

# Παραρτήματα

- ❖ Παράρτημα 1<sup>ο</sup>: Μιγαδικοί Αριθμοί
- ❖ Παράρτημα 2<sup>ο</sup>: Μετασχηματισμός Laplace.
- ❖ Παράρτημα 3<sup>ο</sup>: Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.
- ❖ Παράρτημα 4<sup>ο</sup>: Μετασχηματισμοί δομικών διαγραμμάτων.
- ❖ Παράρτημα 5<sup>ο</sup>: Τυποποιημένα σήματα εισόδου.
- ❖ Παράρτημα 6<sup>ο</sup>: Χρονική απόκριση συστημάτων 1ης τάξης.
- ❖ Παράρτημα 7<sup>ο</sup>: Χρονική απόκριση συστημάτων 2ης τάξης.
- ❖ Παράρτημα 8<sup>ο</sup>: Προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης.
- ❖ Παράρτημα 9<sup>ο</sup>: Αρμονική απόκριση συστημάτων 1ης και 2ης τάξης.
- ❖ Παράρτημα 10<sup>ο</sup>: Διάγραμμα BODE βασικών παραγόντων.
- ❖ Παράρτημα 11<sup>ο</sup>: Περιθώριο ενίσχυσης και φάσης.
- ❖ Παράρτημα 12<sup>ο</sup>: Γεωμετρικός Τόπος Ριζών(Γ.Τ.Ρ.)
- ❖ Παράρτημα 13ο: Κριτήριο ROUTH.

**Παραρτήματα**

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Παράρτημα 1ο: Μιγαδικοί αριθμοί</b>                                    | <b>3</b>  |
| <i>1.1 Μιγαδικοί αριθμοί</i>                                              | <i>3</i>  |
| <i>1.2 Καρτεσιανή, Εκθετική και Πολική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών</i> | <i>4</i>  |
| <i>1.3 Αριθμητικές πράξεις μιγαδικών αριθμών</i>                          | <i>5</i>  |
| <i>1.4 Συγκεντρωτικός πίνακας τύπων για τους μιγαδικούς</i>               | <i>6</i>  |
| <b>Παράρτημα 2ο : Μετασχηματισμός Laplace</b>                             | <b>7</b>  |
| <i>2.1 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace</i>                          | <i>7</i>  |
| <i>2.2 Μετασχηματισμοί Laplace βασικών συναρτήσεων</i>                    | <i>8</i>  |
| <b>Παράρτημα 3ο : Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace</b>                 | <b>12</b> |
| <i>3.1 Περίπτωση διακεκριμένων πόλων</i>                                  | <i>12</i> |
| <i>3.2 Περίπτωση πολλαπλών πόλων</i>                                      | <i>12</i> |
| <b>Παράρτημα 4ο: Μετασχηματισμοί δομικών διαγραμμάτων</b>                 | <b>13</b> |
| <b>Παράρτημα 5ο: Τυποποιημένα σήματα εισόδου</b>                          | <b>14</b> |
| <b>Παράρτημα 6ο: Χρονική απόκριση συστημάτων 1ης τάξης</b>                | <b>15</b> |
| <b>Παράρτημα 7ο: Χρονική απόκριση συστημάτων 2ης τάξης</b>                | <b>16</b> |
| <b>Παράρτημα 8ο: Προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης</b>                   | <b>17</b> |
| <b>Παράρτημα 9ο: Αρμονική απόκριση συστημάτων 1ης &amp; 2ης τάξης</b>     | <b>19</b> |
| <b>Παράρτημα 10ο: Διάγραμμα BODE βασικών παραγόντων</b>                   | <b>21</b> |
| <b>Παράρτημα 11ο: Περιθώριο ενίσχυσης και φάσης</b>                       | <b>25</b> |
| <b>Παράρτημα 12ο: Γεωμετρικός Τόπος Ριζών(Γ.Τ.Ρ.)</b>                     | <b>26</b> |
| <i>12.1 Κανόνες προσεγγιστικής χάραξης του Γ.Τ.Ρ</i>                      | <i>27</i> |
| <b>Παράρτημα 13ο: Κριτήριο ROUTH</b>                                      | <b>28</b> |
| <i>13.1 Ειδικές περιπτώσεις για την συμπλήρωση του πίνακα</i>             | <i>29</i> |

## Παράρτημα 1<sup>ο</sup>: Μιγαδικοί αριθμοί

### 1.1 Μιγαδικοί αριθμοί.

Είναι γνωστό ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (1)$$

έχει λύση στο πεδίο των πραγματικών αριθμών, εάν η διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \text{ είναι } \geq 0 \quad (2)$$

Στην περίπτωση αυτή η τιμές των ριζών προκύπτουν από τη σχέση

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad (3)$$

Εάν  $\Delta < 0$  η (3) δεν έχει έννοια στο πεδίο των πραγματικών αριθμών, διότι ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός αρνητικού αριθμού είναι πράξη αδύνατη π.χ. Έστω ότι έχουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3) θα έχουμε:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\sqrt{-1} \quad (5)$$

Άρα θα έχουμε δύο ρίζες  $x_1 = 2 + 3\sqrt{-1}$  ... και ...  $x_2 = 2 - 3\sqrt{-1}$ , που δεν μπορούν να ονομαστούν "αριθμοί" διότι εμφανίζεται η πράξη  $\sqrt{-1}$ , που όπως είπαμε ποιο πάνω είναι πράξη αδύνατη στο πεδίο των πραγματικών αριθμών. Η παραπάνω εκφράσεις που περιλαμβάνουν τους πραγματικούς αριθμούς 2, 3 και την  $\sqrt{-1}$ , είναι η πιο απλή περίπτωση αδύνατης πράξης στο πεδίο των πραγματικών αριθμών. Τέτοιες εκφράσεις λοιπόν δεν μπορούν να ονομάζονται "αριθμοί", και θα τους ονομάζουμε "μιγαδικούς αριθμούς".

Για διευκόλυνση ορίζουμε:

$$j = \sqrt{-1} \quad (6)$$

Στο σύμβολο " j " δίνουμε το όνομα της **φανταστικής μονάδας** και με βάση την (6) θα έχουμε:

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$j^3 = j^2 \cdot j = (-1) \cdot j = -j$$

$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$j^5 = j^4 \cdot j = (1) \cdot (j) = j$$

$$j^6 = j^3 \cdot j^3 = (-j) \cdot (-j) = -1$$

Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις του  $j$  περιοδικά παίρνουν τις ίδιες τέσσερις τιμές:  $j$ ,  $-1$ ,  $-j$ ,  $+1$ .., έτσι αν έχουμε το  $j$  υψωμένο σε οποιαδήποτε δύναμη, μπορούμε να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα, αρκεί να διαιρέσουμε τον εκθέτη του  $j$  με το 4 και το υπόλοιπο που θα προκύψει να το θεωρήσω εκθέτη του  $j$ . Έτσι αν το υπόλοιπο  $Y$  είναι:

$$Y = 0 \rightarrow j^0 = 1, \dots Y = 1 \rightarrow j^1 = j, \dots Y = 2 \rightarrow j^2 = -1, \dots Y = 3 \rightarrow j^3 = -j.$$

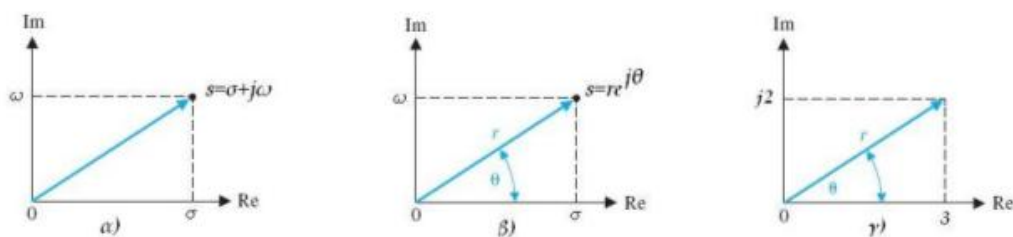
π.χ. έστω ότι θέλω να υπολογίσω τη τιμή του  $j^{18}$ . Το 18 διαιρούμενο με το 4 δίνει  $Y=2$  και άρα ακολουθώντας την διαδικασία που αναφέραμε προηγουμένως θα έχουμε:  $j^{18} = j^2 = -1$ . Ένας **φανταστικός αριθμός** ορίζεται σαν γινόμενο της φανταστικής μονάδας  $j$  με έναν πραγματικό αριθμό. Για το λόγο αυτό μπορούμε να γράψουμε έναν φανταστικό αριθμό σαν  $j\omega$  όπου  $\omega$  είναι ένας πραγματικός αριθμός. Ένας **μιγαδικός αριθμός** είναι το άθροισμα ενός πραγματικού αριθμού και ενός φανταστικού αριθμού όπως φαίνεται στην επόμενη σχέση.

$$s = \sigma + j\omega \quad (7)$$

Όπου  $\sigma$  και  $\omega$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Το  $\sigma$  είναι το πραγματικό μέρος και το  $\omega$  το φανταστικό και χρησιμοποιούμε τη διατύπωση.  $\text{Re}\{s\} = \sigma$  και  $\text{Im}\{s\} = \omega$

## 1.2 Καρτεσιανή, Εκθετική και Πολική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών.

Ο μιγαδικός αριθμός  $s = \sigma + j\omega$  μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά στο μιγαδικό επίπεδο, σαν ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες  $(\sigma, j\omega)$ : όπου  $\sigma$  είναι η τιμή πάνω στον οριζόντιο άξονα, που εκφράζει το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού και  $\omega$  η τιμή στον κάθετο άξονα (φανταστικός άξονας), που εκφράζει το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού. Εικόνα 1α.



Εικόνα 1. α) Καρτεσιανή, β) Εκθετική γ) Πολική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης του μιγαδικού αριθμού  $s$  είναι να χρησιμοποιήσουμε την απόσταση από την αρχή των αξόνων και την γωνία  $\theta$ , όπως φαίνεται στην Εικόνα 1β. Η εκθετική μορφή γράφεται:

$$s = re^{j\theta} \quad (8)$$

Όπου

$$r = \sqrt{(\sigma^2 + \omega^2)} \quad (9)$$

Και

$$\theta = \tan^{-1}(\omega/\sigma) \quad (10)$$

$$\text{όπου } \dots \sigma = r \cos \theta \dots \text{ και } \dots \omega = r \sin \theta$$

Το  $r$  ονομάζεται **μέτρο** του  $s$  και ορίζεται σαν,  $|s|$ . Η γωνία  $\theta$  ονομάζεται **όρισμα** και μπορεί να αναπαρασταθεί σαν  $\angle \theta$ . Έτσι μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον μιγαδικό αριθμό σε πολική μορφή ως εξής:

$$s = r \angle \theta \quad (11)$$

Στην Εικόνα 1γ(στο πάνω μέρος της σελίδας) φαίνεται η αναπαράσταση του μιγαδικού  $s = 3 + j2$ .

**Εκθετική μορφή**  $s = 3,6e^{j33,69^\circ}$

**Πολική μορφή**  $s = 3,6 \angle 33,69^\circ$

### 1.3 Αριθμητικές πράξεις μιγαδικών αριθμών.

Ο μιγαδικός αριθμός  $s^* = \sigma - j\omega$  ονομάζεται **συζυγής μιγαδικός** του  $s$  και η πολική του μορφή είναι  $s = r \angle -\theta$ . Έστω ότι έχουμε τους μιγαδικούς  $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$  και  $s_2 = \sigma_2 + j\omega_2$ . Οι πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μεταξύ των δύο αριθμών, δίνουν τα παρακάτω αποτελέσματα.

#### Πρόσθεση:

$$s_1 + s_2 = (\sigma_1 + j\omega_1) + (\sigma_2 + j) = (\sigma_1 + \sigma_2) + j(\omega_1 + \omega_2)$$

#### Πολλαπλασιασμός :

$$s_1 \cdot s_2 = (\sigma_1 + j\omega_1) \cdot (\sigma_2 + j\omega_2) = (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + j\sigma_1\omega_2 + j\sigma_2\omega_1 + j^2(\omega_1 \cdot \omega_2) = (\sigma_1 \cdot \sigma_2 - \omega_1 \cdot \omega_2) + j(\sigma_1\omega_2 + \sigma_2\omega_1)$$

#### Ή

$$s_1 \cdot s_2 = (r_1 \angle \theta_1) \cdot (r_2 \angle \theta_2) = r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

**Διαίρεση**

:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

**1.4 Συγκεντρωτικός πίνακας τύπων για τους μιγαδικούς.**

| a/a | $s = \sigma + j\omega = re^{j\theta} = r\angle\theta = r(\cos\theta + j\sin\theta)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ , Μέτρο μιγάδα                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 2   | $\left. \begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma}, \quad \sigma, \omega > 0 \\ \theta &= -\tan^{-1} \frac{ \omega }{\sigma}, \quad \sigma > 0 \text{ και } \omega < 0 \\ \theta &= 180^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{ \sigma }, \quad \sigma < 0 \text{ και } \omega > 0 \\ \theta &= 180^\circ + \tan^{-1} \frac{ \omega }{ \sigma }, \quad \sigma, \omega < 0 \end{aligned} \right\} \text{όρισμα μιγάδα}$ |
| 3   | $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 4   | $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 5   | $(\sigma_1 + j\omega_1) + (\sigma_2 + j\omega_2) = (\sigma_1 + \sigma_2) + j(\omega_1 + \omega_2)$ , πρόσθεση μιγαδικών                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 6   | $(\sigma_1 + j\omega_1) - (\sigma_2 + j\omega_2) = (\sigma_1 - \sigma_2) + j(\omega_1 - \omega_2)$ , αφαίρεση μιγαδικών                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 7   | $r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ , πολλαπλασιασμός μιγαδικών                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 8   | $\frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$ , διαίρεση μιγαδικών                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

**Παράρτημα 2<sup>ο</sup> : Μετασχηματισμός Laplace.****2.1 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace.**

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$L[f(t)] = F(s)$$

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

| A/A | $f(t)$                                         | $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$                                           |
|-----|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $\alpha f_1(t) \pm \beta f_2(t)$               | $\alpha F_1(s) \pm \beta F_2(s)$                                                   |
| 2   | $\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t)$                | $sF(s) - f(0)$                                                                     |
| 3   | $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = f''(t) = \ddot{f}(t)$ | $s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$                                                         |
| 4   | $\frac{d^n f(t)}{dt^n} = f^{(n)}(t)$           | $s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$                                    |
| 5   | $\int_0^t f(t) dt$                             | $\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$                                           |
| 6   | $\int_0^t \int_0^t f(t) dt$                    | $\frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s}$               |
| 7   | $\int \dots \int f(t) (dt)^n$                  | $\frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \left[ \int \dots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0}$ |
| 8   | $f(t-r) \cdot u(t-r)$                          | $e^{-rs} F(s)$                                                                     |
| 9   | $t^n f(t)$                                     | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$                                                     |
| 10  | $\frac{f(t)}{t}$                               | $\int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma$                                                |
| 11  | $f_1(t) * f_2(t)$                              | $F_1(s) * F_2(s)$                                                                  |

|    |                                    |                                                                    |
|----|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 12 | $f_1(t) \cdot f_2(t)$              | $\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(p) F_2(s-p) dp$ |
| 13 | $e^{-\alpha t} \cdot f(t)$         | $F(s + \alpha)$                                                    |
| 14 | $f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$   | $\alpha F(\alpha s)$                                               |
| 15 | $f(t) \cos \omega t$               | $\frac{1}{2} F(s - j\omega) + \frac{1}{2} F(s + j\omega)$          |
| 16 | $f(\alpha t)$                      | $\frac{F\left(\frac{s}{\alpha}\right)}{\alpha}$                    |
| 17 | $\frac{f(t)}{t^n}$                 | $\int_s^\infty \dots \int_s^\infty F(s) (ds)^n$                    |
| 18 | $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$      | $\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$ , Θεώρημα αρχικής τιμής       |
| 19 | $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ | $\lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$ , Θεώρημα τελικής τιμής            |

## 2.2 Μετασχηματισμοί Laplace βασικών συναρτήσεων.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι μετασχηματισμοί Laplace βασικών συναρτήσεων.

| A/A | $F(s) = LT\{f(t)\}$ | $f(t) = ILT\{F(s)\}$                              |
|-----|---------------------|---------------------------------------------------|
| 1   | 1                   | $\delta(t)$                                       |
| 2   | $\frac{1}{s}$       | $u(t)$                                            |
| 3   | $\frac{1}{s^2}$     | t                                                 |
| 4   | $\frac{1}{s^n}$     | $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$ , n<br>Θετικός αριθμός |

|    |                                         |                                                                                                                                                                  |
|----|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5  | $s$                                     | $\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta^{(1)}(t)$                                                                                                                        |
| 6  | $s^n$                                   | $\delta^{(n)}(t)$ , $n$ Θετικός αριθμός                                                                                                                          |
| 7  | $\frac{1}{\sqrt{s}}$                    | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$                                                                                                                                         |
| 8  | $\frac{1}{s^{n+1/2}}$                   | $\frac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)\pi^{1/2}}$                                                                                                  |
| 9  | $\frac{e^{-\alpha s}}{s}$               | $u(t-\alpha)$                                                                                                                                                    |
| 10 | $\frac{1}{s}(1-e^{-\alpha s})$          | $u(t)-u(t-\alpha)$                                                                                                                                               |
| 11 | $\frac{1}{s+\alpha}$                    | $e^{-\alpha t}$                                                                                                                                                  |
| 12 | $\frac{1}{(s+\alpha)^n}$                | $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot e^{-\alpha t}$ , $n$ Θετικός αριθμός                                                                                             |
| 13 | $\frac{1}{s(s+a)}$                      | $\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$                                                                                                                                 |
| 14 | $\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$        | $1 - \frac{\beta}{\beta-\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{\beta-\alpha} e^{-\beta t}$                                                                        |
| 15 | $\frac{s+\gamma}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$ | $\frac{1}{\alpha\beta} \left( \gamma - \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\beta-\alpha} e^{-\beta t} \right)$ |
| 16 | $\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$         | $\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$                                                                                                              |
| 17 | $\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$         | $\frac{\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t}}{\alpha-\beta}$                                                                                                 |
| 18 | $\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)(s+\beta)}$  | $\frac{(\gamma-\alpha)e^{-\alpha t} - (\gamma-\beta)e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$                                                                                 |

|    |                                                                         |                                                                                                                                                                                                             |
|----|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 19 | $\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$                               | $\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$                                             |
| 20 | $\frac{s+\delta}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$                        | $\frac{(\delta-\alpha)e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{(\delta-\beta)e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)} + \frac{(\delta-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$ |
| 21 | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$                                         | $\sin \omega t$                                                                                                                                                                                             |
| 22 | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$                                              | $\cos \omega t$                                                                                                                                                                                             |
| 23 | $\frac{s+\alpha}{s^2 + \omega^2}$                                       | $\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$                                                                                             |
| 24 | $\frac{s \cdot \sin \alpha + \omega \cdot \cos \alpha}{s^2 + \omega^2}$ | $\sin(\omega t + \alpha)$                                                                                                                                                                                   |
| 25 | $\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$                                           | $\frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2}$                                                                                                                                                                        |
| 26 | $\frac{s+\alpha}{s(s^2 + \omega^2)}$                                    | $\frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega^2} \cos(\omega t + \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$                                                                 |
| 27 | $\frac{1}{(s+\alpha)(s^2 + \omega^2)}$                                  | $\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$                                               |
| 28 | $\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$                                      | $\frac{e^{-\alpha t} \sin \beta t}{\beta}$                                                                                                                                                                  |
| 29 | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$                               | $e^{-\alpha t} \cos \beta t$                                                                                                                                                                                |
| 30 | $\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$                               | $\frac{\sqrt{(\gamma+\alpha)^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma-\alpha}$                                                                   |
| 31 | $\frac{1}{s[(s+\alpha)^2 + \beta^2]}$                                   | $\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{1}{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \varphi), \varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{-\alpha}$                                                 |

|    |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                             |
|----|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 32 | $\frac{s+\gamma}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$                 | $\frac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$<br>$\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\gamma-\alpha} - \tan^{-1} \frac{\beta}{-\alpha}$ |
| 33 | $\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$                                  | $\frac{1}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$                                                                                                                                                                                         |
| 34 | $\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$                                  | $\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$                                                                                                                                                                           |
| 35 | $\frac{s+\beta}{s(s+\alpha)^2}$                            | $\frac{1}{\alpha^2} (\beta - \beta e^{-\alpha t} + \alpha(\alpha - \beta) t e^{-\alpha t})$                                                                                                                                                 |
| 36 | $\frac{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$ | $\frac{\alpha_0}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2 - \alpha_1\alpha + \alpha_0}{\alpha(\alpha - \beta)} e^{-\alpha t} - \frac{\beta^2 - \alpha_1\beta + \alpha_0}{\beta(\alpha - \beta)} e^{-\beta t}$                                          |
| 37 | $\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$                             | $\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$                                                                                                                                                                              |
| 38 | $\frac{1}{(s^2 - \omega^2)}$                               | $\frac{1}{\omega} \sinh \omega t$                                                                                                                                                                                                           |
| 39 | $\frac{1}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$                          | $\frac{1}{(\beta-\alpha)^2} [(\beta-\alpha)t - 1] e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}$                                                                                                                                                             |
| 40 | $\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$                            | $\frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$                                                                                                                                                                                             |
| 41 | $\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$                             | $\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$                                                                                                                                                                                                           |
| 42 | $\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$                           | $\frac{1}{2\omega} (\omega t \cos \omega t + \sin \omega t)$                                                                                                                                                                                |
| 43 | $\frac{s^n}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}}$                       | $\frac{t^n \sin \omega t}{n! 2^n \omega}$                                                                                                                                                                                                   |
| 44 | $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$                | $t \cos \omega t$                                                                                                                                                                                                                           |

**Παράρτημα 3<sup>ο</sup> : Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.**

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι η διαδικασία υπολογισμού της συναρτήσεως  $f(t)$  όταν γνωρίζουμε την συνάρτηση  $F(s)$ .

**3.1 Περίπτωση διακεκριμένων πόλων .**

Έστω η συνάρτηση

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad m < n$$

Γράφουμε τη συνάρτηση στην παρακάτω μορφή αφού υπολογίσουμε τις ρίζες του παρονομαστή που ονομάζονται και πόλοι της συνάρτησης.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n}$$

$$k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} F(s) \cdot (s+p_i)$$

Υπολογίζουμε τις τιμές των συντελεστών  $k_i$  από τη σχέση

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace και το μετασχηματισμό Laplace των βασικών συναρτήσεων γίνεται:

$$f(t) = k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \dots + k_n e^{-p_n t}$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n \text{ και } z_1, z_2, \dots, z_m$$

είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί.

**3.2 Περίπτωση πολλαπλών πόλων.**

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad m < n$$

Εάν η συνάρτηση έχει πολλαπλές ρίζες (πόλους), τότε οι συντελεστές  $k_{ij}$  που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ρίζα υπολογίζονται ως εξής :

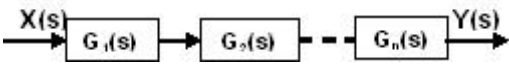
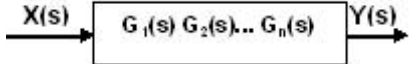
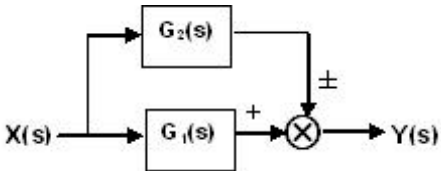
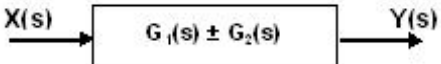
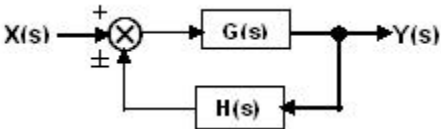
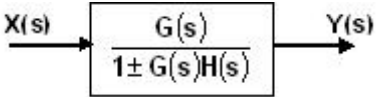
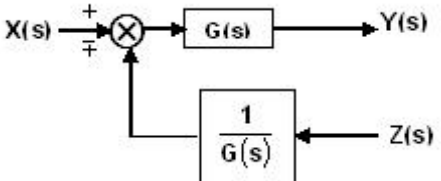
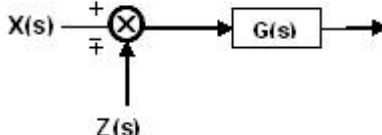
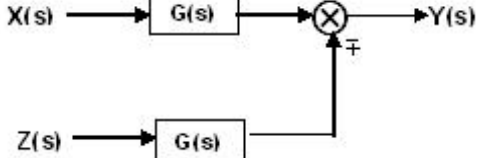
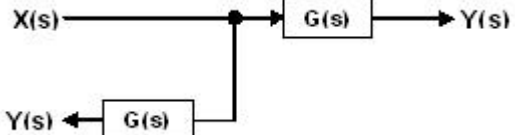
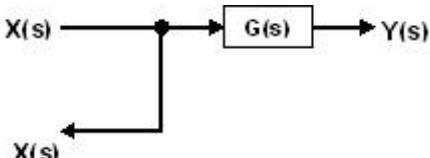
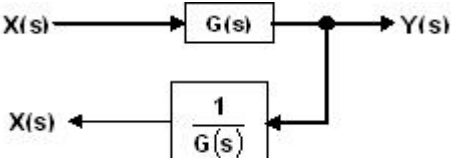
$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = \frac{k_{11}}{s+p_1} + \frac{k_{12}}{(s+p_1)^2} + \dots + \frac{k_{1r}}{(s+p_1)^r} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n}$$

$$k_{ij} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{s \rightarrow -p_i} \left[ \frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}} (F(s) \cdot (s+p_i)^r) \right]$$

- ❖ όπου  $i$ , εκφράζει την ρίζα (απλή ή πολλαπλή) της οποίας τον συντελεστή υπολογίζουμε.
- ❖ όπου  $j$ , εκφράζει την θέση του συντελεστή  $k$  της πολλαπλής ρίζας με τιμές από 1 μέχρι  $r$ .
- ❖ όπου  $r$ , ο αριθμός που εκφράζει την πολλαπλότητα της ρίζας.

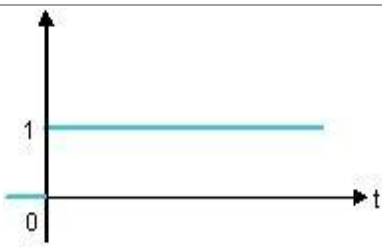
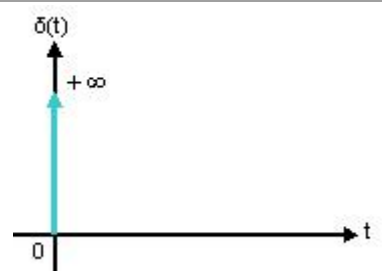
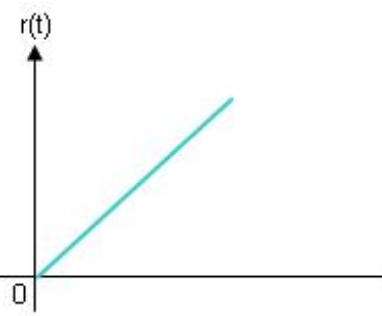
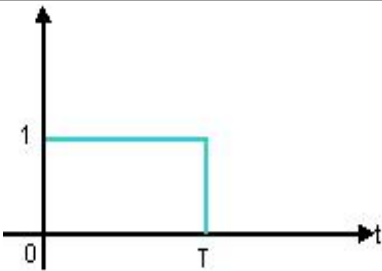
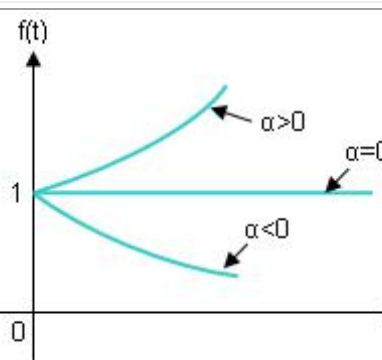
## Παράρτημα 4<sup>ο</sup>: Μετασχηματισμοί δομικών διαγραμμάτων.

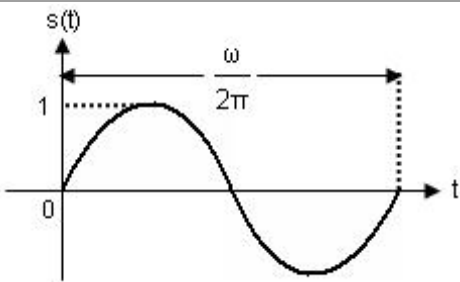
Οι μετασχηματισμοί των δομικών διαγραμμάτων παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί.

| a/a | ΑΡΧΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ                                                                    | ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ                                                                  |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   |    |    |
| 2   |    |    |
| 3   |    |    |
| 4   |  |  |
| 5   |  |  |
| 6   |  |  |
| 7   |  |  |

## Παράρτημα 5<sup>ο</sup>: Τυποποιημένα σήματα εισόδου.

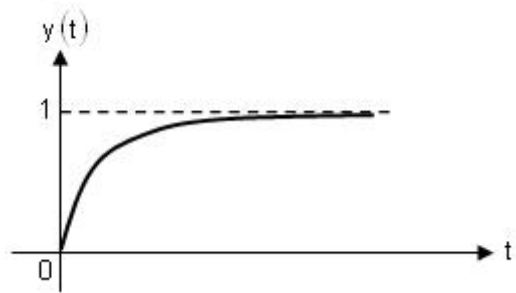
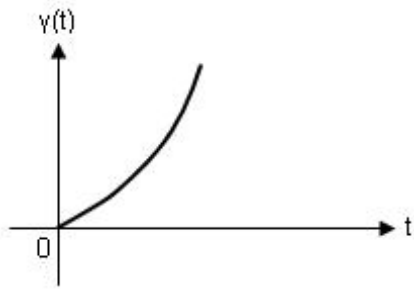
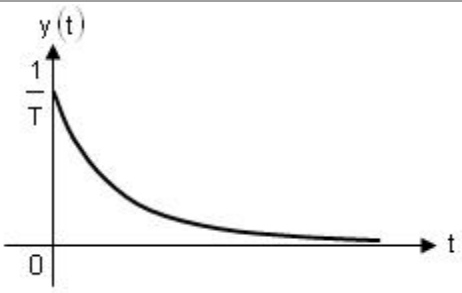
Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα τυποποιημένα σήματα εισόδου.

| A / A | ΟΝΟΜΑΣΙΑ                                          | ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ                                                                   | ΕΞΙΣΩΣΗ                                                                                                                                         | ΜΕΤΑΣΧΗΜ.<br>LAPLACE                       |
|-------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1     | ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ<br>ΒΗΜΑΤΙΚΗ<br>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ<br>$u(t)$      |    | $u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, t = 0 \end{cases}$                                                          | $U(s) = \frac{1}{s}$                       |
| 2     | ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ<br>ΒΗΜΑΤΙΚΗ<br>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ<br>$\delta(t)$ |    | $\delta(t) = \begin{cases} 0, \forall t \text{ πλην } t = 0 \\ \infty, t = 0 \end{cases}$                                                       | $D(s) = 1$                                 |
| 3     | ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ<br>ΑΝΑΡΡΙΧΗΤΙΚΗ<br>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ<br>$r(t)$  |   | $r(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$                                                                                      | $R(s) = \frac{1}{s^2}$                     |
| 4     | ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ<br>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ<br>ΠΥΛΗΣ<br>$g(t)$         |  | $g(t) = \begin{cases} 1, t \in (0, T) \\ 0, t \notin (0, T) \\ \text{απροσδιόριστη}, t = 0, t = T \end{cases}$<br>ή<br>$g(t) = u(t) - u(t - T)$ | $G(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} e^{-Ts}$ |
| 5     | ΕΚΘΕΤΙΚΗ<br>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ<br>$f(t)$                   |  | $f(t) = e^{\alpha t}$                                                                                                                           | $F(s) = \frac{1}{s - \alpha}$              |

|   |                                     |                                                                                   |                        |                                        |
|---|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------------------|
| 6 | ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ<br>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ<br>$f(t)$ |  | $f(t) = \sin \omega t$ | $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
|---|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------------------|

## Παράρτημα 6<sup>ο</sup>: Χρονική απόκριση συστημάτων 1<sup>ης</sup> τάξης.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η χρονική απόκριση συστημάτων πρώτης τάξης.

| A/A | ΕΙΔΟΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ                           | ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ                                                                                                   |
|-----|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΒΑΘΜΙΔΑ<br>$x(t) = u(t) = 1$    | $y(t) = 1 - e^{-t/T}$           |
| 2   | ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΑΝΑΡΡΙΧΗΣΗ<br>$x(t) = r(t) = t$ | $y(t) = t - T + T e^{-t/T}$    |
| 3   | ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΚΡΟΥΣΗ<br>$x(t) = \delta(t)$    | $y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$  |

## Παράρτημα 7<sup>ο</sup>: Χρονική απόκριση συστημάτων 2<sup>ης</sup> τάξης.

Η χρονική απόκριση των συστημάτων δεύτερης τάξης παρουσιάζεται στον πίνακα που ακολουθεί.

| ΤΥΠΟΣ ΕΙΣΟΔΟΥ<br>$x(t)$                                          | ΣΤΑΘΕΡΑ<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ<br>$\zeta$         | ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ $y(t)$                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ<br/>ΒΗΜΑΤΙΚΗ<br/>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ</b><br>$x(t)=u(t)=1$     | $0 < \zeta < 1$<br>ΥΠΟ-<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ     | $y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$                                                                                                                                                |
|                                                                  | $\zeta = 1$<br>ΚΡΙΣΙΜΗ<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ      | $y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$                                                                                                                                                                                                                                                     |
|                                                                  | $\zeta > 1$<br>ΥΠΕΡ -<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ       | $y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \cosh\left(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t\right) + \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh\left(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t\right) \right]$                                                                                                                   |
|                                                                  | $\zeta = 0$<br>ΜΗΔΕΝΙΚΗ<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ     | $y(t) = 1 - \cos\omega_n t$                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ<br/>ΑΝΑΡΡΙΧΗΤΙΚΗ<br/>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ</b><br>$x(t)=r(t)=t$ | $0 \leq \zeta < 1$<br>ΥΠΟ -<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ | $y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + 2\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$                                                                                                            |
|                                                                  | $\zeta = 1$<br>ΚΡΙΣΙΜΗ<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ      | $y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n} e^{-\omega_n t} \left(1 + \frac{\omega_n t}{2}\right)$                                                                                                                                                                                   |
|                                                                  | $\zeta > 1$<br>ΥΠΕΡ -<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ       | $y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} +$<br>$+ \frac{2\zeta^2 - 1 + 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$ |
| <b>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ<br/>ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ<br/>ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ</b><br>$x(t)=\delta(t)$ | $0 < \zeta < 1$<br>ΥΠΟ -<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ    | $y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$                                                                                                                                                                                             |
|                                                                  | $\zeta = 1$<br>ΚΡΙΣΙΜΗ<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ      | $y(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$                                                                                                                                                                                                                                                             |
|                                                                  | $\zeta > 1$<br>ΥΠΕΡ -<br>ΑΠΟΣΒΕΣΗ       | $y(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$                                                                                                                      |

**Παράρτημα 8<sup>ο</sup>: Προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης.**

| A/A | ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ - ΤΥΠΟΣ - ΟΝΟΜΑΣΙΑ                                                                                                                                                                           |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \left( -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$ : Χρόνος ανύψωσης                                                                                   |
| 2   | $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$ : Χρόνος κορυφής                                                                                                                                           |
| 3   | $\left. \begin{array}{l} t_s = \frac{\pi}{\zeta \omega_n} \gamma_{1\alpha}(\pm 2\%) \\ \text{ή} \\ t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} \gamma_{1\alpha}(\pm 5\%) \end{array} \right\}$ : Χρόνος αποκατάστασης |
| 4   | $\left. \begin{array}{l} M_p = \frac{y_m - y_f}{y_f} \cdot 100\% \\ \text{ή} \\ M_p \% = 100e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{array} \right\}$ : Ποσοστό υπερύψωσης                           |
| 5   | $y_m = 1 - e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ : Μέγιστη τιμή της απόκρισης                                                                                                                         |
| 6   | $\zeta = \frac{ \ln(M_p - 1) }{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p - 1)}}$ : Σχέση μεταξύ $\zeta$ και $M_p$                                                                                                          |
| 7   | $\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\zeta^2}}$ : Σχέση μεταξύ $\omega_n$ και $t_p$                                                                                                                        |
| 8   | $\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{\frac{\pi^2 - 2\ln^2(M_p - 1)}{\pi^2 - \ln^2(M_p - 1)}}}$ : Σχέση μεταξύ $\omega_n$ και $M_p$                                                                           |

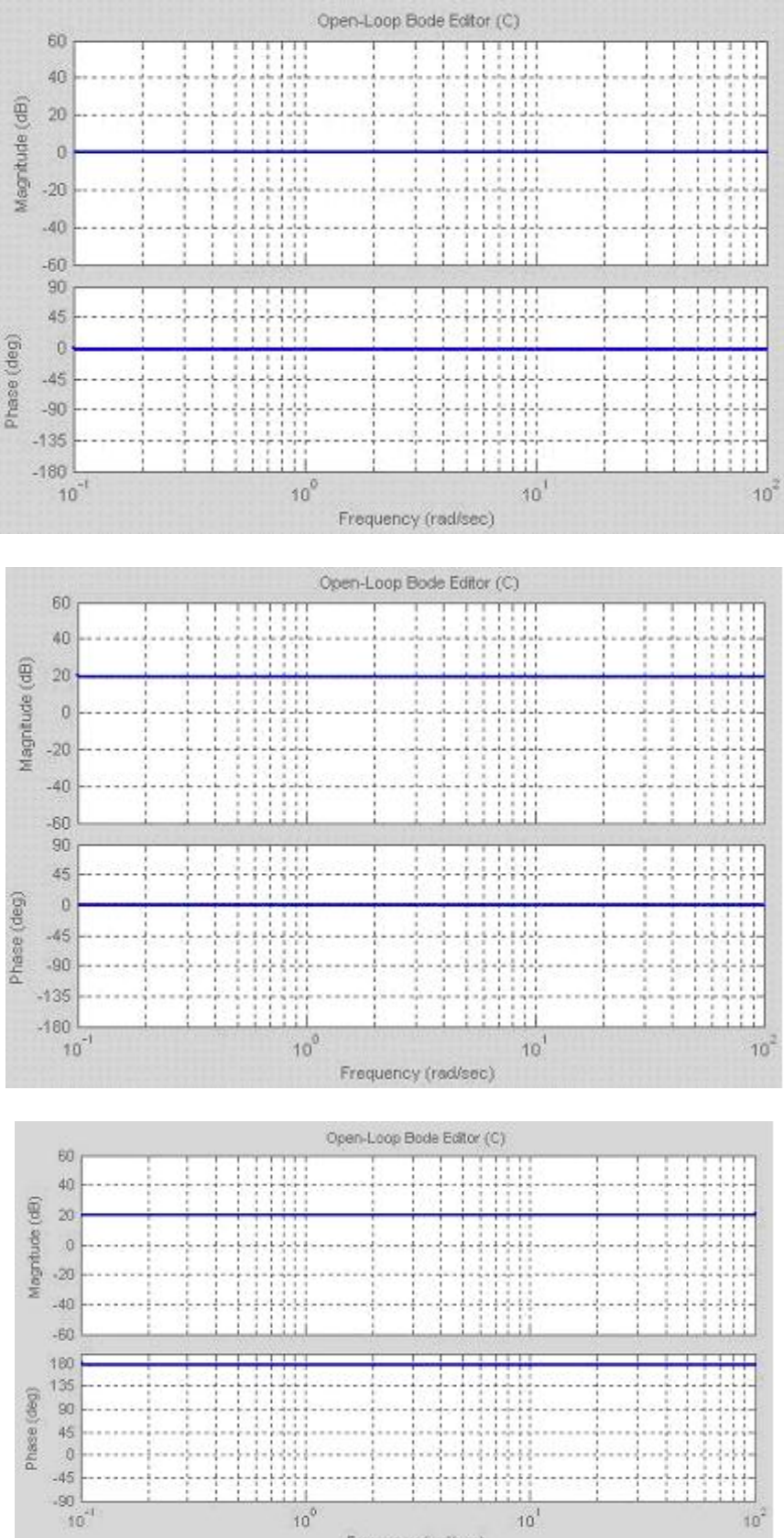
|   |                                                                                                                                                                              |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9 | $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{\pi}{t_p} \left( -\frac{\ln(M_p - 1)}{\sqrt{\pi^2 - 2\ln^2(M_p - 1)}} \pm j \right) : \text{ρίζες της Χ.Ε.}$ |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Παράρτημα 9<sup>ο</sup>: Αρμονική απόκριση συστημάτων 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> τάξης.

| A/A                            | ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ                                             | ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (I)<br>ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ    | $G(s) = \frac{K}{T_s s + 1}$                                    | $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T + 1}$ $ G(j\omega)  = K$ $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\omega T$                                                                                                                                                                                                                                               | $M_p = K$<br>$\omega_p = 0$<br>$\omega_b = \frac{1}{T} = BW$                                                                                                                                                                                                                                                          |
| (II)<br>ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ | $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ | $G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}$ $ G(j\omega)  = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$ $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ | $\begin{cases} M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \zeta < 0.707 \\ M_p = 1, \zeta \geq 0.707 \end{cases}$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}, \zeta < 0.707$ $\omega_b = BW = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$ $\frac{\omega_p}{\omega_d} = \sqrt{\frac{1-2\zeta^2}{1-\zeta^2}}$ |

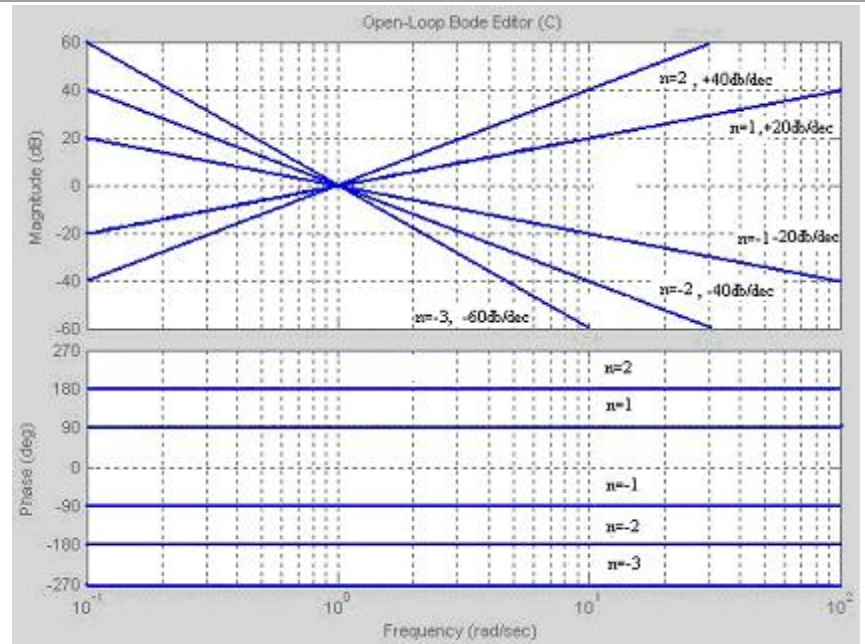
|                                       |
|---------------------------------------|
| $ G(j\omega_b)  = 0.707$              |
| ΙΣΧΥΕΙ ΓΕΝΙΚΑ: $ G(j\omega_p)  = M_p$ |

# Παράρτημα 10<sup>ο</sup>: Διάγραμμα BODE βασικών παραγόντων.

| Α/Α | ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ<br>(ΠΛΑΤΟΣ/ΦΑΣΗ)                                                                                      | ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΛΑΤΟΥΣ - ΦΑΣΗΣ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | <p>Σταθερός όρος K</p> $M = 20 \log K$ $\Phi = \begin{cases} 0^\circ, & K > 0 \\ 180^\circ, & K < 0 \end{cases}$ |  <p>The figure displays three Bode plots generated by the 'Open-Loop Bode Editor (C)'. Each plot consists of two subplots: the top one for Magnitude (dB) and the bottom one for Phase (deg). The x-axis for all plots is Frequency (rad/sec) on a logarithmic scale from 10<sup>-1</sup> to 10<sup>2</sup>. The y-axis for the magnitude plots ranges from -60 to 60 dB, and for the phase plots from -180 to 90 degrees. The three plots correspond to different values of the constant gain K: 1 (0 dB), 10 (20 dB), and -10 (20 dB magnitude, 180 degrees phase).</p> |

2

Όρος της μορφής  $(j\omega)^{\pm n}$   
 $M = \pm 20n \log \omega$   
 $\varphi = \pm 90^\circ n$



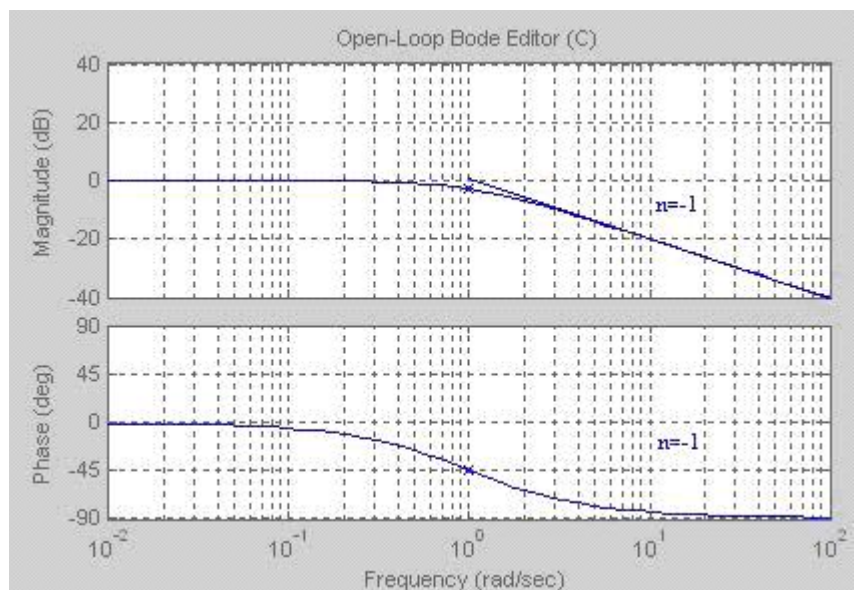
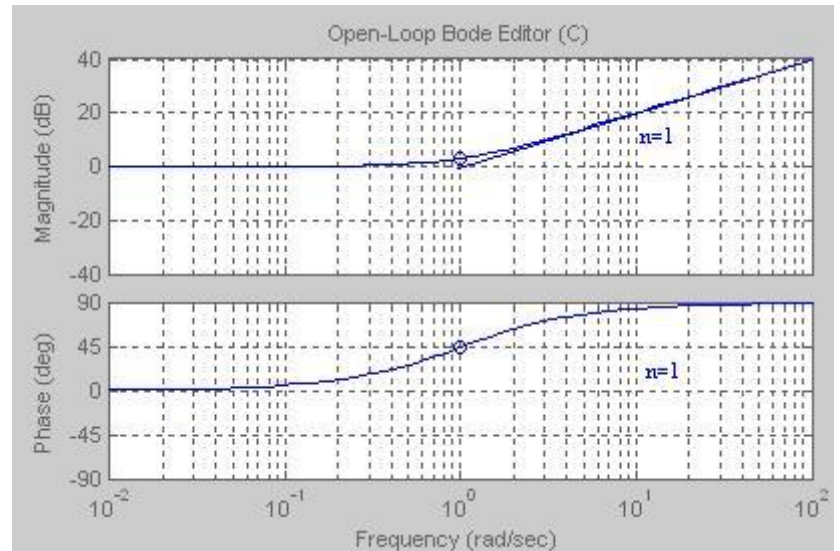
3

Όρος της μορφής  $(j\omega T + 1)^{\pm n}$   
 $M = \pm 20n \log \sqrt{1 + (\omega T)^2}$   
 ή  

$$M = \begin{cases} 0 & , \omega \ll 1/T \\ \pm 3n & , \omega = 1/T \\ \pm 20n \log \omega T & , \omega \gg 1/T \end{cases}$$
  
 $\varphi = \pm n \tan^{-1} \omega T$

ή

$$\varphi = \begin{cases} 0 & , \omega = 0 \\ \pm 45^\circ n & , \omega T = 1 \\ \pm 90^\circ n & , \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$



4

Όρος της μορφής

$$\left[ \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + 1 \right]^{\pm n}$$

$$M = \pm 20 \log \sqrt{\left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

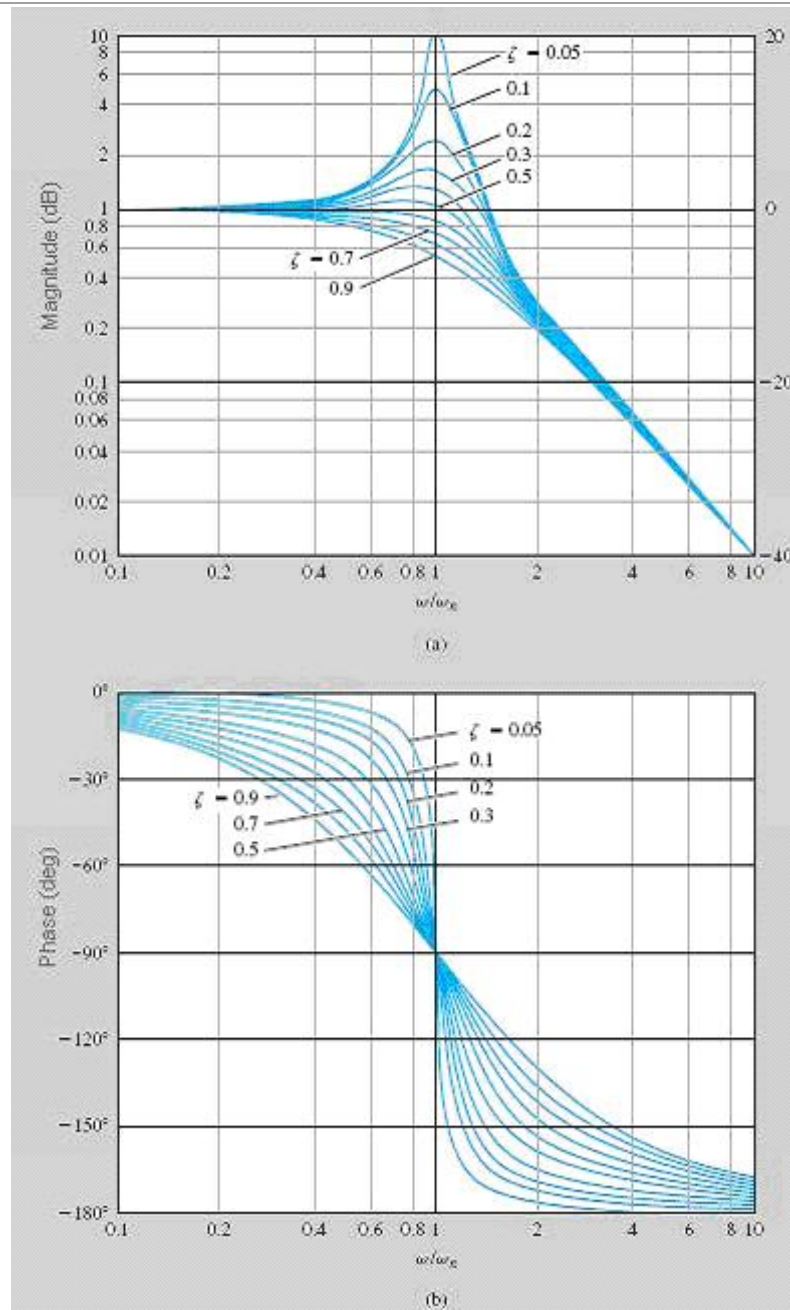
ή

$$M = \begin{cases} 0 & , \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \\ \pm 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} & , \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \\ \pm 20 \log \left| 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| & , \zeta = 1 \\ \pm 20 \log \left| 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| & , \zeta = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \pm 90^\circ n$$

ή

$$\varphi = \begin{cases} 0^\circ & , \frac{\omega}{\omega_n} = 0 \\ \pm 90^\circ & , \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \\ \pm 180^\circ & , \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$



**Παράρτημα 11<sup>ο</sup>: Περιθώριο ενίσχυσης και φάσης.**

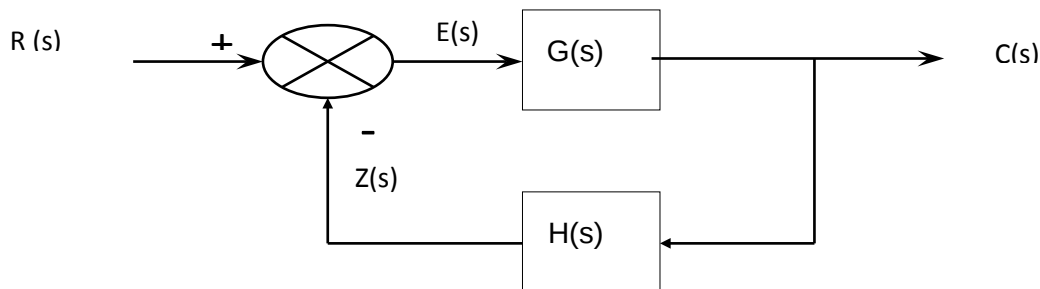
| A/A | ΟΝΟΜΑΣΙΑ                                   | ΤΥΠΟΣ - ΣΧΟΛΙΑ                                                                                                                                             |
|-----|--------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | ΠΕΡΙΘΩΡΙΟ<br>ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ<br>(Kg)             | $K_g(\text{db}) = -20 \log  G(j\omega_c)H(j\omega_c) $<br>$\varphi(\omega_c) = -180^\circ$<br>Για $K_g > 0 \Rightarrow$ Ευσταθές το κλειστό σύστημα        |
| 2   | ΠΕΡΙΘΩΡΙΟ<br>ΦΑΣΗΣ<br>( $\varphi_\alpha$ ) | $\varphi_\alpha = 180^\circ + \varphi$<br>$\varphi :  G(j\omega_1)H(j\omega_1)  = 1$<br>Για $(\varphi_\alpha) > 0 \Rightarrow$ Ευσταθές το κλειστό σύστημα |

## Παράρτημα 12<sup>ο</sup>: Γεωμετρικός Τόπος Ριζών(Γ.Τ.Ρ.)

Ο (Γ.Τ.Ρ) είναι μια γραφική απεικόνιση των θέσεων των πόλων του κλειστού συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο-S για όλες τις τιμές της παραμέτρου K (κέρδος) του συστήματος.

Είναι γνωστό ότι οι θέσεις των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο επηρεάζουν τη μεταβατική απόκριση του συστήματος καθώς και την ευστάθειά του.

Για το σύστημα κλειστού βρόγχου όπως αυτό εικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:



**Σχήμα 2.13**

$$G_{ολ}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \text{ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (Σ.Μ.)}$$

$G(s)$  **ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (Σ.Μ.) ΤΟΥ ΚΛΑΔΟΥ ΔΡΑΣΗΣ**

$H(s)$  **ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (Σ.Μ.) ΤΟΥ ΚΛΑΔΟΥ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ**

$G(s)H(s)$  **ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (Σ.Μ.) ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΒΡΟΓΧΟΥ**

$1 + G(s)H(s)$  **ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ**

$1 + G(s)H(s) = 0$  **ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (Χ.Ε)**

Αν η συνάρτηση μεταφοράς (Σ.Μ) ανοικτού βρόγχου είναι της μορφής:

$$G(s)H(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = K \frac{N(s)}{D(s)}$$

τότε η Σ.Μ του συστήματος θα είναι:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + K \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{G(s)D(s)}{D(s) + KN(s)}$$

από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι η μεταβολή των τιμών της παραμέτρου K επηρεάζει τις τιμές των ριζών της Χ.Ε του συστήματος με αποτέλεσμα τη μετατόπισή τους πάνω στο

μιγαδικό επίπεδο. Αυτό μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα πάνω στο μιγαδικό επίπεδο που θα είναι το σύνολο των σημείων που θα είναι ρίζες της Χ.Ε. του συστήματος αν η παράμετρος Κ πάρει όλες τις τιμές από το 0 μέχρι το  $+\infty$ .

Το διάγραμμα που προκύπτει όταν το Κ πάρει τιμές μεταξύ του  $-\infty$  και του μηδενός ονομάζεται συμπληρωματικός Γ.Τ.Ρ..

Από την Χ.Ε προκύπτουν τα παρακάτω:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

$$|G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle(G(s)H(s)) = (2\mu + 1)\pi, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ Συνθήκη φάσης για το Γ.Τ.Ρ.}$$

$$|K| \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = 1 \quad \text{Συνθήκη μέτρου για το Γ.Τ.Ρ.}$$

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τιμή του Κ πάνω στο διάγραμμα.

### 12.1 Κανόνες προσεγγιστικής χάραξης του Γ.Τ.Ρ

- 1.) Οι πόλοι της είναι τα σημεία εκκίνησης του Γ.Τ.Ρ.
- 2.) Τα μηδενικά (zeros) της  $G(s)H(s)$  και το άπειρο όταν  $m < n$  είναι τα σημεία λήξης του Γ.Τ.Ρ.
- 3.) Ο αριθμός των κλάδων του τόπου ριζών ισούται με το  $\max(m, n)$  όπου  $m$  είναι το πλήθος των μηδενικών και  $n$  είναι το πλήθος των πόλων της  $G(s)H(s)$ .
- 4.) Ο Γ.Τ.Ρ. είναι συμμετρικός ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- 5.) Το σημείο τομής των ασύμπτωτων ευθειών με τον άξονα των πραγματικών αριθμών δίδεται από την σχέση.

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

όπου  $\sum_{i=1}^n p_i$  = το άθροισμα των τιμών των πόλων της  $G(s)H(s)$

όπου  $\sum_{j=1}^m z_j$  = το άθροισμα των τιμών των μηδενικών της  $G(s)H(s)$

- 6.) Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες με τον πραγματικό άξονα δίνεται από τη σχέση.

$$\phi_{\alpha_\mu} = \frac{(2\mu+1)\pi}{n-m}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, ((n-m)-1) \quad K \geq 0$$

όπου  $((n-m)-1)$  είναι η τελευταία τιμή του  $\mu$ .

7.) Ένα τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι τμήμα του Γ.Τ.Ρ. αν το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος είναι περιττό. (για  $K \geq 0$ )

8.) Τα σημεία αποχωρισμού και άφιξης των κλάδων από και προς τον οριζόντιο άξονα ονομάζονται σημεία θλάσης του Γ.Τ.Ρ. και υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$K = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \text{ή} \quad D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 0$$

κάθε ρίζα της παραπάνω εξίσωσης αποτελεί ένα δεκτό σημείο θλάσης αν είναι ταυτόχρονα και ρίζα της Χ.Ε. του συστήματος για κάποια τιμή του  $K$ .

9.) Οι γωνίες αναχώρησης του Γ.Τ.Ρ. από μιγαδικό πόλο ή άφιξης σε μιγαδικό μηδενικό υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\angle \varphi_d = (2\mu+1)\pi - \left( \sum_{i=1}^n \varphi_{p_i} - \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j} \right)$$

όπου:

$\sum_{i=1}^n \varphi_{p_i}$  = το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών που σχηματίζουν οι πόλοι ως προς τον αναφερόμενο μιγαδικό πόλο (μηδενικό).

$\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j}$  = το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών που σχηματίζουν τα μηδενικά ως προς τον αναφερόμενο μιγαδικό πόλο (μηδενικό).

10.) Τα σημεία τομής του Γ.Τ.Ρ. με τον άξονα των φανταστικών αριθμών είναι τα σημεία  $\pm j\omega_{cr}$  όπου το σύστημα μεταπίπτει από την ευστάθεια στην αστάθεια

Οι τιμές του  $K$  και του  $\omega$  για τα σημεία αυτά ονομάζονται κρίσιμο κέρδος ( $K_{cr}$ ) και κρίσιμη συχνότητα ( $\omega_{cr}$ ) αντίστοιχα.

## Παράρτημα 13<sup>ο</sup>: Κριτήριο ROUTH.

Το κριτήριο ευστάθειας Routh, προσδιορίζει τον αριθμό των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου που βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο-s και δίνει απάντηση στο ερώτημα «είναι το σύστημα ευσταθές;», χωρίς να προσδιορίζει τη σχετική ευστάθεια του συστήματος όπως συμβαίνει με άλλα κριτήρια όπως του Γ.Τ.Ρ. που είδαμε προηγουμένως.

Ας θεωρήσουμε ότι η Χ.Ε  $1 + G(s)H(s) = 0$  της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος έχει τη παρακάτω γενική μορφή:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

όπου όλοι οι συντελεστές  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  και είναι  $\neq 0$ .

Εφ' όσον όλοι οι συντελεστές είναι ΟΜΟΣΗΜΟΙ, σχηματίζουμε τον πίνακα του Routh (σχήμα 2.14)

### Πίνακας ROUTH

|           |           |           |           |           |         |         |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|
| $s^n$     | $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $a_{n-6}$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $s^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $a_{n-7}$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $s^{n-2}$ | $b_n$     | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | $\dots$   | $\dots$ | $\dots$ |
| $s^{n-3}$ | $c_n$     | $c_{n-1}$ | $c_{n-2}$ | $\dots$   | $\dots$ | $\dots$ |
| $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$ | $\dots$ |
| $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$ | $\dots$ |
| $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$ | $\dots$ |
| $s^1$     | $e_n$     | $e_{n-1}$ | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$ | $\dots$ |
| $s^0$     | $f_n$     | $f_{n-1}$ | $\dots$   | $\dots$   | $\dots$ | $\dots$ |

### **Σχήμα 2.14**

όπου οι όροι,  $b_n, b_{n-1}, \dots, c_n, c_{n-1}, \dots, e_n, \dots$  κ.λ.π. υπολογίζονται ως εξής:

$$b_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_n = \frac{b_n a_{n-3} - b_{n-1} a_{n-1}}{b_n}$$

$$c_{n-1} = \frac{b_n a_{n-5} - b_{n-2} a_{n-1}}{b_n}$$

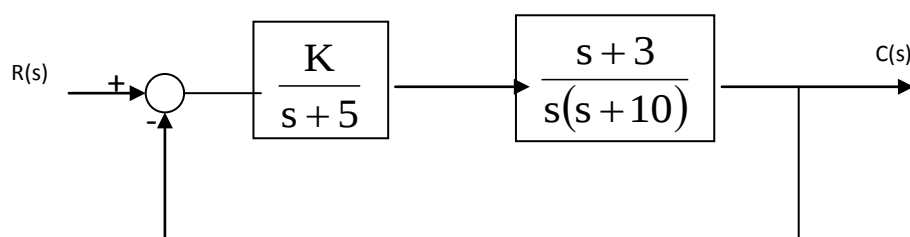
Σύμφωνα με το ΚΡΙΤΗΡΙΟ του Routh για να είναι ευσταθές ένα σύστημα πρέπει οι όροι της πρώτης στήλης του πίνακα Routh (δηλαδή οι  $a_n, a_{n-1}, b_n, c_n, \dots, e_n, f_n$ ) να είναι ΟΜΟΣΗΜΟΙ. Ο αριθμός των ριζών της Χ.Ε που βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο  $s$  ισούται με τον αριθμό αλλαγών του πρόσημου των συντελεστών της πρώτης στήλης του πίνακα Routh.

### 13.1 Ειδικές περιπτώσεις για την συμπλήρωση του πίνακα.

- Όταν ένας όρος της πρώτης στήλης είναι μηδέν, ενώ οι υπόλοιποι όροι της σειράς είναι διάφοροι του μηδενός ή δεν υπάρχουν, τότε, αντικαθίσταται ο μηδενικός όρος, από ένα πολύ μικρό αριθμό ομόσημο με τους προηγούμενους της πρώτης στήλης, και συνεχίζεται η ανάπτυξη του πίνακα.
- Όταν όλοι οι όροι μίας σειράς του πίνακα Routh είναι μηδενικοί, ο πίνακας συμπληρώνεται με την τοποθέτηση, αντί των μηδενικών όρων με τους όρους της παραγωγισμένης βοηθητικής εξίσωσης της αμέσως προηγούμενης σειράς.
- Όταν τουλάχιστον δύο σειρές έχουν μηδενικούς όρους, τότε το σύστημα είναι ασταθές και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει δύο αντίθετους πραγματικούς πόλους με πολλαπλότητα 2.
- Για την εύρεση της κρίσιμης (οριακής) τιμής του  $K$  για ευστάθεια αρκεί να μηδενιστεί ο όρος της σειράς  $s^1$  και να λυθεί η εξίσωση ως προς  $K=K_{cr}$ .
- Για την εύρεση της οριακής συχνότητας ταλαντώσεων του συστήματος αρκεί να λυθεί η βοηθητική εξίσωση της σειράς  $s^2$  ως προς  $\omega=\omega_{cr}$ . Αυτή θα έχει τη μορφή:  $\lambda_n s^2 + \lambda_{n-1} = 0$  όπου  $\lambda_n, \lambda_{n-1}$  οι συντελεστές της σειράς  $s^2$  και όπου  $k$  θα τεθεί η τιμή  $K_{cr}$  που βρέθηκε .

### Παράδειγμα:

Να σχεδιασθεί ο Γ.Τ.Ρ του εικονιζόμενου συστήματος ελέγχου για  $K > 0$ .



A) Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόγχου είναι:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+10)} \quad (1)$$

B) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$X.E. = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+10)} = \frac{s(s+5)(s+10) + K(s+3)}{s(s+5)(s+10)} = 0 \Rightarrow$$

$$X.E. = s^3 + 15s^2 + (50 + K)s + 3K = 0, (2)$$

Γ) Από την (1) βρίσκω τους πόλους και τα μηδενικά και τα τοποθετώ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτά είναι:  $Z_1 = -3$  και  $P_1 = 0, P_2 = -5, P_3 = -10$ .

Δ) Οι κλάδοι είναι τρεις όσοι και πόλοι.

Ε) Τα τμήματα του πραγματικού άξονα που είναι κλάδοι του Γ.Τ.Ρ. είναι εκείνα μεταξύ των σημείων  $(0, -3)$  και  $(-5, -10)$ , διότι είναι αυτά που ικανοποιούν την ιδιότητα του να έχουν δεξιά τους περιττό αριθμό πόλων και μηδενικών.

$$Z) \quad \text{Το σημείο τομής των ασύμπτωτων } \sigma_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{-10 - 5 - (-3)}{3 - 1} = \frac{-12}{2} = -6$$

ΣΤ) Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες είναι:

$$\phi_{\alpha_\mu} = \frac{(2\mu+1)\pi}{n-m} \quad \text{το } \mu = 0, 1, 2, \quad ((n-m)-1) \text{ άρα το } \mu \text{ θα πάρει τις τιμές } 0 \text{ και } 1 \text{ διότι } ((n-m)-1)=1$$

$$\phi_{\alpha_0} = \frac{(2\mu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 0 + 1)180}{3-1} = 90^\circ$$

$$\phi_{\alpha_1} = \frac{(2\mu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2 \cdot 1 + 1)180}{3-1} = 270^\circ$$

Η κρίσιμη τιμή του κέρδους K θα υπολογισθεί εφαρμόζοντας το κριτήριο του ROUTH

Από τη σχέση (2) σχηματίζουμε τον πίνακα του ROUTH.

|       |                            |          |
|-------|----------------------------|----------|
| $s^3$ | 1                          | $50 + K$ |
| $s^2$ | 15                         | $3K$     |
| $s^1$ | $\frac{15(50+K) - 3K}{15}$ | 0        |
| $s^0$ | $3K$                       |          |

$$\frac{15(50+K) - 3K}{15} \geq 0 \Rightarrow 15(50+K) - 3K \geq 0 \Rightarrow K \geq -62,5 \dots \text{και} \dots K > 0$$

άρα το σύστημα είναι ευσταθές για οποιαδήποτε  $K > 0$  και ο Γ.Τ.Ρ δεν τέμνει τον φανταστικό άξονα.

