασχηματισμοί συνδυάζουν τις λειτουργίες της περιστροφής και μετακίνησης σε έναν απλό πολλαπλασιασμό πινάκων και χρησιμοποιούνται στο κεφάλαιο 3 για να παράγουν τις καλούμενες εξισώσεις ευθείας κινηματικής των άκαμπτων χειριστών.

Αρχίζουμε εξετάζοντας τις αναπαραστάσεις των σημείων και διανυσμάτων σε έναν ευκλείδειο χώρο εξοπλισμένο με πολλαπλά πλαίσια συντεταγμένων. Σύμφωνα με αυτό εισάγουμε την έννοια του πίνακα περιστροφής για να αναπαραστήσουμε τους σχετικούς προσανατολισμούς ανάμεσα στα πλαίσια συντεταγμένων. Συνδυάζοντας τα παραπάνω δημιουργούμε τους πίνακες ομογενών μετασχηματισμών οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα για την αναπαράσταση της θέσης και προσανατολισμού του ενός πλαισίου συντεταγμένων σε σχέση με ένα άλλο. Επιπλέον οι πίνακες ομογενών μετασχηματισμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το μετασχηματισμό συντεταγμένων. Τέτοιοι μετασχηματισμοί μας επιτρέπουν να αναπαριστούμε ποικιλία ποσοτήτων σε διάφορα πλαίσια συντεταγμένων κάτι το οποίο αναλύεται διεξοδικά στις ενότητες αυτού του κεφαλαίου.

2.1 ΑΝΑΠΑΡΙΣΤΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΘΕΣΕΙΣ

Πριν την ανάπτυξη των σχημάτων αναπαράστασης για σημεία και διανύσματα είναι σωστό να γίνει διάκριση ανάμεσα σε δυο θεμελιώδεις προσεγγίσεις για γεωμετρικούς λογούς : Η συνδυαστική προσέγγιση και η αναλυτική προσέγγιση. Με την πρώτη καταλήγουμε σε γεωμετρικές οντότητες (π.χ σημεία και γραμμές) ενώ με τη δεύτερη αναπαριστούμε αυτές τις οντότητες χρησιμοποιώντας συντεταγμένες ή εξισώσεις, καταλήγοντας στο αποτέλεσμα μέσω αλγεβρικών χειρισμών.

Στο σχήμα 2.1 βλέπουμε δυο πλαίσια συντεταγμένων που διαφέρουν στον προσανατολισμό κατά γωνιά 45° . Χρησιμοποιώντας τη συνθετική προσέγγιση χωρίς τη χρήση συντεταγμένων για σημεία ή διανύσματα μπορεί κάποιος να πει ότι ο x_0 είναι κάθετος στο y_0 ή ότι το $u_1 \times u_2$ καθορίζει ένα διάνυσμα το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο που περιέχει τα u_1 και u_2 , που στην περίπτωση μας έχει φορά προς εμάς όπως κοιτάμε τη σελίδα.

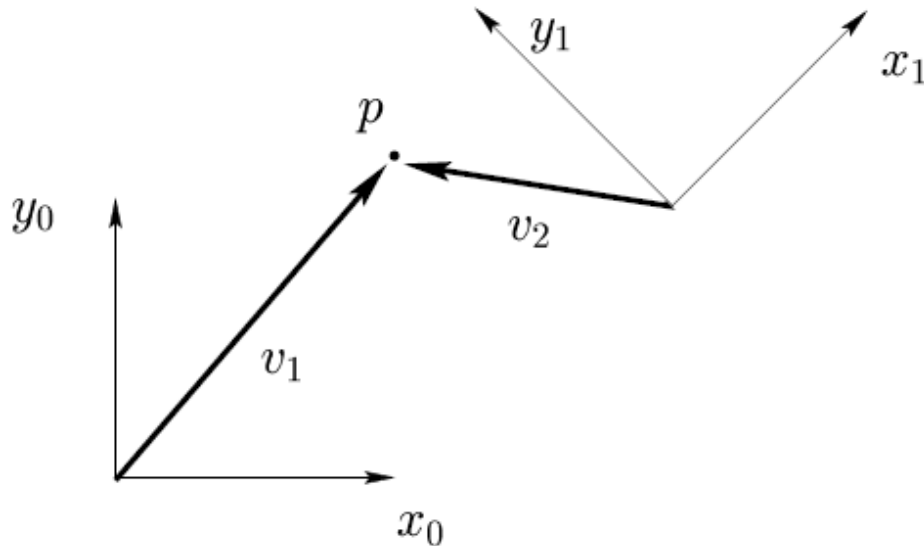


Fig. 2.1 Two coordinate frames, a point p , and two vectors v_1 and v_2 .

[Σχήμα 2.1 Δυο πλαίσια συντεταγμένων , ένα σημείο \$p\$ και δυο διανύσματα \$u_1\$ και \$u_2\$](#)

Στη ρομποτική, τυπικά χρησιμοποιούμε αναλυτική αιτιολόγηση από τη στιγμή που οι ρομποτικές εργασίες συχνά προσδιορίζονται με τη χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων. Φυσικά για την τοποθέτηση συντεταγμένων είναι απαραίτητο να καθορίσουμε ένα πλαίσιο συντεταγμένων. Βλέποντας το σχήμα 2.1 μπορούμε να καθορίσουμε τις συντεταγμένες του σημείο p σε σχέση είτε με το πλαίσιο $O_0 x_0 y_0$ ή το πλαίσιο $O_1 x_1 y_1$. Στην προηγούμενη περίπτωση, μπορούμε να τοποθετήσουμε στο p το διάνυσμα συντεταγμένων $(5,6)^T$, ενώ στην άλλη περίπτωση $(-2.8, 4.2)^T$. Για να είναι το πλαίσιο αναφοράς τελείως ξεκάθαρο υιοθετούμε τον παρακάτω συμβολισμό

$$p^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad p^1 = \begin{bmatrix} -2.8 \\ 4.2 \end{bmatrix}$$

Γεωμετρικά, ένα σημείο αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη θέση στο χώρο. Εδώ έχουμε δηλώσει ότι το p είναι μια γεωμετρική οντότητα, ένα σημείο στο χώρο, ενώ το p_o και p_l είναι διανύσματα συντεταγμένων τα οποία αναπαριστούν τη θέση αυτού του σημείου στο χώρο σε σχέση με τα πλαίσια συντεταγμένων o_0, x_0, y_0 και o_1, x_1, y_1 , αντίστοιχα.

Από τη στιγμή που η αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων είναι απλά ένα σημείο στο χώρο, μπορούμε να τοποθετήσουμε συντεταγμένες που αντιπροσωπεύουν τη θέση και την αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων σε σχέση με ένα άλλο. Στο σχήμα 2.1 για παράδειγμα έχουμε

$$o_1^0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad o_0^1 = \begin{bmatrix} -10.6 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

Ένα σημείο αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο σημείο στο χώρο, ένα διάνυσμα καθορίζει κατεύθυνση και μέγεθος. Τα διανύσματα για παράδειγμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση μετατοπίσεων ή δυνάμεων. Για αυτό ενώ το σημείο p δεν είναι ισοδύναμο με το διάνυσμα u_l , η μετατόπιση από την αρχή o_o προς το σημείο p δίνεται από το διάνυσμα u_l . Σε αυτό το κείμενο ο όρος διάνυσμα έχει την έννοια του ελεύθερου διανύσματος. Έτσι ξεκαθαρίζουμε ότι σημεία και διανύσματα δεν είναι ισοδύναμα από τη στιγμή που τα σημεία αναφέρονται σε συγκεκριμένες θέσεις στο χώρο ενώ ένα διάνυσμα μπορεί να μετακινηθεί προς οποιαδήποτε θέση στο χώρο. Υπό αυτήν την συνθήκη δυο διανύσματα είναι ίσα αν έχουν την ίδια κατεύθυνση και το ίδιο μέγεθος.

Με την τοποθέτηση των συντεταγμένων σε διανύσματα χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολικό μετασχηματισμό τον οποίο χρησιμοποιήσαμε και με την τοποθέτηση συντεταγμένων στα σημεία. Έτσι το u_1 και u_2 είναι γεωμετρικές οντότητες που δε μεταβάλλονται σε σχέση με την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων αλλά η αναπαράσταση με συντεταγμένες αυτών των διανυσμάτων εξαρτάται άμεσα από την επιλογή του πλαισίου συντεταγμένων ως πλαίσιο αναφοράς. Στο παράδειγμα του σχήματος 2.1 λαμβάνουμε :

$$v_1^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_1^1 = \begin{bmatrix} 7.77 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad v_2^0 = \begin{bmatrix} -5.1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2^1 = \begin{bmatrix} -2.89 \\ 4.2 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμός Συντεταγμένων

Για την πραγματοποίηση αλγεβρικών χειρισμών με τη χρήση συντεταγμένων είναι σημαντικό ότι όλα τα διανύσματα συντεταγμένων καθορίζονται σε σχέση με το ίδιο πλαίσιο συντεταγμένων. Στην περίπτωση ελευθέρων διανυσμάτων είναι αρκετό το ότι καθορίζονται σε σχέση με παράλληλα πλαίσια συντεταγμένων ή πλαίσια των οποίων οι άξονες συντεταγμένων είναι αντίστοιχα παράλληλοι, από τη στιγμή που μόνο το μέγεθος και η κατεύθυνσή τους καθορίζονται και όχι οι απόλυτες θέσεις τους στο χώρο.

Με τη χρήση αυτού του μετασχηματισμού η έκφραση της μορφής

$$v_1^1 + v_2^2, \text{ where } v_1^1 \text{ and } v_2^2$$

στο σχήμα 2.1, δεν καθορίζεται από την στιγμή που τα πλαίσια $O_0 X_0 Y_0$ και $O_1 X_1 Y_1$ δεν είναι παράλληλα. Έτσι είναι φανερό η ανάγκη όχι μόνο για ένα αντιπροσωπευτικό σύστημα το οποίο επιτρέπει στα σημεία να εκφράζονται σε σχέση με διάφορα συστήματα συντεταγμένων αλλά και για ένα μηχανισμό ο οποίος μας επιτρέπει να μετασχηματίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων που εκφράζονται σε ένα σύστημα συντεταγμένων στις κατάλληλες συντεταγμένες σε σχέση με ένα άλλο πλαίσιο συντεταγμένων. Τέτοιοι μετασχηματισμοί συντεταγμένων και οι παράγωγοί τους αναλύονται στο υπόλοιπο μέρος του κεφαλαίου.

2.2 ΑΝΑΠΑΡΙΣΤΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΕΣ

Για την αναπαράσταση της σχετικής θέσης και προσανατολισμού ενός άκαμπτου σώματος σε σχέση με ένα άλλο, τοποθετούμε πλαίσια συντεταγμένων στο κάθε σώμα και έπειτα καθορίζουμε τις γεωμετρικές σχέσεις ανάμεσα στα πλαίσια συντεταγμένων. Στην ενότητα 2.1 είδαμε πως γίνεται η αναπαράσταση της θέσης της αρχής των αξόνων ενός πλαισίου σε σχέση με ένα άλλο πλαίσιο.

Σ αυτή την ενότητα το πρόβλημα κατευθύνεται προς την περιγραφή του προσανατολισμού του ενός πλαισίου συντεταγμένων σε σχέση με ένα άλλο πλαίσιο. Αρχίζουμε με την περίπτωση των περιστροφών στο επίπεδο και κατόπιν με γενίκευση των αποτελεσμάτων, στην περίπτωση των προσανατολισμών στον τρισδιάστατο χώρο.

2.2.1 Περιστροφή στο επίπεδο

Το σχήμα 2.2 δείχνει δυο πλαίσια συντεταγμένων, όπου το πλαίσιο $o_1 x_1 y_1$ λαμβάνεται από την περιστροφή του πλαισίου $o_0 x_0 y_0$ κατά γωνία θ . Ίσως ο πιο προφανής τρόπος για την αναπαράσταση του σχετικού προσανατολισμού αυτών των δυο πλαισίων είναι απλώς με τον καθορισμό της γωνιάς περιστροφής θ . Υπάρχουν δυο άμεσα μειονεκτήματα σε μια τέτοια αναπαράσταση. Πρώτον, υπάρχει μια συνέχεια στη χαρτογράφηση από τον σχετικό προσανατολισμό προς την τιμή της θ κοντά στην $\theta = 0$. Ειδικά για $\theta = 2\pi - \varepsilon$, μικρές αλλαγές στον προσανατολισμό μπορούν να δώσουν μεγάλες αλλαγές στην τιμή της θ (π.χ μια περιστροφή κατά ε προκαλεί την θ να "τυλιχτεί" γύρω από το μηδέν). Δεύτερον, η επιλογή αυτής της αναπαράστασης δεν εφαρμόζεται σωστά για την περίπτωση του τρισδιάστατου χώρου.

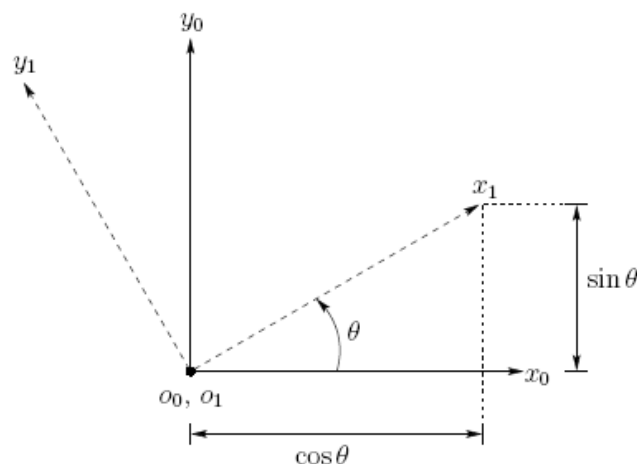


Fig. 2.2 Coordinate frame $o_1x_1y_1$ is oriented at an angle θ with respect to $o_0x_0y_0$.

Σχήμα 2.2 Το πλαίσιο συντεταγμένων $o_1 x_1 y_1$ είναι προσανατολισμένο κατά γωνία θ σε σχέση με το σύστημα $o_0 x_0 y_0$.

Ένας λιγότερο προφανής τρόπος για τον καθορισμό του προσανατολισμού είναι να προσδιορίσουμε τα διανύσματα συντεταγμένων για τους άξονες του πλαισίου $o_1 x_1 y_1$ σε σχέση με το πλαίσιο συντεταγμένων $o_0 x_0 y_0$

$$R_1^0 = [x_1^0 | y_1^0] \quad \text{where } x_1^0 \text{ and } y_1^0$$

είναι οι συντεταγμένες στο πλαίσιο $o_0 x_0 y_0$ των μοναδιαίων διανυσμάτων x_1 και y_1 αντίστοιχα. Ο πίνακας σε αυτήν τη μορφή καλείται πίνακας περιστροφής. Οι πίνακες περιστροφής έχουν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες τις οποίες θα δούμε παρακάτω.

Στην περίπτωση των δυο διαστάσεων είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις εισόδους του πίνακα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad y_1^0 = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

το οποίο δίνει

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Χρησιμοποιούμε το συμβολικό μετασχηματισμό έτσι ώστε ο εκθέτης να δηλώνει το πλαίσιο αναφοράς. Έτσι ο R_1^0 είναι ένας πίνακας του οποίου τα διανύσματα στήλης είναι οι συντεταγμένες (των μοναδιαίων διανυσμάτων κατά μήκος) των αξόνων του πλαισίου $o_1 x_1 y_1$ σε σχέση με το πλαίσιο $o_0 x_0 y_0$.

Μια εναλλακτική προσέγγιση, που ταιριάζει καλύτερα για την τρισδιάστατη περίπτωση, είναι η δημιουργία του πίνακα περιστροφής προβάλλοντας τους άξονες του πλαισίου $o_1 x_1 y_1$ πάνω στους άξονες συντεταγμένων του πλαισίου $o_0 x_0 y_0$. Υπενθυμίζοντας ότι το εσωτερικό γινόμενο δυο μοναδιαίων διανυσμάτων είναι σημείο και δίνει την προβολή του ενός πάνω στο άλλο, λαμβάνουμε

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}, \quad y_1^0 = \begin{bmatrix} y_1 \cdot x_0 \\ y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$

τα οποία συνδυαζόμενα δίνουν τον πίνακα περιστροφής

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$

Έτσι, οι στήλες του R_1^0 καθορίζουν τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων συντεταγμένων του $o_1 x_1 y_1$ σε σχέση με τους άξονες συντεταγμένων του $o_0 x_0 y_0$. Για παράδειγμα η πρώτη στήλη $(x_1 \cdot x_0, x_1 \cdot y_0)^T$ του R_1^0 καθορίζει την κατεύθυνση του x_1 σε σχέση με το πλαίσιο $o_0 x_0 y_0$. Στο σχήμα 2.2

βλέπουμε ότι αυτή η μέθοδος καθορισμού του πίνακα περιστροφής με προβολή, δίνει το ίδιο αποτέλεσμα όπως βγαίνει και από την εξίσωση 2.1. Αν θέλουμε εντούτοις να περιγράψουμε τον προσανατολισμό του πλαισίου $\mathcal{O}_0 \mathcal{X}_0 \mathcal{Y}_0$ σε σχέση με το πλαίσιο $\mathcal{O}_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{Y}_1$ (δηλαδή, να χρησιμοποιήσουμε το πλαίσιο $\mathcal{O}_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{Y}_1$ ως πλαίσιο αναφοράς), ο πίνακας περιστροφής μπορεί να πάρει τη μορφή

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} x_0 \cdot x_1 & y_0 \cdot x_1 \\ x_0 \cdot y_1 & y_0 \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

Από τη στιγμή που το εσωτερικό γινόμενο είναι μεταβατικό ($x_i \cdot y_j = y_j \cdot x_i$) βλέπουμε ότι

$$R_0^1 = (R_1^0)^T$$

Με τη γεωμετρική έννοια, ο προσανατολισμός του πλαισίου $\mathcal{O}_0 \mathcal{X}_0 \mathcal{Y}_0$ σε σχέση με το πλαίσιο $\mathcal{O}_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{Y}_1$ είναι το αντίστροφο του προσανατολισμού του πλαισίου $\mathcal{O}_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{Y}_1$ σε σχέση με το πλαίσιο $\mathcal{O}_0 \mathcal{X}_0 \mathcal{Y}_0$. Αλγεβρικά, γνωρίζοντας ότι οι άξονες συντεταγμένων είναι αμοιβαία ορθογώνιοι, εύκολα φαίνεται ότι

$$(R_1^0)^T = (R_1^0)^{-1}$$

Τα διανύσματα στήλης του R_1^0 είναι μοναδιαίου μήκους και αμοιβαία ορθογώνια (πρόβλημα 2-4). Ένας τέτοιος πίνακας καλείται ορθογώνιος. Μπορεί ναδειχθεί ότι $\det R_i^0 = \pm 1$ (πρόβλημα 2-5). Αν περιοριστούμε στο δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων τότε είναι $\det R_i^0 = +1$ (πρόβλημα 2-5). Είναι συνηθισμένο να αναφερόμαστε στο σύνολο αυτών των $n \times n$ πινάκων με το σύμβολο $SO(n)$, το οποίο δηλώνει την ειδική ομάδα ορθογωνίων πινάκων τάξεως n . Οι ιδιότητες αυτών των πινάκων συνοψίζονται στον πίνακα 2.2.1

Πίνακας 2.2.1: Ιδιότητες της ομάδας πινάκων $SO(n)$

Table 2.2.1: Properties of the Matrix Group $SO(n)$

- $R \in SO(n)$
- $R^{-1} \in SO(n)$
- $R^{-1} = R^T$
- The columns (and therefore the rows) of R are mutually orthogonal
- Each column (and therefore each row) of R is a unit vector
- $\det R = 1$

Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας του αντιστρόφου του πίνακα περιστροφής, τονίζουμε ότι στη δυσδιάστατη περίπτωση, ο αντίστροφος του πίνακα περιστροφής αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά γωνία θ και μπορεί εύκολα να υπολογιστεί, δημιουργώντας τον πίνακα για μια περιστροφή κατά γωνία $-\theta$:

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T$$

2.2.2 Περιστροφές σε τρεις διαστάσεις

Η τεχνική προβολής που περιγράφηκε παραπάνω είναι κατάλληλη για την τρισδιάστατη περίπτωση. Στις τρεις διαστάσεις, κάθε άξονας του πλαισίου $o_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$ προβάλλεται πάνω στο πλαίσιο συντεταγμένων $o_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$. Ο πίνακας περιστροφής που προκύπτει δίνεται από

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

Όπως στην περίπτωση των πινάκων περιστροφής για τις δυο διαστάσεις, οι πίνακες σε αυτήν τη μορφή είναι ορθογώνιοι, με ορίζουσα ίση με μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, οι 3×3 πίνακες περιστροφής ανήκουν στην ομάδα $SO(3)$. Οι ιδιότητες που αναφέρονται στον πίνακα 2.2.1 επίσης ισχύουν για τους πίνακες περιστροφής στο $SO(3)$.

Παράδειγμα 2.1

Έστω ότι το πλαίσιο $o_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$ περιστρέφεται με γωνία θ γύρω από τον άξονα z_0 και επιθυμούμε να βρούμε τον πίνακα μετασχηματισμού R_1^0 που προκύπτει. Η θετική φορά της γωνίας θ ορίζεται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, δηλαδή είναι η θετική περιστροφή κατά θ γύρω από τον άξονα z του δεξιόστροφου κοχλία (καθώς βιδώνει) κατά μήκος της θετικής φοράς του άξονα z . Από το σχήμα 2.3 έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_0 &= \cos \theta, & y_1 \cdot x_0 &= -\sin \theta, \\ x_1 \cdot y_0 &= \sin \theta, & y_1 \cdot y_0 &= \cos \theta \end{aligned}$$

και

$$z_0 \cdot z_1 = 1$$

ενώ όλα τα άλλα βαθμωτά γινόμενα είναι μηδέν. Έτσι ο πίνακας περιστροφής R_1^0 έχει μια συγκεκριμένη απλή μορφή για αυτήν την περίπτωση, που είναι

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

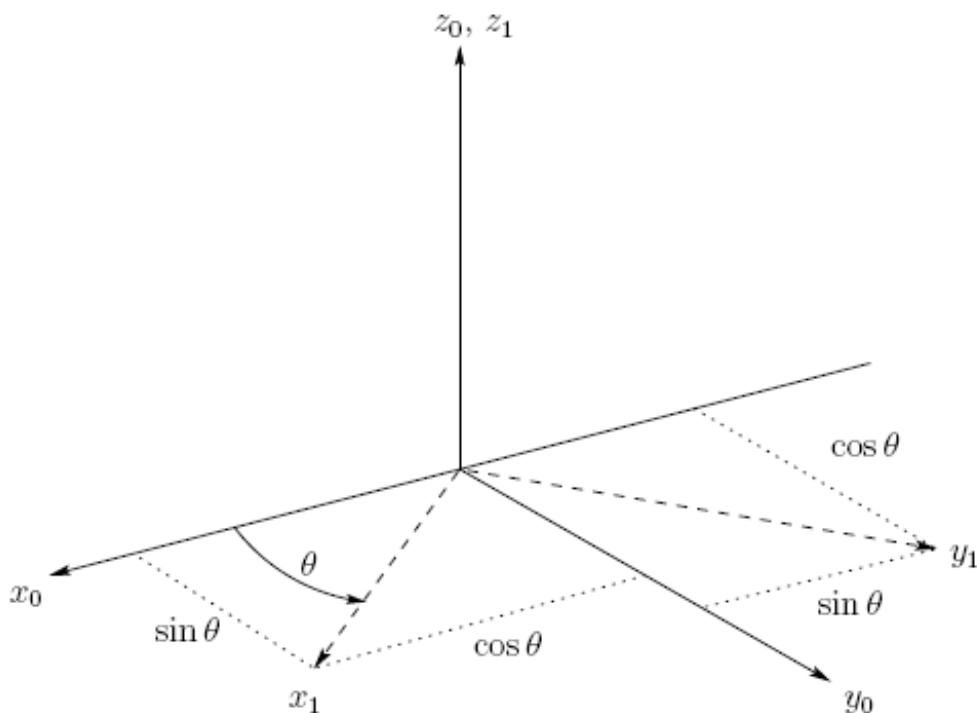


Fig. 2.3 Rotation about z_0 by an angle θ .

Σχήμα 2.3 Περιστροφή γύρω από τον z_0 κατά γωνία θ

Οι βασικοί πίνακες περιστροφής

Ο πίνακας περιστροφής που δίνεται στην εξίσωση (2.2) καλείται βασικός πίνακας περιστροφής (γύρω από τον άξονα z). Σε αυτήν την περίπτωση είναι καλύτερο να γίνει χρήση του συμβολισμού $R_{z,\theta}$ αντί του R_1^0 για τον πίνακα. Είναι εύκολο να επαληθευθεί ότι ο βασικός πίνακας περιστροφής $R_{z,\theta}$ έχει τις εξής ιδιότητες

$$R_{z,0} = I \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

$$R_{z,\theta}R_{z,\phi} = R_{z,\theta+\phi}$$

οι οποίες μαζί δίδουν

$$(R_{z,\theta})^{-1} = R_{z,-\theta} \quad (2.5)$$

Ομοίως οι βασικοί πίνακες περιστροφής που αναπαριστούν περιστροφές γύρω από τους άξονες x και y , δίδονται ως (πρόβλημα 2-8)

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

που ικανοποιούν ανάλογα τις ιδιότητες των εξισώσεων (2.3), (2.4) και (2.5).

Παράδειγμα 2.2

Έστω ότι έχουμε τα πλαίσια $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ και $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Προβάλλοντας τα μοναδιαία διανύσματα x_1, y_1, z_1 πάνω στα x_0, y_0, z_0 λαμβάνουμε τις συντεταγμένες των x_1, y_1, z_1 στο πλαίσιο $O_0 X_0 Y_0 Z_0$. Βλέπουμε ότι οι συντεταγμένες των x_1, y_1, z_1 αντίστοιχα είναι

για x_1 είναι $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

για y_1 είναι $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^T$

για z_1 είναι $(0, 1, 0)^T$

Ο πίνακας περιστροφής R_1^0 που καθορίζει τον προσανατολισμό του $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ σε σχέση με το $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ έχει τις παραπάνω συντεταγμένες ως διανύσματα στήλης και είναι

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

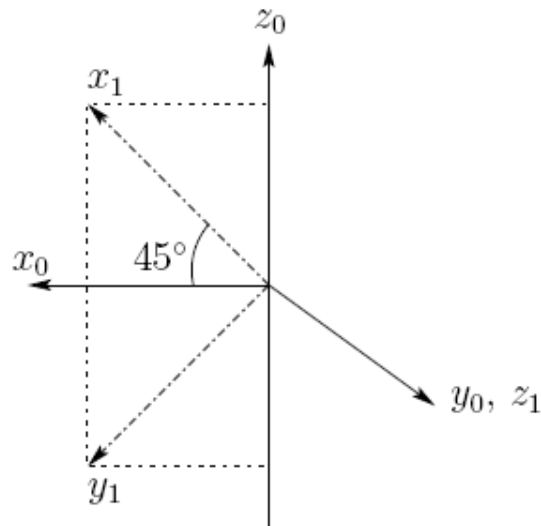


Fig. 2.4 Defining the relative orientation of two frames.

Σχήμα 2.4 Καθορισμός του σχετικού προσανατολισμού των δυο πλαισίων

2.3 ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Το σχήμα 2.5 δείχνει ένα άκαμπτο αντικείμενο S στο οποίο είναι τοποθετημένο το πλαίσιο $O_1 x_1 y_1 z_1$.

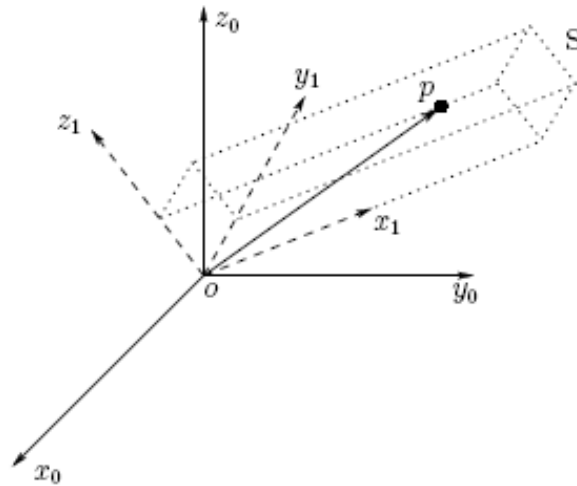


Fig. 2.5 Coordinate frame attached to a rigid body.

Σχήμα 2.5 Σύστημα συντεταγμένων τοποθετημένο σε ένα άκαμπτο σώμα

Με δεδομένες τις συντεταγμένες p^1 του σημείου p (οι συντεταγμένες δίδονται σε σχέση με το πλαίσιο $o_1 x_1 y_1 z_1$), θέλουμε να καθορίσουμε τις συντεταγμένες του p σε σχέση με το αμετακίνητο πλαίσιο $o_0 x_0 y_0 z_0$. Οι συντεταγμένες $p^1 = (u, v, w)^T$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$p = ux_1 + vy_1 + wz_1$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να λάβουμε μια αντίστοιχη έκφραση για τις συντεταγμένες p^0 προβάλλοντας το σημείο p πάνω στους άξονες συντεταγμένων του πλαισίου $o_0 x_0 y_0 z_0$, λαμβάνοντας

$$p^0 = \begin{bmatrix} p \cdot x_0 \\ p \cdot y_0 \\ p \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω δυο εξισώσεις έχουμε

$$\begin{aligned}
 p^0 &= \begin{bmatrix} (ux_1 + vy_1 + wz_1) \cdot x_0 \\ (ux_1 + vy_1 + wz_1) \cdot y_0 \\ (ux_1 + vy_1 + wz_1) \cdot z_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} ux_1 \cdot x_0 + vy_1 \cdot x_0 + wz_1 \cdot x_0 \\ ux_1 \cdot y_0 + vy_1 \cdot y_0 + wz_1 \cdot y_0 \\ ux_1 \cdot z_0 + vy_1 \cdot z_0 + wz_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ο πίνακας στην τελευταία εξίσωση είναι ο R_1^0 και οδηγεί στη σχέση

$$p^0 = R_1^0 p^1 \quad (2.9)$$

Για αυτό, ο πίνακας περιστροφής R_1^0 μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο για την αναπαράσταση του προσανατολισμού του πλαισίου συντεταγμένων $O_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$ σε σχέση με το πλαίσιο $O_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$, αλλά και για το μετασχηματισμό των συντεταγμένων ενός σημείου από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Αν ένα δεδομένο σημείο εκφράζεται σε σχέση με το πλαίσιο $O_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$ με συντεταγμένες p^1 , τότε το $R_1^0 p^1$ αναπαριστά το ίδιο σημείο που εκφράζεται σε σχέση με το πλαίσιο $O_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$.

Επίσης οι πίνακες περιστροφής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση άκαμπτων κινήσεων που αντιστοιχούν σε καθαρή περιστροφή. Στο σχήμα 2.6 βλέπουμε ένα ορθογώνιο αντικείμενο, του οποίου μια κορυφή είναι στο σημείο p_a στο χώρο. Στο σχήμα 2.6 (b) βλέπουμε το ίδιο αντικείμενο αφού έχει περιστραφεί γύρω από τον z_0 κατά π . Η ίδια κορυφή του αντικειμένου τώρα είναι στο σημείο p_b στο χώρο. Είναι δυνατόν να παραχθούν οι συντεταγμένες για το p_b , αν είναι δεδομένες οι συντεταγμένες για το p_a και ο πίνακας περιστροφής που αντιστοιχεί σε περιστροφή γύρω από τον z_0 . Έστω ότι ένα πλαίσιο συντεταγμένων είναι άκαμπτα τοποθετημένο στο αντικείμενο στο σχήμα 2.6 (a), τέτοιο ώστε να συμπίπτει με το πλαίσιο $O_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$.

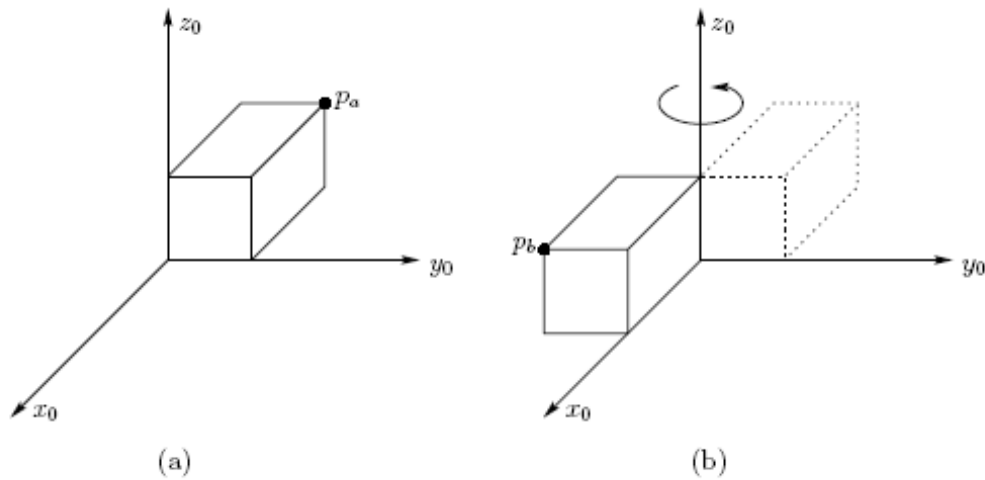


Fig. 2.6 The block in (b) is obtained by rotating the block in (a) by π about z_0 .

Σχήμα 2.6 Το αντικείμενο δεξιά (b) λαμβάνεται από την περιστροφή του αντικειμένου αριστερά (a) κατά γωνία π γύρω από τον άξονα z_0

Μετά την περιστροφή κατά π , το πλαίσιο συντεταγμένων του αντικειμένου, το οποίο είναι άκαμπτα τοποθετημένο πάνω του, επίσης περιστρέφεται κατά π . Αν δηλώσουμε αυτό το περιστραμμένο πλαίσιο ως $O_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$ τότε έχουμε

$$R_1^0 = R_{z,\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο τοπικό πλαίσιο συντεταγμένων $O_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$, το σημείο p_b έχει την αναπαράσταση συντεταγμένων p_b^1 . Για να λάβουμε αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πλαίσιο $O_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$, αρκεί να εφαρμόσουμε την εξίσωση μετασχηματισμού συντεταγμένων (2.9) η οποία δίδει

$$p_b^0 = R_{z,\pi} p_b^1$$

Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι οι τοπικές συντεταγμένες p_b^1 , της κορυφής του αντικειμένου, δεν αλλάζουν καθώς το αντικείμενο περιστρέφεται, από τη στιγμή που ορίζονται ως προς το πλαίσιο συντεταγμένων του ιδίου του αντικειμένου. Για αυτόν το λόγο το πλαίσιο του αντικειμένου είναι ευθυγραμμισμένο με το πλαίσιο αναφοράς $O_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$ (πριν πραγματοποιηθεί η περιστροφή), οι συντεταγμένες είναι $p_b^1 = p_a^0$, από τη στιγμή που δεν έχει πραγματοποιηθεί η περιστροφή, το σημείο p_a

συμπίπτει με την κορυφή του αντικειμένου. Έτσι μπορεί να αντικαταστήσει το p_a^0 στην προηγούμενη εξίσωση και να λάβουμε

$$p_b^0 = R_{z,\pi} p_a^0$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα περιστροφής για την αναπαράσταση μιας περιστροφικής κίνησης. Πιο συγκεκριμένα, αν το σημείο p_b λαμβάνεται από την περιστροφή του σημείου p_a , όπως ορίσθηκε με τον πίνακα περιστροφής R , τότε οι συντεταγμένες του σημείου p_b σε σχέση με το πλαίσιο αναφοράς είναι

$$p_b^0 = R p_a^0$$

Η ίδια προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιστροφή διανυσμάτων σε σχέση με ένα πλαίσιο συντεταγμένων, όπως στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.3

Το διάνυσμα u με συντεταγμένες $u^0 = (0, 1, 1)^T$ περιστρέφεται γύρω από τον y_0 κατά $\pi/2$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7. Το διάνυσμα u_1 που προκύπτει έχει συντεταγμένες που δίδονται από

$$v_1^0 = R_{y,\frac{\pi}{2}} v^0 \quad (2.10)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

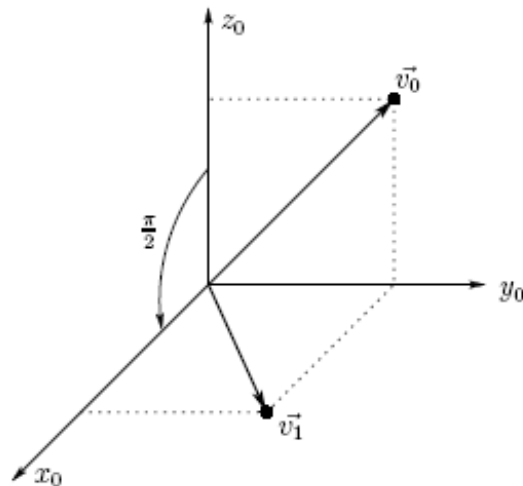


Fig. 2.7 Rotating a vector about axis y_0 .

Σχήμα 2.7 Περιστροφή ενός διανύσματος γύρω από τον άξονα y_0

Έτσι, όπως έχουμε δει, μια τρίτη εκδοχή του πίνακα περιστροφής R είναι ένας τελεστής που ενεργεί στα ανύσματα σε ένα αμετακίνητο πλαίσιο. Με άλλα λόγια, αντί να συσχετίσουμε τις συντεταγμένες ενός αμετακίνητου διανύσματος με δυο διαφορετικά πλαίσια συντεταγμένων, η εξίσωση (2.10) μπορεί να αναπαραστήσει στο πλαίσιο $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ τις συντεταγμένες ενός ανύσματος u_1 που λαμβάνεται από ένα διάνυσμα u κατά μια δεδομένη περιστροφή.

Ανακεφαλαίωση

Είδαμε ότι ένας πίνακας περιστροφής R είτε $R \in SO(3)$ είτε $R \in SO(2)$ μπορεί να περιγράφει με τρεις ξεχωριστούς τρόπους:

1. Αναπαριστά ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων που συσχετίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου p σε δυο διαφορετικά πλαίσια.
2. Δίδει τον προσανατολισμό ενός μετασχηματισμένου πλαισίου συντεταγμένων σε σχέση με ένα αμετακίνητο πλαίσιο συντεταγμένων.
3. Είναι ένας τελεστής που παίρνει ένα διάνυσμα και το περιστρέφει σε ένα νέο διάνυσμα στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

2.3.1 Μετασχηματισμοί ομοιότητας

Ένα πλαίσιο συντεταγμένων ορίζεται από ένα σύνολο διανυσμάτων βάσης, π.χ μοναδιαίων διανυσμάτων κατά μήκος των τριών αξόνων συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι ένας πίνακας περιστροφής, ως μετασχηματισμός συντεταγμένων, μπορεί να ορισθεί και σαν αλλαγή της βάσης από το ένα σύστημα στο άλλο. Η

αναπαράσταση πίνακα ενός γενικού γραμμικού μετασχηματισμού μετασχηματίζεται από το ένα πλαίσιο στο άλλο με τη χρήση του καλούμενου μετασχηματισμού ομοιότητας. Για παράδειγμα, αν A είναι η αναπαράσταση πίνακα ενός δεδομένου γραμμικού μετασχηματισμού στο $O_0 \ X_0 \ Y_0 \ Z_0$ και B η αναπαράσταση του ίδιου γραμμικού μετασχηματισμού στο $O_1 \ X_1 \ Y_1 \ Z_1$, τότε A και B σχετίζονται ως εξής

$$B = (R_1^0)^{-1} A R_1^0 \quad (2.12)$$

όπου R_1^0 είναι ο μετασχηματισμός συντεταγμένων μεταξύ των πλαισίων $O_1 \ X_1 \ Y_1 \ Z_1$ και $O_0 \ X_0 \ Y_0 \ Z_0$. Πιο συγκεκριμένα, αν ο A είναι περιστροφή, τότε είναι και ο B . Για αυτόν το λόγο, η χρήση των μετασχηματισμών ομοιότητας μας επιτρέπει να εκφράσουμε την ίδια περιστροφή εύκολα σε σχέση με διαφορετικά πλαίσια.

Παράδειγμα 2.4

Από εδώ και στο εξής, θα χρησιμοποιείται ο συντομογραφικός συμβολισμός $c_\theta = \cos\theta$ και $s_\theta = \sin\theta$ για τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Έστω ότι τα πλαίσια $O_0 \ X_0 \ Y_0 \ Z_0$ και $O_1 \ X_1 \ Y_1 \ Z_1$ σχετίζονται με την περιστροφή

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Αν $A = R_{z,\theta}$ σε σχέση με το πλαίσιο $O_0 \ X_0 \ Y_0 \ Z_0$, τότε σε σχέση με το πλαίσιο $O_1 \ X_1 \ Y_1 \ Z_1$ έχουμε

$$B = (R_1^0)^{-1} A R_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & s_\theta \\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}$$

Με άλλα λόγια B είναι μια περιστροφή γύρω από τον άξονα z_0 αλλά σε σχέση με το πλαίσιο $O_1 \ X_1 \ Y_1 \ Z_1$.

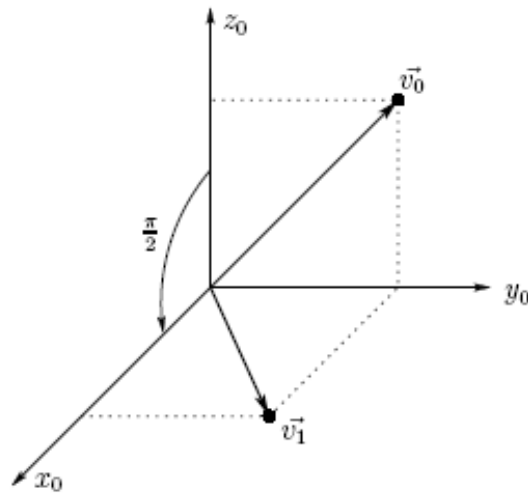


Fig. 2.8 Coordinate Frames for Example 2.4

[Σχήμα 2.8 Συστήματα συντεταγμένων για το παράδειγμα 2.4](#)

2.4 ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΩΝ

Σε αυτήν την ενότητα θα συζητηθεί η σύνθεση των περιστροφών. Είναι σημαντικό για τα επόμενα κεφάλαια, να γίνει πλήρως κατανοητή από τον αναγνώστη αυτή η ενότητα προτού προχωρήσει παρακάτω.

2.4.1 Περιστροφή σε σχέση με το τρέχον πλαίσιο

Υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας R_1^0 στην εξίσωση (2.9) αναπαριστά έναν περιστροφικό μετασχηματισμό ανάμεσα στα πλαίσια $O_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$ και $O_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$. Έστω τώρα, ότι προσθέτουμε ένα τρίτο πλαίσιο συντεταγμένων $O_2 \ x_2 \ y_2 \ z_2$ που σχετίζεται με τα πλαίσια $O_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$ και $O_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$ μέσω περιστροφικών μετασχηματισμών. Ένα δεδομένο σημείο p μπορεί να αναπαρασταθεί με συντεταγμένες που καθορίζονται σε σχέση με οποιοδήποτε από τα τρία αυτά πλαίσια: p^0 , p^1 και p^2 . Η σχέση ανάμεσα σε αυτές τις αναπαραστάσεις του p είναι

$$p^0 = R_1^0 p^1 \quad (2.13)$$

$$p^1 = R_2^1 p^2 \quad (2.14)$$

$$p^0 = R_2^0 p^2 \quad (2.15)$$

όπου κάθε R_j^i είναι ένας πίνακας περιστροφής. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.14) στην εξίσωση (2.13) προκύπτει

$$p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 \quad (2.16)$$

Οι R_1^0 και R_2^0 αναπαριστούν περιστροφές σε σχέση με το πλαίσιο $o_0 x_0 y_0 z_0$ ενώ ο R_2^1 αναπαριστά μια περιστροφή σε σχέση με το πλαίσιο $o_1 x_1 y_1 z_1$. Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2.15) και (2.16) εξάγεται άμεσα ότι

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1 \quad (2.17)$$

Η εξίσωση (2.17) είναι ο νόμος της σύνθεσης για περιστροφικούς μετασχηματισμούς. Δηλώνει ότι, για να μετασχηματίσουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου p από την αναπαράστασή του p^2 στο πλαίσιο $o_2 x_2 y_2 z_2$ στην αναπαράστασή του p^0 στο πλαίσιο $o_0 x_0 y_0 z_0$, μπορούμε πρώτα να κάνουμε το μετασχηματισμό στις συντεταγμένες του p^1 στο πλαίσιο $o_1 x_1 y_1 z_1$ με τη χρήση του R_2^1 και κατόπιν το μετασχηματισμό p^1 στο p^0 με τη χρήση του R_1^0 .

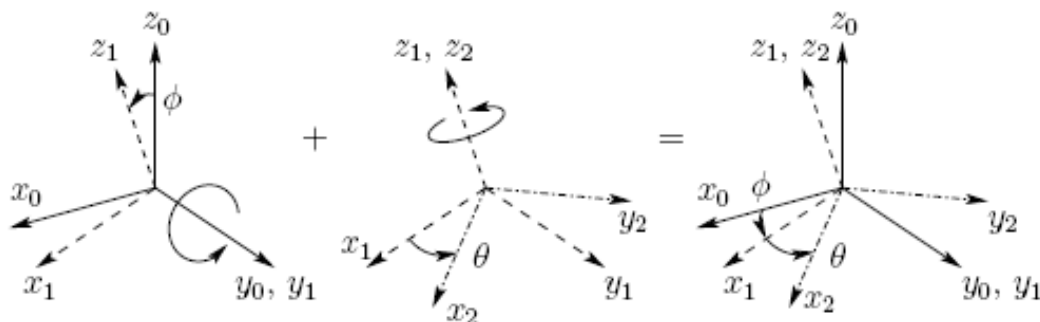


Fig. 2.9 Composition of rotations about current axes.

Σχήμα 2.9 Σύνθεση των περιστροφών γύρω από τους άξονες

Η εξίσωση (2.17) μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής. Υποθέτουμε αρχικά ότι και τα τρία πλαίσια συντεταγμένων συμπίπτουν. Πρώτα περιστρέφουμε το πλαίσιο $o_2 x_2 y_2 z_2$ σε σχέση με το $o_0 x_0 y_0 z_0$, σύμφωνα με το μετασχηματισμό R_1^0 . Έπειτα με τα πλαίσια $o_1 x_1 y_1 z_1$ και $o_2 x_2 y_2 z_2$ να συμπίπτουν, περιστρέφουμε το $o_2 x_2 y_2 z_2$ σε σχέση με το $o_1 x_1 y_1 z_1$, σύμφωνα με το μετασχηματισμό R_2^1 . Σε κάθε περίπτωση καλούμε το πλαίσιο σε σχέση με το οποίο συμβαίνει η περιστροφή, τρέχον πλαίσιο.

Παράδειγμα 2.5

Έστω ότι ο πίνακας περιστροφής R αναπαριστά μια περιστροφή κατά γωνία ϕ γύρω από τον τρέχοντα άξονα y και ακολουθεί μια περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον τρέχοντα άξονα z (σχήμα 2.9). Τότε ο πίνακας R δίδεται από

$$\begin{aligned}
 R &= R_{y,\phi} R_{z,\theta} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\phi & 0 & s_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\phi & 0 & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -c_\phi s_\theta & s_\phi \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ -s_\phi c_\theta & s_\phi s_\theta & c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η σειρά με την οποία πραγματοποιείται μια αλληλουχία περιστροφών και άρα η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζοντας μεταξύ τους οι πίνακες περιστροφής, είναι κρίσιμη. Ο λόγος είναι ότι μια περιστροφή, αντίθετα με μια μετατόπιση, δεν είναι διανυσματικό μέγεθος και άρα οι περιστροφικοί μετασχηματισμοί γενικά δεν αλλάζουν.

Παράδειγμα 2.6

Έστω ότι οι παραπάνω περιστροφές πραγματοποιούνται με αντίστροφη σειρά, δηλαδή πρώτα μια περιστροφή γύρω από τον τρέχοντα άξονα z και ακολουθεί μια περιστροφή γύρω από τον τρέχοντα άξονα y . Τότε ο πίνακας περιστροφής που προκύπτει είναι

$$\begin{aligned}
 R' &= R_{z,\theta} R_{y,\phi} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\phi & 0 & s_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\phi & 0 & c_\phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\theta c_\phi & -s_\theta & c_\theta s_\phi \\ s_\theta c_\phi & c_\theta & s_\theta s_\phi \\ -s_\phi & 0 & c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2.18) και (2.19) βλέπουμε ότι $R \neq R'$.

2.4.2 Περιστροφή σε σχέση με το ακίνητο πλαίσιο

Πολλές φορές είναι επιθυμητό να πραγματοποιηθεί μια σειρά περιστροφών, γύρω από ένα ακίνητο πλαίσιο συντεταγμένων, παρά γύρω από διαδοχικά τρέχοντα πλαίσια. Για παράδειγμα μπορεί να θέλουμε να πραγματοποιήσουμε μια περιστροφή γύρω από τον άξονα x_0 ακολουθούμενη από μια περιστροφή γύρω από τον άξονα y_0 (όχι τον y_1). Αναφερόμαστε στο $O_0 x_0 y_0 z_0$ ως ακίνητο πλαίσιο. Σε αυτήν την περίπτωση ο νόμος της σύνθεσης που δίδεται από την εξίσωση (2.17) δεν ισχύει. Αποδυνκνείται ότι ο σωστός νόμος της σύνθεσης σε αυτήν την περίπτωση είναι απλώς ο πολλαπλασιασμός των διαδοχικών πινάκων περιστροφής με αντίστροφη σειρά από αυτήν που δίδεται από την εξίσωση (2.17). Σημειώνεται ότι αυτές οι περιστροφές δεν πραγματοποιούνται με αντίστροφη σειρά. Αντιθέτως, πραγματοποιούνται γύρω από το ακίνητο πλαίσιο αντί γύρω από το τρέχον πλαίσιο.

Για να δούμε γιατί συμβαίνει αυτό, υποθέτουμε ότι έχουμε δυο πλαίσια, το $O_0 x_0 y_0 z_0$ και το $O_1 x_1 y_1 z_1$, τα οποία σχετίζονται με τον περιστροφικό μετασχηματισμό R_1^0 . Αν $R \in SO(3)$ αναπαριστά μια περιστροφή σε σχέση με το $O_0 x_0 y_0 z_0$, ξέρουμε από την ενότητα 2.3.1 ότι η αναπαράσταση του R για το τρέχον πλαίσιο $O_1 x_1 y_1 z_1$ δίδεται από $(R_1^0)^{-1} R R_1^0$. Έτσι εφαρμόζοντας το νόμο της σύνθεσης για περιστροφές γύρω από τον τρέχοντα άξονα έχουμε

$$R_2^0 = R_1^0 [(R_1^0)^{-1} R R_1^0] = R R_1^0 \quad (2.20)$$

Παράδειγμα 2.7

Αναφερόμενοι στο σχήμα 2.10, υποθέτουμε ότι ο πίνακας περιστροφής R αναπαριστά μια περιστροφή κατά γωνία ϕ γύρω από τον y_0 ακολουθούμενη από μια περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον ακίνητο άξονα z_0 .

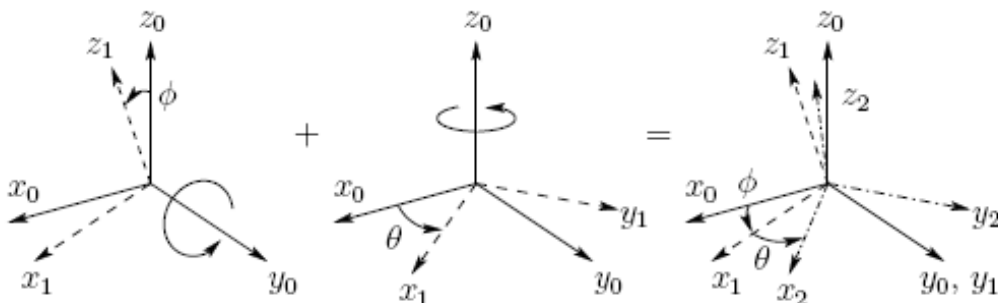


Fig. 2.10 Composition of rotations about fixed axes.

Σχήμα 2.10 Σύνθεση των περιστροφών γύρω από ακίνητους άξονες

Η δεύτερη περιστροφή δίδεται από $R_{y, -\phi}$, $R_{z, \theta}$, $R_{y, \phi}$, γύρω από τον ακίνητο άξονα, η οποία είναι η βασική περιστροφή γύρω από τον άξονα z εκπεφρασμένη σε σχέση με το πλαίσιο $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, χρησιμοποιώντας ένα μετασχηματισμό ομοιότητας. Έτσι, ο νόμος της σύνθεσης για περιστροφικούς σχηματισμούς μας δίδει

$$\begin{aligned} p^0 &= R_{y, \phi} p^1 \\ &= R_{y, \phi} [R_{y, -\phi} R_{z, \theta} R_{y, \phi}] p^2 \\ &= R_{z, \theta} R_{y, \phi} p^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2.21) και (2.18) βλέπουμε ότι λαμβάνουμε τους ίδιους βασικούς πίνακες περιστροφής, αλλά με αντίστροφη σειρά.

Ανακεφαλαίωση

Μπορούμε να συνοψίσουμε το νόμο της σύνθεσης για περιστροφικούς μετασχηματισμούς στην παρακάτω πρόταση:

Με δεδομένα ένα ακίνητο πλαίσιο $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ και ένα τρέχον πλαίσιο $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, που να συσχετίζονται με τον πίνακα περιστροφής R_1^0 , αν ένα τρίτο πλαίσιο $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ λαμβάνεται με την περιστροφή R να πραγματοποιείται σε σχέση με το τρέχον πλαίσιο, τότε πολλαπλασιάζοντας R_1^0 με $R = R_2^1$, λαμβάνουμε

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1 \quad (2.22)$$

Αν η δεύτερη περιστροφή τείνει να πραγματοποιηθεί σε σχέση με το ακίνητο πλαίσιο, τότε η χρήση του συμβολισμού R_2^1 δεν είναι η κατάλληλη για την αναπαράσταση αυτής της περιστροφής. Έτσι, αν αναπαραστήσουμε την περιστροφή με R και πολλαπλασιάσουμε R_1^0 με R λαμβάνουμε

$$R_2^0 = R R_1^0 \quad (2.23)$$

Σε κάθε περίπτωση ο R_2^0 αναπαριστά το μετασχηματισμό ανάμεσα στα πλαίσια $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ και $O_2 X_2 Y_2 Z_2$. Το πλαίσιο $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ που προκύπτει από την εξίσωση (2.22) θα είναι διαφορετικό από το πλαίσιο που προκύπτει από την εξίσωση (2.23).

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω κανόνα για τη σύνθεση των περιστροφών, είναι εύκολο να καθορίσουμε το αποτέλεσμα πολλαπλών διαδοχικών περιστροφικών μετασχηματισμών.

Παράδειγμα 2.8

Έστω ότι ο R ορίζεται από την παρακάτω σειρά βασικών περιστροφών:

1. Περιστροφή κατά θ γύρω από τον τρέχοντα άξονα x
2. Περιστροφή κατά φ γύρω από τον τρέχοντα άξονα z
3. Περιστροφή κατά α γύρω από τον ακίνητο άξονα z
4. Περιστροφή κατά β γύρω από τον τρέχοντα άξονα y
5. Περιστροφή κατά δ γύρω από τον ακίνητο άξονα x

Για να προσδιορίσουμε το αθροιστικό αποτέλεσμα αυτών των περιστροφών, απλά αρχίζουμε με την πρώτη περιστροφή $R_{x,\theta}$ και πολλαπλασιάζουμε πριν ή μετά ανάλογα με την περίπτωση, λαμβάνοντας

$$R = R_{x,\delta} R_{z,\alpha} R_{x,\theta} R_{z,\phi} R_{y,\beta} \quad (2.24)$$

2.5 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΩΝ

Τα εννέα στοιχειά r_{ij} σε ένα γενικό περιστροφικό μετασχηματισμό R δεν είναι ανεξάρτητες ποσότητες. Πράγματι, ένα άκαμπτο σώμα κατέχει το μέγιστο τρεις περιστροφικούς DOF και για αυτό αρκούν το μέγιστο τρεις ποσότητες για τον καθορισμό του προσανατολισμού του. Αυτό προκύπτει εύκολα από την εξέταση των περιορισμών που έχουν οι πίνακες στην $SO(3)$:

$$\sum_i r_{ij}^2 = 1, \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.25)$$

$$r_{1i}r_{1j} + r_{2i}r_{2j} + r_{3i}r_{3j} = 0, \quad i \neq j \quad (2.26)$$

Η εξίσωση (2.25) προκύπτει από το γεγονός ότι οι στήλες του πίνακα περιστροφής είναι μοναδιαία ανύσματα και η εξίσωση (2.26) προκύπτει από το γεγονός ότι οι στήλες του πίνακα περιστροφής είναι αμοιβαία ορθογώνιες. Μαζί αυτοί οι περιορισμοί, ορίζουν έξι ανεξάρτητες εξισώσεις με εννέα αγνώστους, που σημαίνει ότι υπάρχουν τρεις ελεύθερες μεταβλητές.

Σε αυτήν την ενότητα δείχνουμε τρεις τρόπους με τους οποίους μια τυχαία περιστροφή, μπορεί να αναπαρασταθεί με τη χρήση μόνο τριών ανεξάρτητων ποσοτήτων: η αναπαράσταση με τις γωνίες Euler, η αναπαράσταση roll-pitch-yaw και η αναπαράσταση άξονα/γωνίας.

2.5.1 Γωνίες Euler

Μια συνηθισμένη μέθοδος για τον καθορισμό του πίνακα περιστροφής με τη χρήση τριών ανεξάρτητων ποσοτήτων είναι η μέθοδος των γωνιών Euler. Έστω ότι έχουμε το ακίνητο πλαίσιο $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ και το περιστρεφόμενο πλαίσιο $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.11. Μπορούμε να ορίσουμε τον προσανατολισμό του πλαισίου $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ σε σχέση με το πλαίσιο $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ με τη βοήθεια τριών γωνιών (φ, θ, ψ) , γνωστές ως γωνίες Euler, που λαμβάνεται μετά από τρεις διαδοχικές περιστροφές, ως εξής:

1. Περιστροφή γύρω από τον άξονα z κατά γωνία φ
2. Περιστροφή γύρω από τον τρέχοντα άξονα y κατά γωνία θ
3. Περιστροφή γύρω από τον τρέχοντα άξονα z κατά γωνία ψ

Στο σχήμα 2.11 το πλαίσιο $O_a X_a Y_a Z_a$ αναπαριστά το νέο πλαίσιο συντεταγμένων μετά την περιστροφή κατά φ , το πλαίσιο $O_b X_b Y_b Z_b$ αναπαριστά το νέο πλαίσιο συντεταγμένων μετά την περιστροφή κατά θ και το πλαίσιο $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ αναπαριστά το τελικό πλαίσιο, μετά την περιστροφή κατά ψ . Τα πλαίσια $O_a X_a Y_a Z_a$ και $O_b X_b Y_b Z_b$ δείχνονται στο σχήμα μόνο για την οπτική κατανόηση των περιστροφών.

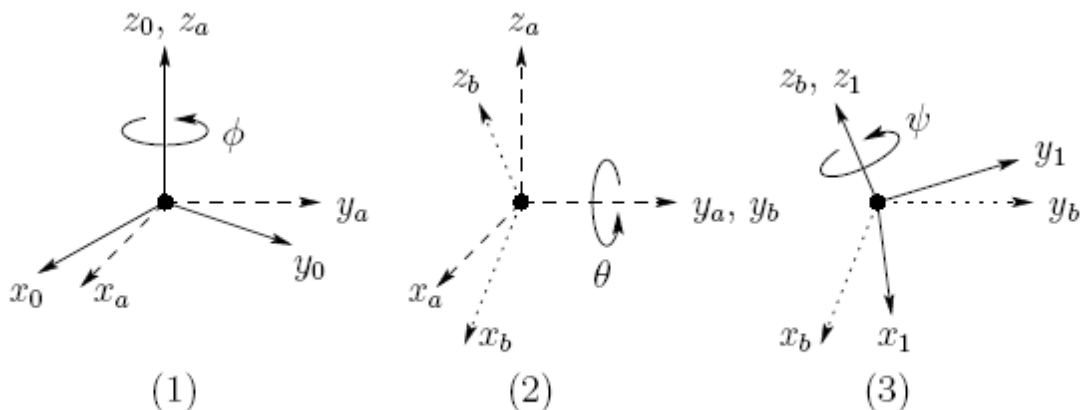


Fig. 2.11 Euler angle representation.

Σχήμα 2.11 Αναπαράσταση με τις γωνίες Euler

Με όρους των βασικών πινάκων περιστροφής, ο περιστροφικός μετασχηματισμός R_1^0 που προκύπτει, μπορεί να παραχθεί ως το γινόμενο

$$\begin{aligned}
 R_{ZY Z} &= R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Ο πίνακας $R_{ZY Z}$ στην εξίσωση (2.27) ονομάζεται $ZY Z$ - μετασχηματισμός γωνίας Euler.

Το πιο δύσκολο πρόβλημα είναι το ακόλουθο: αν δίνεται ένας πίνακας $R \in SO(3)$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

να προσδιοριστεί ένα σύνολο γωνιών Euler ϕ, θ και ψ τέτοιο ώστε

$$R = R_{ZY Z} \quad (2.28)$$

Το πρόβλημα αυτό καθίσταται πολύ σημαντικό κατά την ανάλυση της αντιστροφής κινηματικής των χειριστών. Για να βρεθεί λύση σε αυτό το πρόβλημα το χωρίζουμε σε δυο μέρη.

Πρώτα υποθέτουμε ότι κανένα από τα r_{13}, r_{23} δεν είναι μηδέν. Τότε από την εξίσωση (2.28), συμπεραίνουμε αφαιρετικά ότι $s_\theta \neq 0$, και για αυτό κανένα από τα r_{13}, r_{23} δεν είναι μηδέν. Αν κανένα από τα r_{13}, r_{23} δεν είναι μηδέν, τότε $r_{33} \neq \pm 1$ και έχουμε

$$c_\theta = r_{33}, \quad s_\theta = \pm \sqrt{1 - r_{33}^2}$$

άρα

$$\theta = \text{atan2} \left(r_{33}, \sqrt{1 - r_{33}^2} \right) \quad (2.29)$$

ή

$$\theta = \text{atan2} \left(r_{33}, -\sqrt{1 - r_{33}^2} \right) \quad (2.30)$$

όπου η συνάρτηση atan2 είναι η συνάρτηση τόξου εφαπτομένης δυο ορισμάτων,

Αν επιλέξουμε τιμή για τη θ όπως δίνεται από την εξίσωση (2.29), τότε $s_\theta > 0$ και

$$\phi = \text{atan2}(-r_{13}, -r_{23}) \quad (2.31)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{31}, -r_{32}) \quad (2.32)$$

Αν επιλέξουμε τιμή για τη θ όπως δίνεται από την εξίσωση (2.30), τότε $s_\theta < 0$ και

$$\phi = \text{atan2}(-r_{13}, -r_{23}) \quad (2.33)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{31}, -r_{32}) \quad (2.34)$$

Έτσι υπάρχουν δυο λύσεις που εξαρτώνται από το ποιο θα είναι το πρόσημο που δίδεται στη θ .

Αν $r_{13} = r_{23} = 0$ τότε το γεγονός ότι ο R είναι ορθογώνιος σημαίνει πως $r_{33} = \pm 1$ και $r_{31} = r_{32} = 0$. Έτσι ο R είναι της μορφής

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Αν $r_{33} = 1$ τότε $c_\theta = 0$ και $s_\theta = 0$ και άρα $\theta = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση (2.27) γίνεται

$$\begin{bmatrix} c_\phi c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi s_\psi - s_\phi c_\psi & 0 \\ s_\phi c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\phi+\psi} & -s_{\phi+\psi} & 0 \\ s_{\phi+\psi} & c_{\phi+\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι το άθροισμα $\phi + \psi$ μπορεί να προσδιορισθεί ως

$$\begin{aligned} \phi + \psi &= \text{atan2}(r_{11}, r_{21}) \\ &= \text{atan2}(r_{11}, -r_{12}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Από τη στιγμή που μπορεί να προσδιορισθεί μόνο το άθροισμα $\phi + \psi$, σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν άπειρες λύσεις. Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε

ότι $\varphi = 0$. Αν $r_{33} = -1$ τότε $c_\theta = -1$ και $s_\theta = 0$ και άρα $\theta = \pi$. Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση (2.27) γίνεται

$$\begin{bmatrix} -c_{\phi-\psi} & -s_{\phi-\psi} & 0 \\ s_{\phi-\psi} & c_{\phi-\psi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Τότε η λύση είναι

$$\phi - \psi = \text{atan2}(-r_{11}, -r_{12}) \quad (2.38)$$

Όπως και πριν υπάρχουν άπειρες λύσεις.

2.5.2 Γωνίες Roll, Pitch, Yaw

Ένας πίνακας περιστροφής R μπορεί επίσης να περιγράψει ως γινόμενο διαδοχικών περιστροφών γύρω από τους αρχικούς άξονες συντεταγμένων x_0 , y_0 και z_0 με συγκεκριμένη σειρά. Αυτές οι περιστροφές καθορίζουν τις γωνίες roll, pitch και yaw (οι οποίες συμβολίζονται και με φ, θ, ψ) και δείχνονται στο σχήμα 2.12.

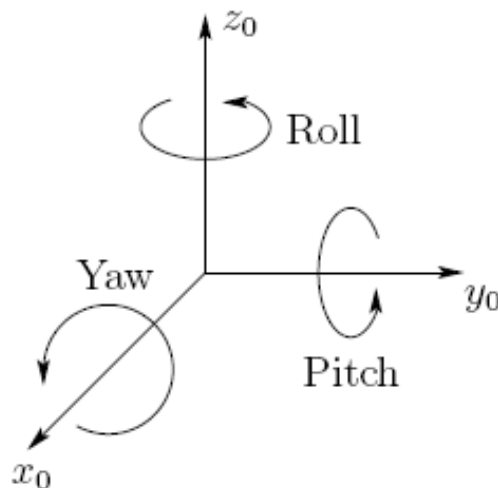


Fig. 2.12 Roll, pitch, and yaw angles.

[Σχήμα 2.12 Γωνίες roll, pitch και yaw](#)

Καθορίζουμε τη σειρά περιστροφής ως $x - y - z$, πρώτα yaw γύρω από τον x_0 μέσω της γωνίας ψ , έπειτα pitch γύρω από τον y_0 κατά γωνία θ και τέλος roll

γύρω από τον z_0 κατά γωνία φ . Από τη στιγμή που διαδοχικές περιστροφές έχουν σχέση με το ακίνητο πλαίσιο, ο πίνακας μετασχηματισμού που προκύπτει δίδεται από

$$\begin{aligned}
 R_{XYZ} &= R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix} \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

Φυσικά αντί για yaw - pitch - roll σε σχέση με τα ακίνητα πλαίσια, μπορούμε να εκφράσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό με τη σειρά roll - pitch - yaw σε σχέση με το τρέχον πλαίσιο κάθε φορά. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο όπως και στην εξίσωση (2.39).

2.5.3 Αναπαράσταση Άξονα/Γωνίας

Οι περιστροφές δεν πραγματοποιούνται πάντα γύρω από τους αρχικούς άξονες περιστροφής. Συχνά μας ενδιαφέρει μια περιστροφή γύρω από έναν τυχαίο άξονα στο χώρο. Αυτό μας παρέχει ένα βολικό τρόπο για να περιγράψουμε τις περιστροφές και την εναλλακτική παραμετροποίηση των πινάκων περιστροφής. Έστω $k = (k_x, k_y, k_z)^T$, που εκφράζεται στο πλαίσιο $o_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$, ότι είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που καθορίζει έναν άξονα. Θέλουμε να παράγουμε τον πίνακα περιστροφής $R_{k,\theta}$ αναπαριστώντας μια περιστροφή κατά θ , γύρω από αυτόν τον άξονα.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους ο πίνακας $R_{k,\theta}$ μπορεί να παραχθεί. Ο πιο απλός είναι το γεγονός ότι ο άξονας που καθορίζεται από το διάνυσμα k είναι κατά μήκος του άξονα z και ακολουθεί τον περιστροφικό μετασχηματισμό $R_1^0 = R_{z,\alpha} R_{y,\beta}$. Έτσι μπορεί να υπολογισθεί μια περιστροφή γύρω από τον άξονα k , χρησιμοποιώντας ένα μετασχηματισμό ομοιότητας, ως

$$R_{k,\theta} = R_1^0 R_{z,\theta} R_1^{0^{-1}} \quad (2.40)$$

$$= R_{z,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\theta} R_{y,-\beta} R_{z,-\alpha} \quad (2.41)$$

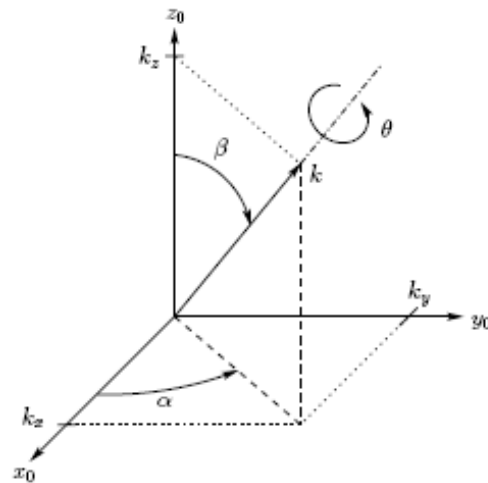


Fig. 2.13 Rotation about an arbitrary axis.

Σχήμα 2.13 Περιστροφή γύρω από έναν τυχαίο άξονα

Από το σχήμα 2.13 βλέπουμε ότι

$$\sin \alpha = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (2.42)$$

$$\cos \alpha = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (2.43)$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k_z} \quad (2.44)$$

$$\cos \beta = \frac{k_z}{k} \quad (2.45)$$

Οι τελευταίες δυο εξισώσεις ακολουθούν το γεγονός ότι το k είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.42)-(2.45) στην εξίσωση (2.41) λαμβάνουμε μετά από μακροσκελείς υπολογισμούς

$$R_{k,\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

όπου $v_\theta = \text{vers} \theta = 1 - c_\theta$.

Στην πράξη, κάθε πίνακας περιστροφής $R \in SO(3)$ μπορεί να αναπαρασταθεί με μια απλή περιστροφή γύρω από έναν κατάλληλο άξονα στο χώρο, κατά μια κατάλληλη γωνία

$$R = R_{k,\theta} \quad (2.47)$$

όπου το k είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που καθορίζει τον άξονα περιστροφής και θ είναι η γωνία περιστροφής γύρω από τον k . Ο πίνακας $R_{k,\theta}$ που δίδεται στην εξίσωση (2.47) καλείται αναπαράσταση άξονα/γωνίας του R . Αν δίδεται ένας τυχαίος πίνακας περιστροφής R με στοιχεία $r_{i,j}$, η ισοδύναμη γωνία θ και ο ισοδύναμος άξονας k δίδονται με τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\text{Tr}(R) - 1}{2} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

όπου Tr δηλώνει το ίχνος του R και

$$k = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να ληφθούν με άμεσο χειρισμό των εισόδων του πίνακα που δίνεται στην εξίσωση (2.46). Η αναπαράσταση άξονα/γωνίας δεν είναι μοναδική από τη στιγμή που μια περιστροφή κατά $-\theta$ γύρω από τον $-k$ είναι η ίδια όπως μια περιστροφή κατά θ γύρω από τον k , δηλαδή

$$R_{k,\theta} = R_{-k,-\theta} \quad (2.50)$$

Αν $\theta = 0$ τότε ο R είναι ο ταυτόσημος πίνακας και ο άξονας περιστροφής δεν καθορίζεται.

Παράδειγμα 2.9

Έστω ότι ο R παράγεται από μια περιστροφή κατά 90° γύρω από τον z_0 ακολουθούμενη από μια περιστροφή κατά 30° γύρω από τον y_0 ακολουθούμενη από μια περιστροφή κατά 60° γύρω από τον x_0 . Τότε

$$\begin{aligned} R &= R_{x,60} R_{y,30} R_{z,90} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Βλέπουμε ότι $\text{Tr}(\mathbf{R}) = 0$ και άρα η ισοδύναμη γωνιά δίδεται από την εξίσωση (2.48) ως

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ \quad (2.52)$$

Ο ισοδύναμος άξονας δίδεται από την εξίσωση (2.49) ως

$$\mathbf{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right)^T \quad (2.53)$$

Η παραπάνω αναπαράσταση άξονα/γωνίας χαρακτηρίζει μια δεδομένη περιστροφή με τέσσερις ποσότητες, που είναι τα τρία στοιχεία του ισοδύναμου άξονα $\mathbf{k}$ και η ισοδύναμη γωνία θ . Ωστόσο, από τη στιγμή που ο ισοδύναμος άξονας $\mathbf{k}$ δίδεται ως ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε μόνο δυο από τα στοιχεία του είναι ανεξάρτητα. Το τρίτο υπόκειται στον περιορισμό ότι το $\mathbf{k}$ είναι μοναδιαίου μήκους. Για αυτό μόνο τρεις ανεξάρτητες ποσότητες είναι αρκετές για αυτήν την αναπαράσταση της περιστροφής $\mathbf{R}$. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το ισοδύναμο άξονα/γωνίας με ένα διάνυσμα $\mathbf{r}$ ως

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T = (\theta k_x, \theta k_y, \theta k_z)^T \quad (2.54)$$

Από τη στιγμή που το $\mathbf{k}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε το μήκος του διανύσματος $\mathbf{r}$ είναι η ισοδύναμη γωνία θ και η κατεύθυνση του $\mathbf{r}$ είναι ο ισοδύναμος άξονας $\mathbf{k}$.

2.6 ΑΚΑΜΠΤΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

Έχουμε δει πως γίνεται η αναπαράσταση για τις θέσεις και τους προσανατολισμούς. Συνδυάζοντας αυτές τις δυο ιδέες, σε αυτήν την ενότητα, θα γίνει ο καθορισμός της άκαμπτης κίνησης και στην επόμενη ενότητα θα γίνει η κατάλληλη αναπαράσταση πίνακα για άκαμπτες κινήσεις, χρησιμοποιώντας την έννοια του ομογενούς μετασχηματισμού.

Μια άκαμπτη κίνηση είναι μια καθαρή περιστροφή μαζί με μια καθαρή μετατόπιση. Έστω ότι ένα πλαίσιο $\mathcal{O}_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$ λαμβάνεται από το πλαίσιο $\mathcal{O}_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0$, εφαρμόζοντας πρώτα μια περιστροφή κατά $\mathbf{R}_1^0$, που

ακολουθείται από μια μετατόπιση (σε σχέση με το o_0, x_0, y_0, z_0) κατά d_1^0 , οπότε οι συντεταγμένες p^0 δίδονται από

$$p^0 = R_1^0 p^1 + d_1^0 \quad (2.55)$$

Ορισμός 2.1 Άκαμπτη κίνηση καλείται ένα διατεταγμένο ζεύγος (d, R) όπου $d \in \mathbb{R}^3$ και $R \in SO(3)$. Το σύνολο όλων των άκαμπτων κινήσεων είναι γνωστό ως Ειδικό Ευκλείδειο Σύνολο και συμβολίζεται με $SE(3)$. Οπότε είναι $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

Ο ορισμός της άκαμπτης κίνησης κάποιες φορές διευρύνεται για να συμπεριλάβει τις ανακλάσεις που αντιστοιχούν στην $\det R = -1$. Σε αυτό το κείμενο πάντα υποθέτουμε ότι $\det R = +1$, δηλαδή $R \in SO(3)$.

Δε μπορούμε απλά να προσθέσουμε τα διανύσματα p^0 και p^1 , επειδή ορίζονται σε σχέση με πλαίσια με διαφορετικούς προσανατολισμούς, δηλαδή με πλαίσια που δεν είναι παράλληλα. Ωστόσο μπορούμε να προσθέσουμε τα διανύσματα p^1 και $R_1^0 p^1$, επειδή ο πίνακας R_1^0 πολλαπλασιαζόμενος με p^1 , εκφράζει το p^1 σε ένα πλαίσιο που είναι παράλληλο προς το o_0, x_0, y_0, z_0 . Δεν είναι σημαντικό με ποια σειρά θα πραγματοποιηθούν η περιστροφή και η μετατόπιση.

Αν έχουμε δυο άκαμπτες κινήσεις

$$p^0 = R_1^0 p^1 + d_1^0 \quad (2.56)$$

και

$$p^1 = R_2^1 p^2 + d_2^1 \quad (2.57)$$

τότε η σύνθεσή τους ορίζει μια τρίτη άκαμπτη κίνηση, που μπορεί να περιγραφεί με την αντικατάσταση της έκφρασης για p^1 από την εξίσωση (2.57) στην εξίσωση (2.56)

$$p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 + R_1^0 d_2^1 + d_1^0 \quad (2.58)$$

Από τη στιγμή που η σχέση μεταξύ των p^0 και p^2 είναι επίσης μια άκαμπτη κίνηση μπορεί ισοδύναμα να περιγραφεί ως

$$p^0 = R_2^0 p^2 + d_2^0 \quad (2.59)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2.58) και (2.59) έχουμε

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1 \quad (2.60)$$

$$d_2^0 = d_1^0 + R_1^0 d_2^1 \quad (2.61)$$

Η εξίσωση (2.60) μας δείχνει ότι οι μετασχηματισμοί των προσανατολισμών μπορούν απλά να πολλαπλασιάσουν μεταξύ τους και η εξίσωση (2.61) δείχνει ότι το διάνυσμα από την αρχή O_0 στην αρχή O_2 έχει συντεταγμένες που δίδονται από το άθροισμα των d_1^0 (το διάνυσμα από O_0 το στο O_1 εκφράζεται σε σχέση με το $O_0 X_0 Y_0 Z_0$) και $R_1^0 d_2^1$ (το διάνυσμα από O_1 το στο O_2 εκφράζεται στον προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων $O_0 X_0 Y_0 Z_0$).

2.7 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Η εξίσωση (2.58) αρχίζει και γίνεται δύσχρηστη όσο ο αριθμός των άκαμπτων κινήσεων αυξάνει. Σε αυτήν την ενότητα θα δειχθεί πως οι άκαμπτες κινήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν με τη μορφή πίνακα, ώστε η σύνθεση των άκαμπτων κινήσεων να περιγράφεται με πολλαπλασιασμό πινάκων όπως στην περίπτωση της σύνθεσης των περιστροφών.

Η σύγκριση των εξισώσεων (2.60) και (2.61) με την ταυτότητα πίνακα

$$\begin{bmatrix} R_1^0 & d_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2^1 & d_2^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 R_2^1 & R_1^0 d_2^1 + d_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

όπου το 0 δηλώνει το διάνυσμα γραμμής (0,0,0), δείχνει ότι οι άκαμπτες κινήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα σύνολο πινάκων της μορφής

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; R \in SO(3), d \in \mathbb{R}^3 \quad (2.63)$$

Οι πίνακες της μορφής που δίδονται από την εξίσωση (2.63) καλούνται ομογενείς μετασχηματισμοί. Ένας ομογενής μετασχηματισμός είναι η αναπαράσταση πίνακα μιας άκαμπτης κίνησης και θα χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά το $SE(3)$ για την αναπαράσταση του συνόλου των άκαμπτων κινήσεων και του συνόλου των 4×4 πινάκων H , από την εξίσωση (2.63).

Ξέροντας ότι ο R είναι ορθογώνιος είναι εύκολο να δειχθεί πως ο αντίστροφος μετασχηματισμός H^{-1} δίδεται από

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Για την αναπαράσταση του μετασχηματισμού που δίδεται στην εξίσωση (2.55) με τον πολλαπλασιασμό πινάκων, πρέπει να προσαυξήσουμε τα διανύσματα p^0 και p^1 με την προσθήκη του 1 σαν τέταρτο στοιχείο όπως παρακάτω

$$P^0 = \begin{bmatrix} p^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$P^1 = \begin{bmatrix} p^1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Τα διανύσματα P^0 και P^1 είναι γνωστά ως ομογενείς αναπαραστάσεις των διανυσμάτων p^0 και p^1 αντίστοιχα. Έτσι εξάγεται άμεσα ότι ο μετασχηματισμός που δίδεται στην εξίσωση (2.55) είναι ισοδύναμος με την (ομογενή) εξίσωση πίνακα

$$P^0 = H_1^0 P^1 \quad (2.67)$$

Ένα σύνολο βασικών ομογενών μετασχηματισμών που παράγει το $SE(3)$ δίδεται από

$$\text{Trans}_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Rot}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\text{Trans}_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Rot}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\text{Trans}_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Rot}_{x,\gamma} = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

για τη μετατόπιση και περιστροφή γύρω από τους άξονες x, y, z αντίστοιχα.

Ο γενικότερος ομογενής μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί ως

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & d_x \\ n_y & s_y & a_y & d_y \\ n_z & s_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Στην παραπάνω εξίσωση $n = (n_x, n_y, n_z)^T$ είναι ένα διάνυσμα που αναπαριστά την κατεύθυνση του x_1 στο σύστημα $o_0 x_0 y_0 z_0$, $s = (s_x, s_y, s_z)^T$ αναπαριστά την κατεύθυνση του y_1 και $a = (a_x, a_y, a_z)^T$ αναπαριστά την κατεύθυνση του z_1 . Το διάνυσμα $d = (d_x, d_y, d_z)^T$ αναπαριστά το διάνυσμα από την αρχή o_0 στην αρχή o_1 , που εκφράζεται στο πλαίσιο $o_0 x_0 y_0 z_0$. Η λογική της επιλογής των γραμμάτων n, s, a εξηγείται στο κεφάλαιο 3.

Κανόνας της Σύνθεσης για Ομογενείς Μετασχηματισμούς

Η ίδια ερμηνεία όσον αφορά τη σύνθεση και διάταξη των μετασχηματισμών ισχύει για τους 4×4 ομογενείς μετασχηματισμούς όπως και για τις 3×3 περιστροφές. Αν δίνεται ένας ομογενής μετασχηματισμός H_1^0 που να συσχετίζει δυο πλαίσια, αν μια δεύτερη άκαμπτη κίνηση αναπαρίσταται με $H \in SE(3)$ και πραγματοποιείται σε σχέση με το τρέχον πλαίσιο, τότε είναι

$$H_2^0 = H_1^0 H$$

ενώ αν μια δεύτερη άκαμπτη κίνηση πραγματοποιείται σε σχέση με το ακίνητο πλαίσιο, τότε είναι

$$H_2^0 = H H_1^0$$

Παράδειγμα 2.10

Ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού H που αναπαριστά μια περιστροφή κατά γωνία α γύρω από τον τρέχοντα άξονα x και ακολουθείται

από μια μετατόπιση κατά b μονάδες κατά μήκος του τρέχοντα άξονα x και ακολουθείται από μια μετατόπιση κατά d μονάδες κατά μήκος του τρέχοντα άξονα z και ακολουθείται από μια περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον τρέχοντα άξονα z , δίδεται από

$$H = Rot_{x,\alpha} Trans_{x,b} Trans_{z,d} Rot_{z,\theta}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & b \\ c_\alpha s_\theta & c_\alpha c_\theta & -s_\alpha & -ds_\alpha \\ s_\alpha s_\theta & s_\alpha c_\theta & c_\alpha & dc_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο ομογενής μετασχηματισμός που δίδεται στην εξίσωση (2.63) είναι μια ειδική περίπτωση ομογενών συντεταγμένων, που χρησιμοποιείται ευρέως στο πεδίο των γραφικών με τη χρήση υπολογιστών. Η πιο γενική μορφή αναπαράστασης ομογενούς μετασχηματισμού είναι

$$H = \left[\begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} & d_{3 \times 1} \\ \hline f_{1 \times 3} & s_{1 \times 1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Rotation} & \text{Translation} \\ \hline \text{perspective} & \text{scale factor} \end{array} \right] \quad (2.72)$$

Για τους δικούς μας σκοπούς, το τελευταίο διάνυσμα γραμμής του H θα λαμβάνεται $(0, 0, 0, 1)$, αν και στη γενική μορφή της εξίσωσης (2.72) μπορεί να είναι πιο χρήσιμο, για παράδειγμα στην αλληλεπίδραση ενός συστήματος ηλεκτρονικής όρασης με το συνολικό ρομποτικό σύστημα ή στην προσομοίωση γραφικών.

2.8 ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο είδαμε πως οι πίνακες στο $SE(n)$, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση της σχετικής θέσης και προσανατολισμού δυο πλαισίων συντεταγμένων για $n = 2,3$. Συμβολικά ο εκθέτης στις εκφράσεις δηλώνει το πλαίσιο αναφοράς. Έτσι, ο συμβολισμός p^0 αναπαριστά τις συντεταγμένες του σημείου p σε σχέση με το πλαίσιο 0 .

Ο σχετικός προσανατολισμός των δυο πλαισίων συντεταγμένων μπορεί να ορισθεί με έναν πίνακα περιστροφής $R \in SO(n)$, με $n = 2,3$. Στις δυο

διαστάσεις ο προσανατολισμός του πλαισίου 1 σε σχέση με το πλαίσιο 0 δίδεται από

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των δυο πλαισίων συντεταγμένων. Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων, ο πίνακας περιστροφής δίδεται από

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

Σε κάθε περίπτωση, οι στήλες του πίνακα περιστροφής λαμβάνονται από την προβολή ενός άξονα του πλαισίου στόχου (σε αυτήν την περίπτωση το πλαίσιο 1), στους άξονες συντεταγμένων του πλαισίου αναφοράς (σε αυτήν την περίπτωση το πλαίσιο 0).

Το σύνολο των $n \times n$ πινάκων περιστροφής είναι γνωστό σαν ειδικό σύνολο ορθογωνίων πινάκων και συμβολίζεται με $SO(n)$. Μια σημαντική ιδιότητα αυτών των πινάκων είναι ότι $R^{-1} = R^T$ για κάθε $R \in SO(n)$.

Οι πίνακες περιστροφής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μετασχηματισμούς συντεταγμένων ανάμεσα σε πλαίσια που διαφέρουν μόνο στον προσανατολισμό. Έχουμε κανόνες για τη σύνθεση των περιστροφικών μετασχηματισμών όπως

$$R_2^0 = R_1^0 R$$

για την περίπτωση όπου ο δεύτερος μετασχηματισμός R πραγματοποιείται σε σχέση με το τρέχον πλαίσιο και

$$R_2^0 = R R_1^0$$

για την περίπτωση όπου ο δεύτερος μετασχηματισμός R πραγματοποιείται σε σχέση με το ακίνητο πλαίσιο.

Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων ο πίνακας περιστροφής μπορεί να παραμετροποιηθεί με τη χρήση τριών γωνιών. Μια συνήθης μέθοδος είναι

η χρήση των γωνιών Euler (ϕ, θ, ψ) που αντιστοιχούν σε διαδοχικές περιστροφές γύρω από τους άξονες z , y και z . Ο αντίστοιχος πίνακας περιστροφής δίδεται από

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_{z, \phi} R_{y, \theta} R_{z, \psi}$$

Οι γωνίες roll, pitch, yaw είναι παρόμοιες εκτός από το γεγονός ότι οι διαδοχικές περιστροφές πραγματοποιούνται σε σχέση με το ακίνητο, παγκόσμιο πλαίσιο αντί να γίνονται σε σχέση με το τρέχον πλαίσιο.

Οι ομογενείς μετασχηματισμοί συνδυάζουν περιστροφή και μετακίνηση. Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων, ο ομογενής μετασχηματισμός έχει τη μορφή

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; R \in SO(3), d \in \mathbb{R}^3$$

Το σύνολο όλων αυτών των πινάκων αποτελεί το σύνολο $SE(3)$. Αυτοί οι πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πραγματοποίηση μετασχηματισμών συντεταγμένων ανάλογων των περιστροφικών μετασχηματισμών, με τη χρήση πινάκων περιστροφής.