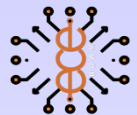


Εισαγωγικές έννοιες θεωρίας Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου ΜΕΡΟΣ 1ο

Γενικά

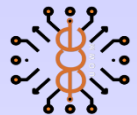
- Τι είναι ένα Σύστημα Αυτομάτου Ελέγχου
- Παραδείγματα εφαρμογών Συστημάτων Ελέγχου
- Τι είναι ανατροφοδότηση (Feedback) και ποιες είναι οι επιπτώσεις της.
- Μαθηματικό υπόβαθρο για την μελέτη των Συστημάτων Ελέγχου

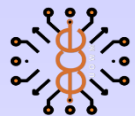


➤ Τι είναι ένα Σύστημα Ελέγχου (Ορισμός)

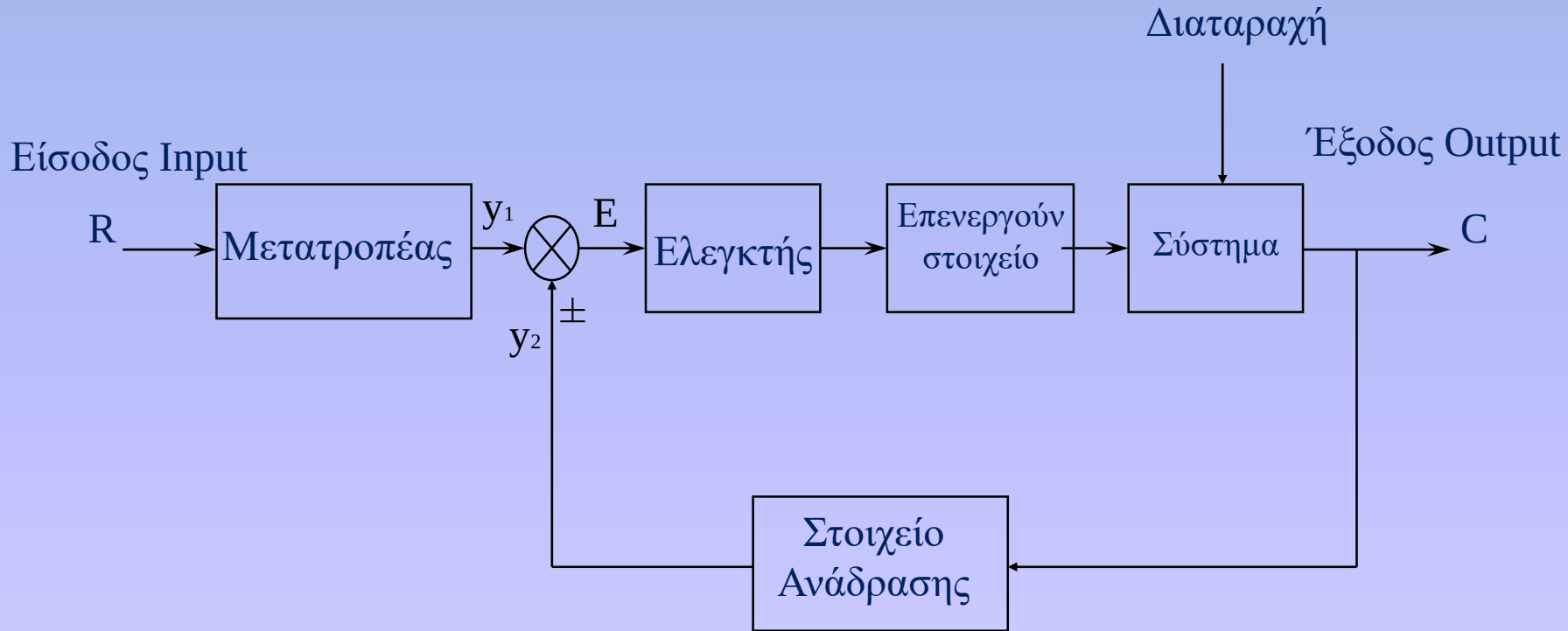
Σύστημα αυτομάτου ελέγχου ονομάζεται ένα σύνολο (τεχνητό ή φυσικό) στοιχείων και εξαρτημάτων κατάλληλα συνδεδεμένα μεταξύ τους που μπορεί να ελέγχει μια διεργασία ή ορισμένα μεταβλητά μεγέθη όπως:

- ❖ θέση (x, y, z)
- ❖ ταχύτητα
- ❖ πίεση
- ❖ ηλεκτρική τάση
- ❖ θερμοκρασία κ.λ.π.

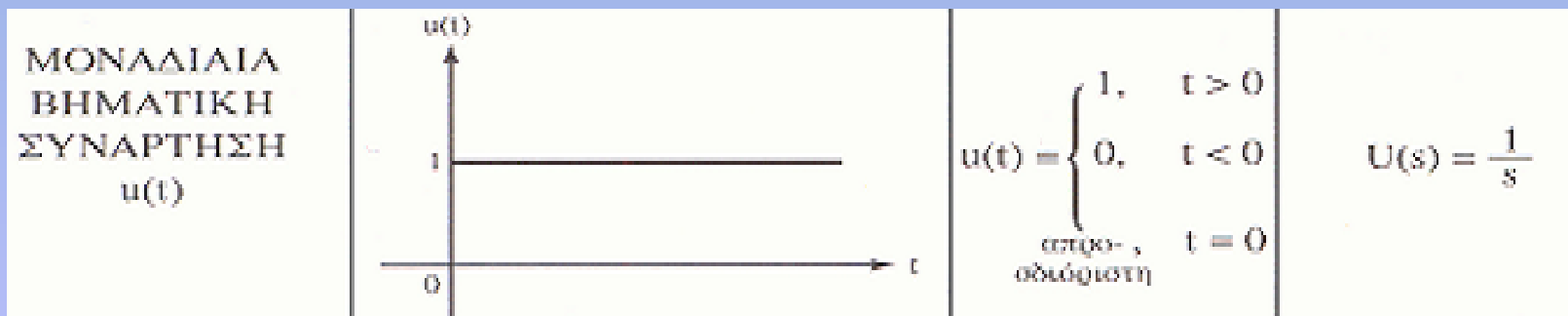




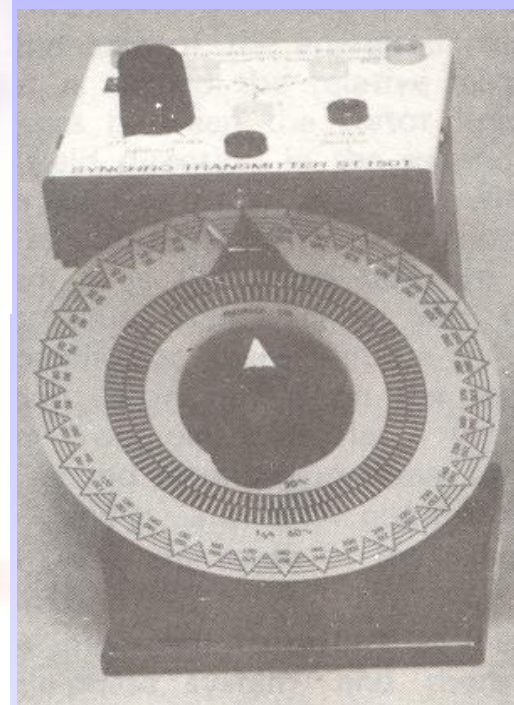
Βασική Δομή Συστήματος Ελέγχου Κλειστού Βρόγχου



- * **Είσοδος (input):** Μια διέγερση που εφαρμόζεται στο σύστημα από εξωτερική πηγή.



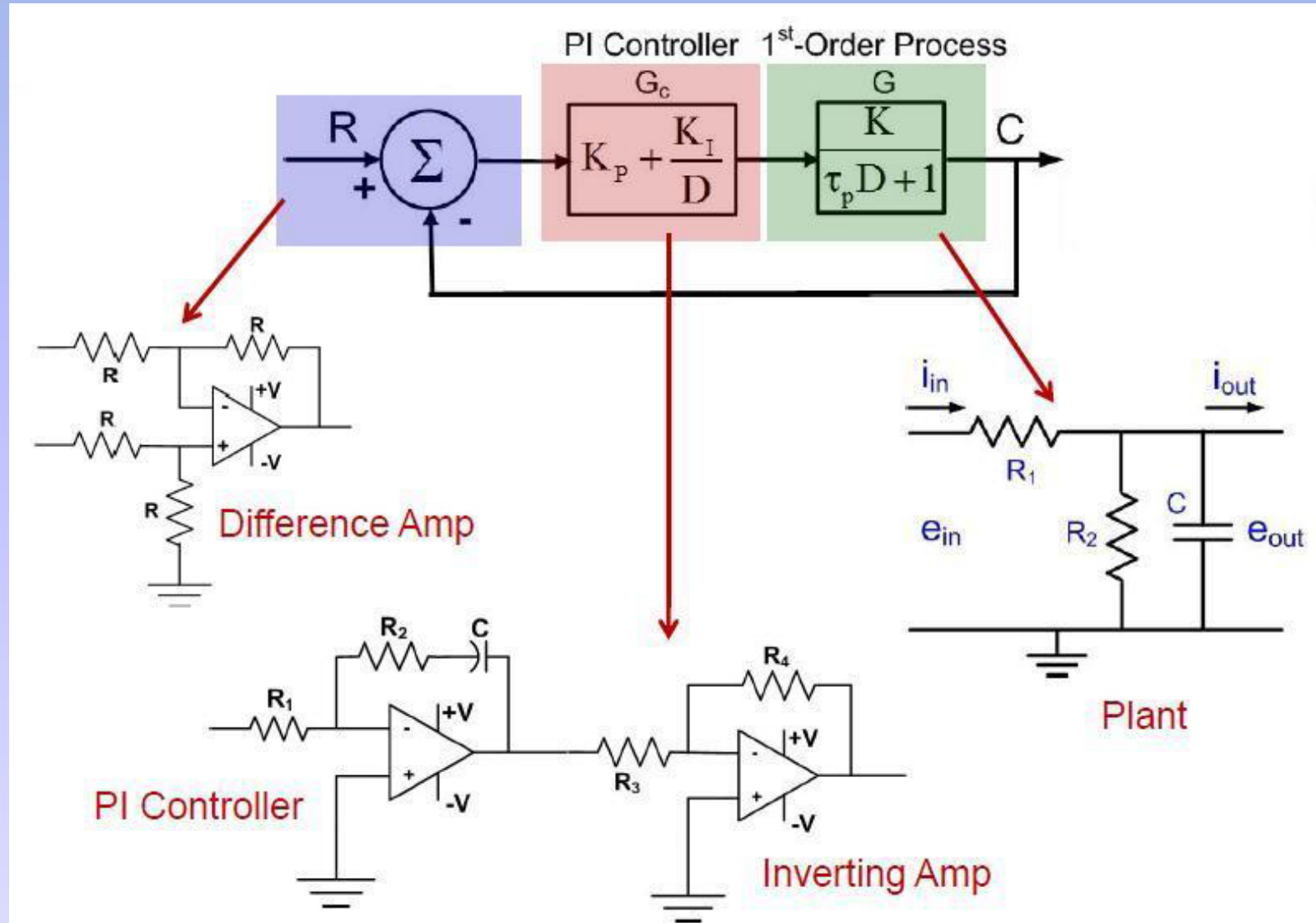
- * **Μετατροπέας (transducer):** Μετατρέπει μια μορφή ενέργειας σε μια άλλη π.χ. μηχανική σε ηλεκτρική.



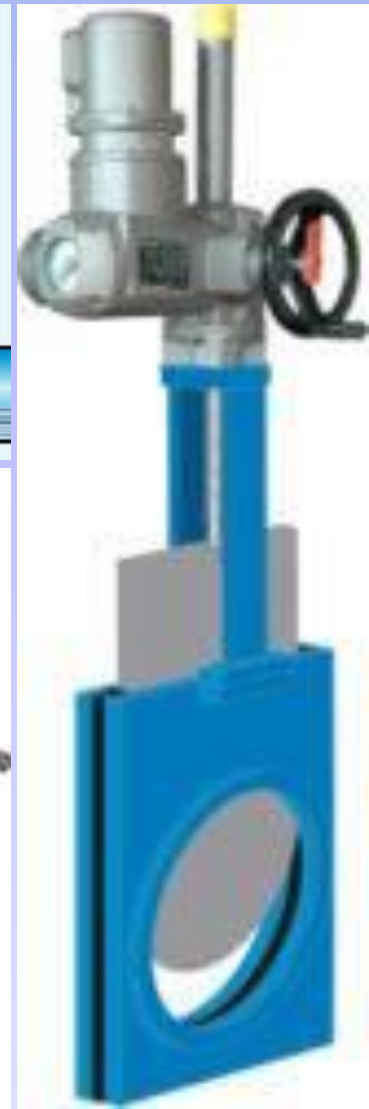
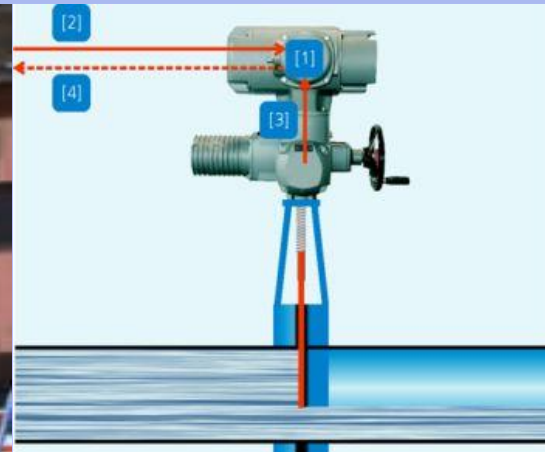
* **Ελεγκτής (Controller):** Παράγει μια έξοδο που οδηγεί την ελεγχόμενη διεργασία με σκοπό τον μηδενισμό του σφάλματος και γενικά την βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών του συστήματος.



* **Ελεγκτής (Controller):** Παράγει μια έξοδο που οδηγεί την ελεγχόμενη διεργασία με σκοπό τον μηδενισμό του σφάλματος και γενικά την βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών του συστήματος.

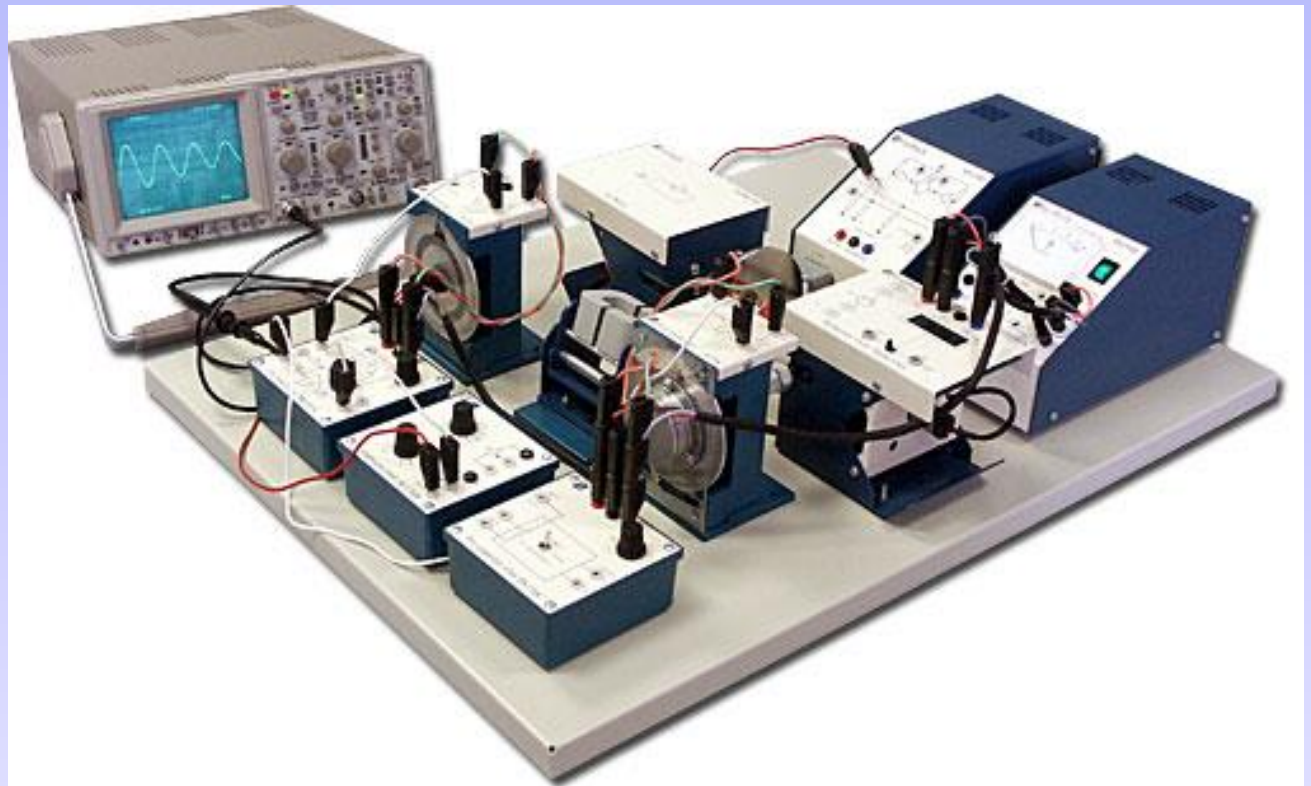


* **Επενεργούν στοιχείο (Actuator):** Το Επενεργούν Στοιχείο είναι η συσκευή που αποδίδει την απαιτούμενη ενέργεια στην διεργασία (π.χ. η συσκευή που αναγκάζει την διεργασία να εξασφαλίσει την έξοδο).



❖ Σύστημα (plant):

- ❖ Σύστημα τύπου ***follow-up***: Τα συστήματα των οποίων η έξοδος θα πρέπει να μεταβάλλεται σε συνάρτηση των μεταβολών του σήματος εισόδου (π.χ. σύστημα ελέγχου θερμοκρασίας χώρου).
- ❖ Σύστημα τύπου ***regulator***: Τα συστήματα των οποίων η έξοδος θα πρέπει να παραμένει σταθερή ακόμα και όταν υπάρχουν μεταβολές του σήματος εισόδου (π.χ. σταθεροποιητής τάσεως DC).

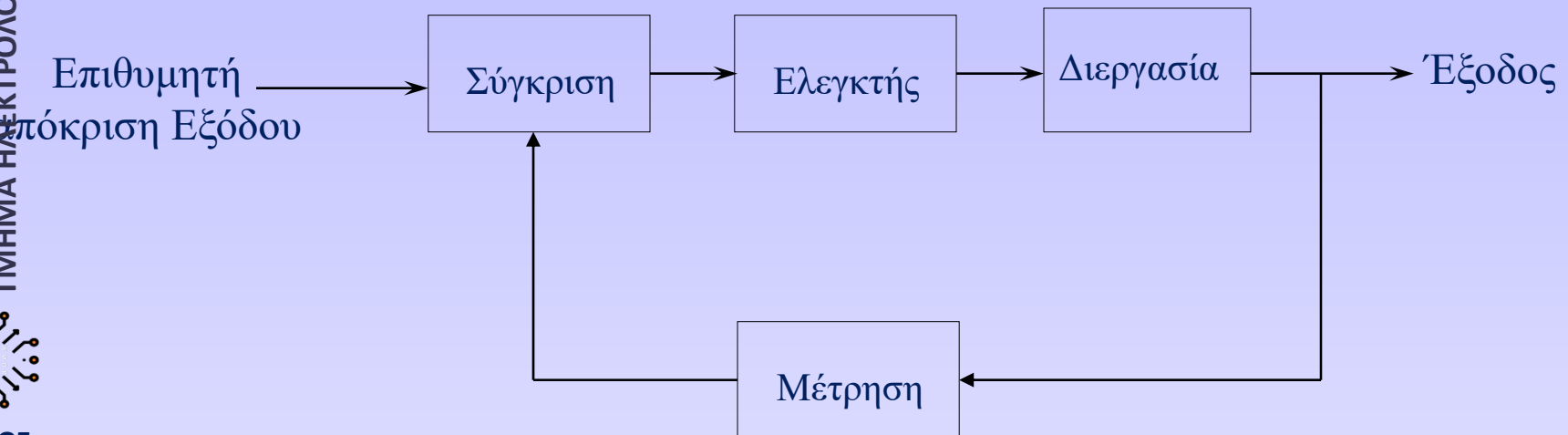


*Διαταραχή (disturbance)

-Διαταραχή είναι κάθε μη επιθυμητό σήμα που επηρεάζει την *έξοδο*.

* Ανάδραση (feedback)

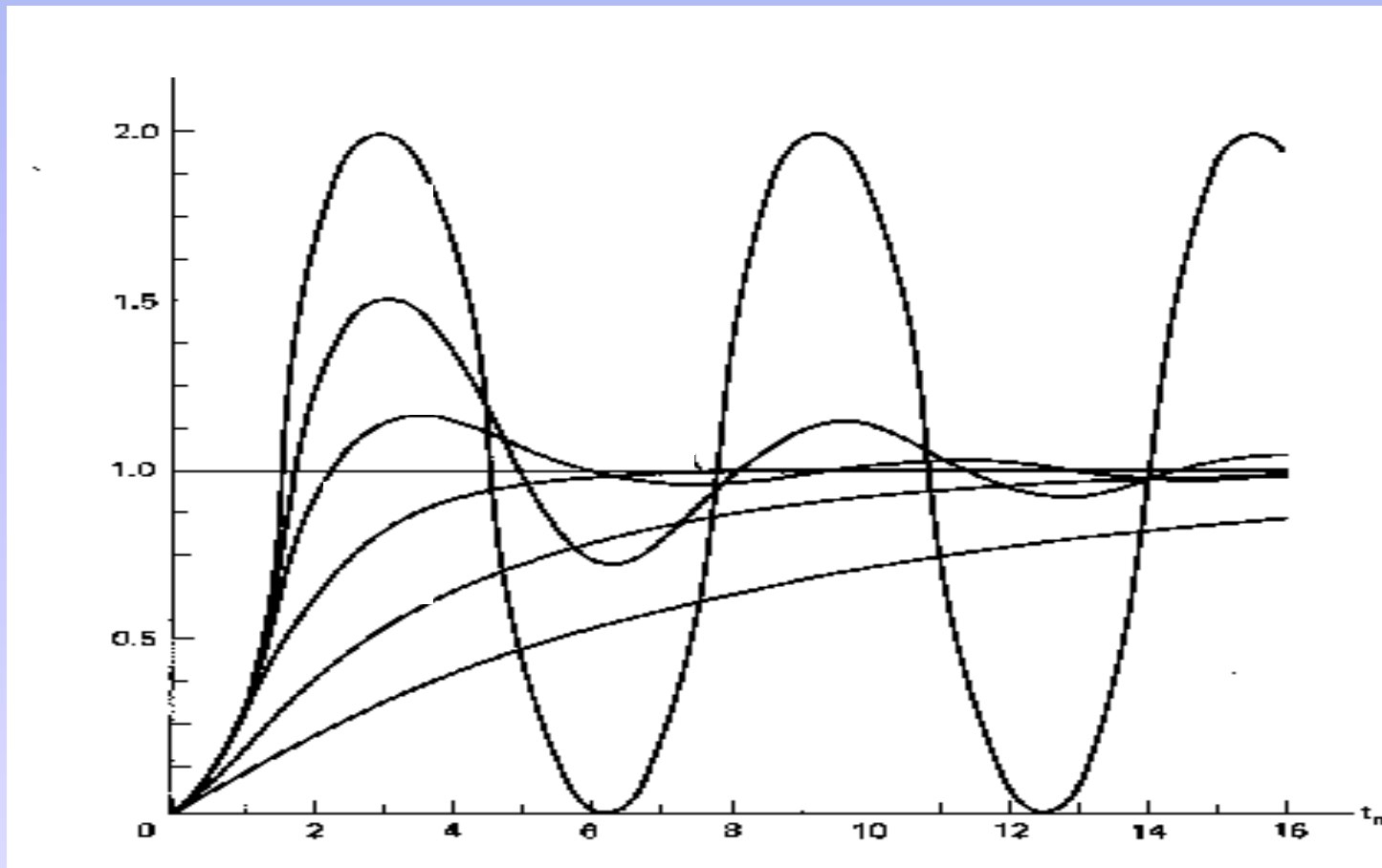
- Ένα σύστημα χρησιμοποιεί ανάδραση εάν η *έξοδος* ή μέρος της *εξόδου* επιστρέφει μέσω του κλάδου ανατροφοδότησης (ανάδρασης) στον αθροιστή/συγκριτή, έτσι που να μπορεί να συγκριθεί με την *είσοδο*. Η χρήση της ανάδρασης συνήθως επιφέρει ευστάθεια και ακρίβεια στο σύστημα.





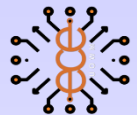
* Έξοδος (Output)

- Το σύστημα διεγειρόμενο από την είσοδο παράγει ένα *σήμα εξόδου* σαν απόκριση.



Παραδείγματα Σ.Α.Ε.

- Αυτόματος πιλότος αεροσκαφών
- Έλεγχος θέσης ανάγνωσης κεφαλής σκληρού δίσκου
- Σύστημα Ελέγχου Ρομποτικού βραχίονα
- Αυτόματο Σύστημα Ελέγχου ταχύτητας οχημάτων
(cruise control system)



Κατηγορίες Σ.Α.Ε.

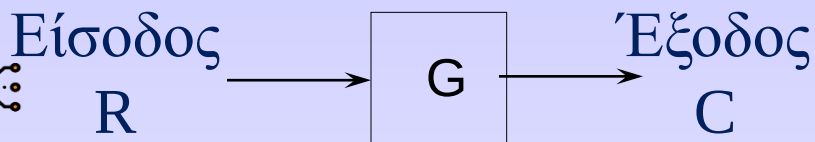
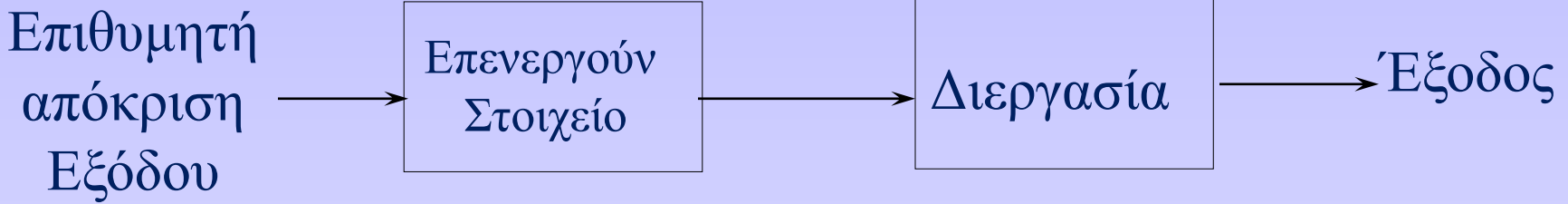
Τα Σ.Α.Ε. μπορούμε να τα κατατάξουμε σε κατηγορίες ως εξής:

❖ **Ανάλογα με τη φύση του μέσου ελέγχου**

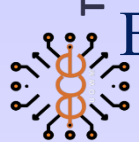
- * *Ηλεκτρικά – ηλεκτρονικά συστήματα*
- * *Πνευματικά συστήματα*
- * *Υδραυλικά συστήματα*
- * *Ηλεκτροϋδραυλικά συστήματα*
- * *Ηλεκτροπνευματικά συστήματα*

❖ **Ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται ή όχι ανάδραση (ανατροφοδότηση)**

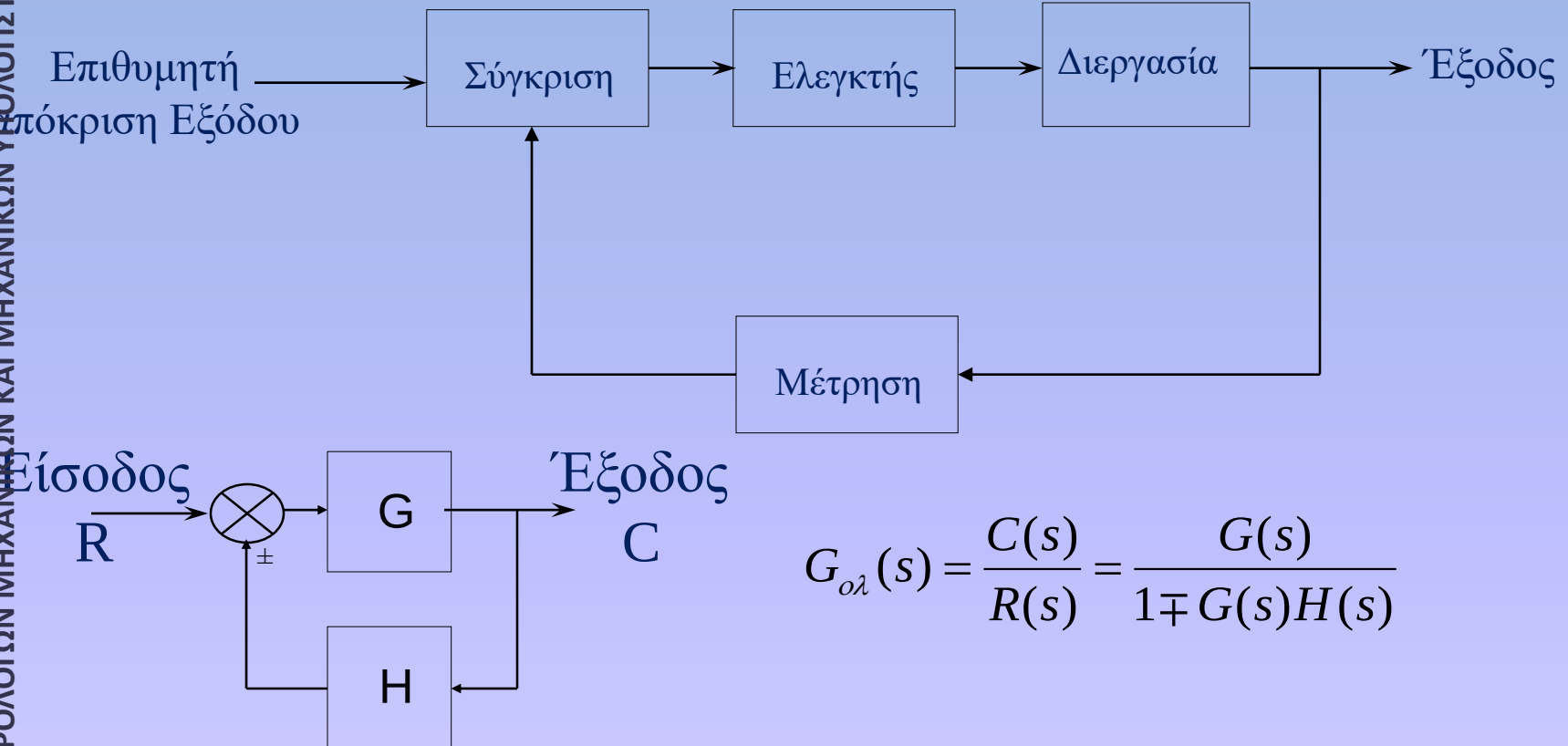
- * *Συστήματα ανοιχτού βρόγχου*



$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$



* Συστήματα Ελέγχου Κλειστού Βρόγχου



$$G_{ολ}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

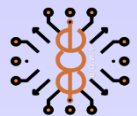
❖ **Ανάλογα με την τεχνική επεξεργασία των σημάτων έλεγχου**

*

Αναλογικά

*

Ψηφιακά



❖ Ανάλογα με τον τύπο των εξαρτημάτων

* Γραμμικά

- Ένα σύστημα θεωρείται γραμμικό όταν ακολουθεί την αρχή της επαλληλίας.

Π.χ. Αν όλες οι αρχικές συνθήκες ενός συστήματος είναι μηδενικές, δηλαδή αν το σύστημα είναι σε ηρεμία, τότε το σύστημα είναι γραμμικό αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

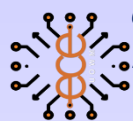
- (α) μία είσοδος $u_1(t)$ παράγει μια έξοδο $y_1(t)$, και
- (β) μία είσοδος $u_2(t)$ παράγει μια έξοδο $y_2(t)$, τότε,
- (γ) η είσοδος $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ παράγει μια έξοδο $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, για οποιοδήποτε ζευγάρι εισόδων $u_1(t)$ και $u_2(t)$ και σταθερές c_1 και c_2 .

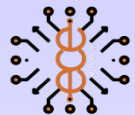
Τα γραμμικά συστήματα μπορούν συχνά να παρασταθούν με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και γραμμικές εξισώσεις διαφοράς.

* Μη - γραμμικά

- Όλα τα υπόλοιπα είναι μη γραμμικά

Π.χ. Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις $(dy/dt)^2 + y = 0$ και $d^2 y/dt^2 + \cos y = 0$ είναι μη – γραμμικές διότι ο όρος της πρώτης εξίσωσης είναι δευτέρου βαθμού, και ο όρος $\cos y$ στην δεύτερη εξίσωση δεν είναι πρώτου βαθμού πράγμα που ισχύει για όλες τις υπερβατικές συναρτήσεις.





❖ **Ανάλογα με την εφαρμογή τους**

** Σερβομηχανισμοί*

** Αριθμητικά συστήματα ελέγχου*

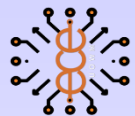
** Ακολουθιακά συστήματα Ελέγχου*

** Συστήματα πολύπλοκων διεργασιών*

❖ Ανάλογα με την εφαρμογή τους

Σερβομηχανισμοί

Είναι εκείνα τα συστήματα ελέγχου των οποίων η έξοδος ή ελεγχόμενη μεταβλητή είναι μηχανική θέση η ρυθμός μεταβολής της μηχανικής θέσης (ταχύτητα ή επιτάχυνση). Συστήματα ελέγχου ταχύτητας περιστροφής άξονα κινητήρα DC και ελέγχου θέσεως βηματικού κινητήρα είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα σερβομηχανισμών.

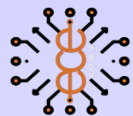


❖ Ανάλογα με την εφαρμογή τους

Αριθμητικά συστήματα ελέγχου

Είναι εκείνα τα συστήματα που ενεργούν επί αριθμητικών δεδομένων που είναι αποθηκευμένα σε κάποιο αποθηκευτικό μέσο ηλεκτρονικής ή άλλης φύσεως.

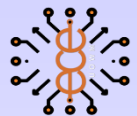
Τα CNC είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα αριθμητικού συστήματος ελέγχου.



❖ Ανάλογα με την εφαρμογή τους

Ακολουθιακά συστήματα Ελέγχου

Είναι τα συστήματα που η λειτουργία τους είναι προδιαγεγραμμένη και προσδιορισμένης χρονικής διάρκειας.

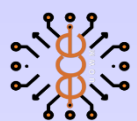


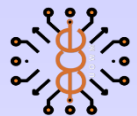
❖ *Ανάλογα με την εφαρμογή τους*

Συστήματα πολύπλοκων διεργασιών

Παραδείγματα τέτοιων συστημάτων θα μπορούσαν να είναι:

- *Μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας,*
- *Μονάδες συναρμολόγησης οχημάτων,*
- *Μονάδες κλωστοϋφαντουργίας,*
- *Διυλιστήρια,*
- *Μονάδες βιολογικού καθαρισμού, κ.λ.π.*





Θα πρέπει να τονιστεί ότι η κατάταξη ενός συστήματος σε μια από τις παραπάνω κατηγορίες δεν είναι πάντα δυνατή και αυτό διότι ένα σύστημα μπορεί να εμπεριέχει χαρακτηριστικά που θα επέτρεπαν την κατάταξή του σε περισσότερες από μια από τις παραπάνω κατηγορίες.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των συστημάτων ανοικτού και κλειστού βρόγχου (όποιας φύσεως και αν είναι αυτά), που ίσως είναι και η κατηγορία που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι εμπεριέχει την έννοια της αυτοματοποίησης όπως αυτή εννοείται όταν δεν παρεμβαίνει ο άνθρωπος (συστήματα κλειστού βρόγχου).

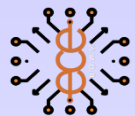
❖ Κίνητρα για την χρήση ανατροφοδότησης

Οι κυριότεροι λόγοι για την χρήση ανατροφοδότησης είναι οι παρακάτω:

- Μείωση της ευαισθησίας σε μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος και των ατελειών του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε στον σχεδιασμό.
- Μείωση των επιδράσεων των εξωτερικών διαταραχών και του θορύβου των αισθητήρων.

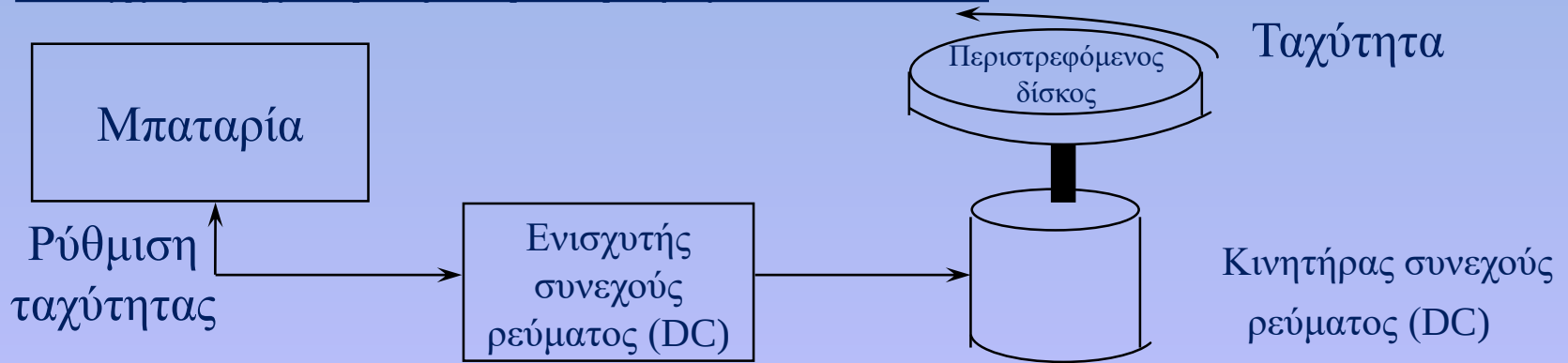
Η ανατροφοδότηση μπορεί επίσης

- Να βελτιώσει τα χαρακτηριστικά της μεταβατικής απόκρισης.
- Να μειώσει το μόνιμο σφάλμα.

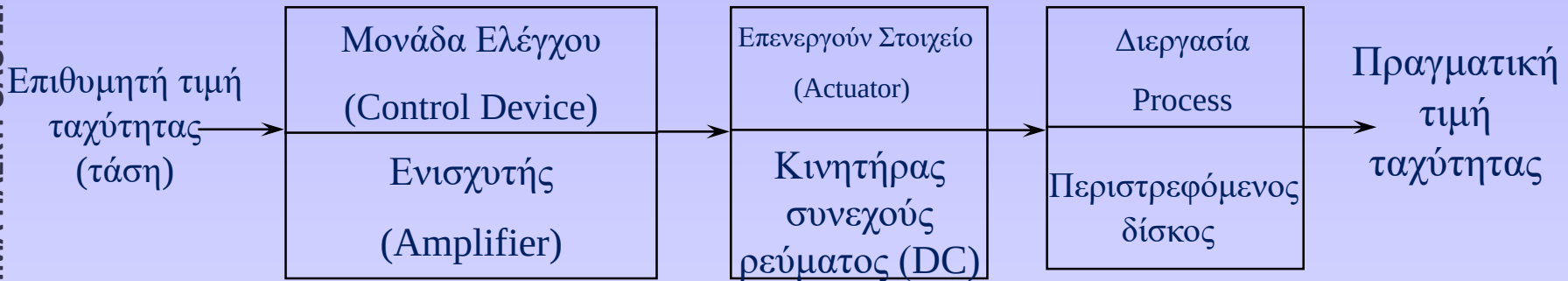


Παραδείγματα

Έλεγχος Ταχύτητας Περιστροφόμενου Δίσκου



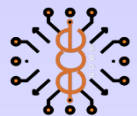
(α)

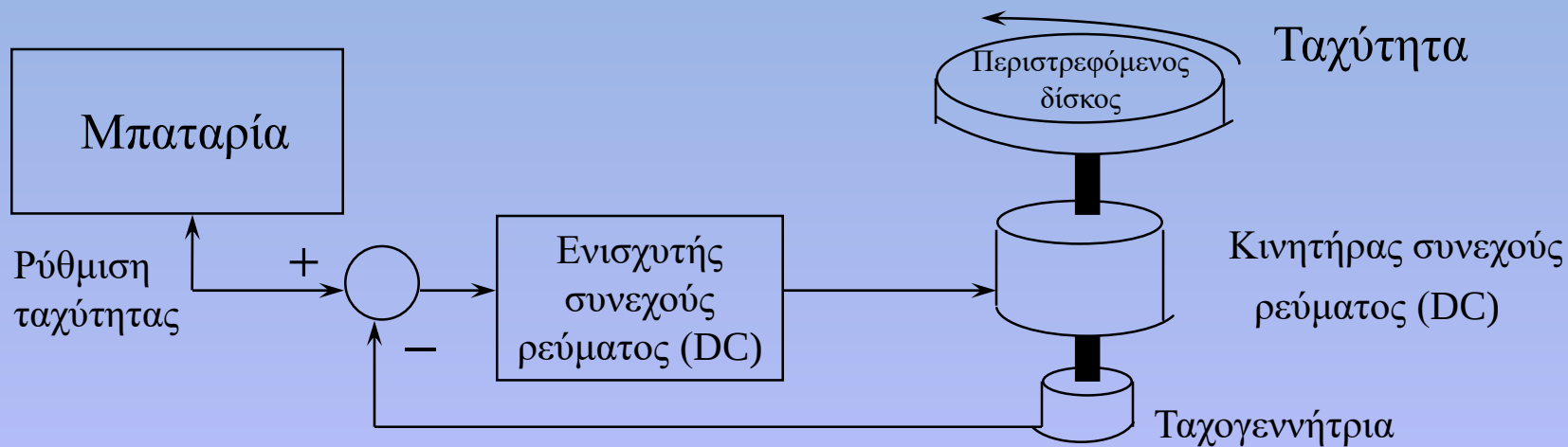


(β)

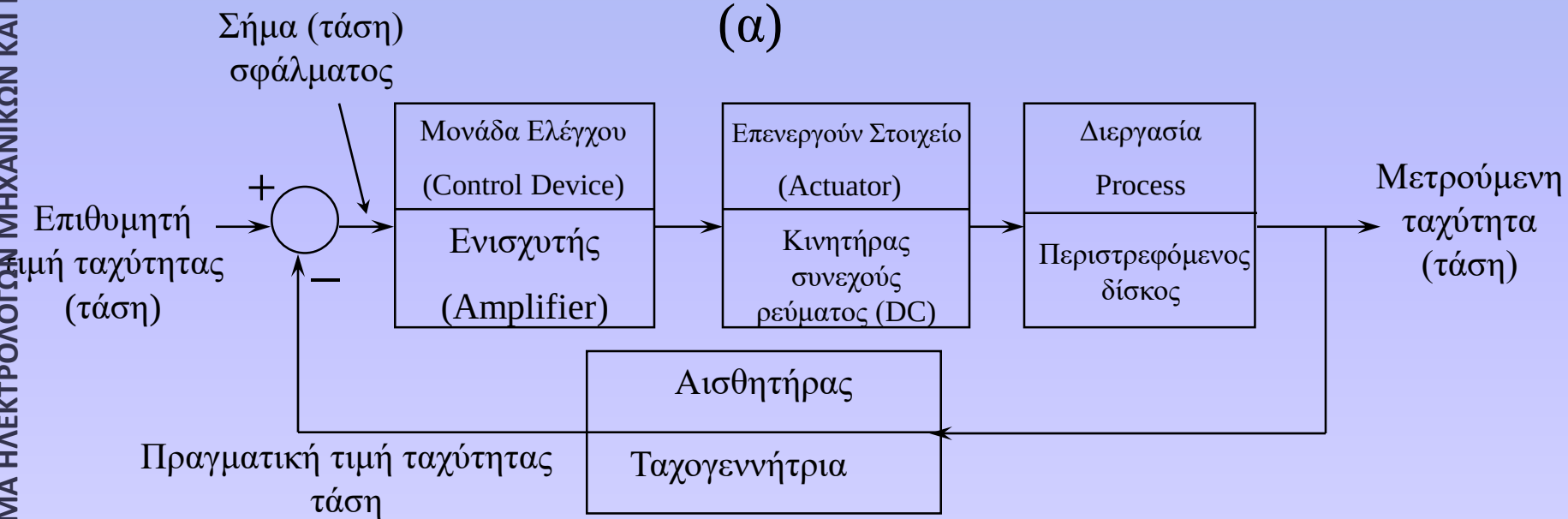
(α) Σύστημα ελέγχου ταχύτητας περιστροφόμενου δίσκου ανοιχτού βρόγχου (χωρίς ανάδραση)

(β) Το λειτουργικό διάγραμμα του συστήματος.





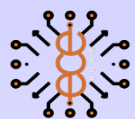
(α)



(β)

(α) Σύστημα ελέγχου ταχύτητας περιστρεφόμενου δίσκου κλειστού βρόγχου

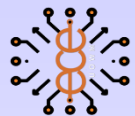
(β) Το λειτουργικό διάγραμμα του συστήματος.



Περιγραφή Συστημάτων

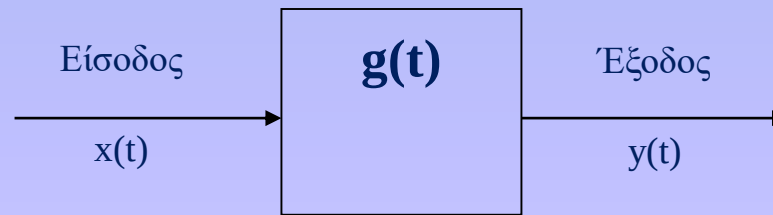
- Ένα σύστημα ελέγχου θα πρέπει να περιγραφεί και με μια μαθηματική παράσταση που θα περιγράφει τη σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου του συστήματος. Τα επικρατέστερα μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή συστημάτων είναι:

1. Οι ολοκληρωδιαφορικές εξισώσεις.
2. Η συνάρτηση μεταφοράς.
3. Η κρουστική απόκριση.
4. Οι εξισώσεις κατάστασης.

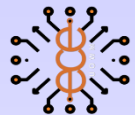


Περιγραφή Συστημάτων

- Έστω ότι ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα μιας εισόδου μιας εξόδου όπως το παρακάτω με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$ περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση. ($n \geq m$)



$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$



- Η **Συνάρτηση μεταφοράς** του Σ.Α.Ε. που περιγράφεται από την παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι το πηλίκο της μετασχηματισμένης εξόδου δια την μετασχηματισμένη είσοδο με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

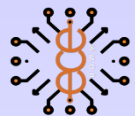
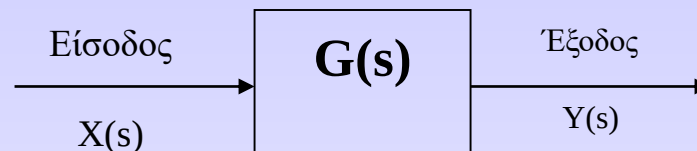
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t)$$

Ισχύει $\left\{ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$

Άρα $a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_0 X(s)$

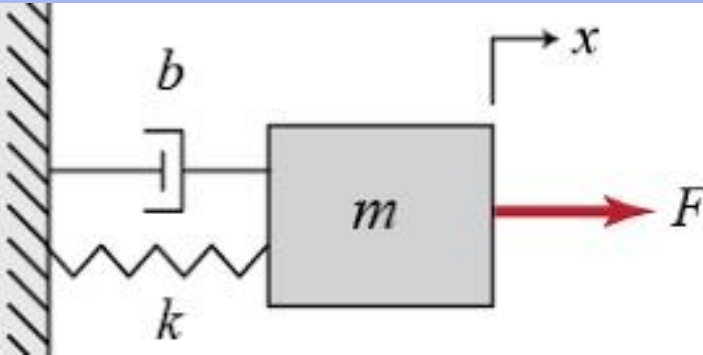
$$G(s) = \frac{\text{Μετασχηματισμένη - Έξοδος}}{\text{Μετασχηματισμένη - Είσοδος}}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$



Ανάλογα συστήματα

* Μηχανικό σύστημα



$$f(t) = f_M(t) + f_B(t) + f_K(t) \quad (1)$$

$$f_M(t) = m \cdot a = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$f_B(t) = b \cdot v(t) = b \frac{dx(t)}{dt}$$

$$f_K(t) = k \cdot x(t)$$

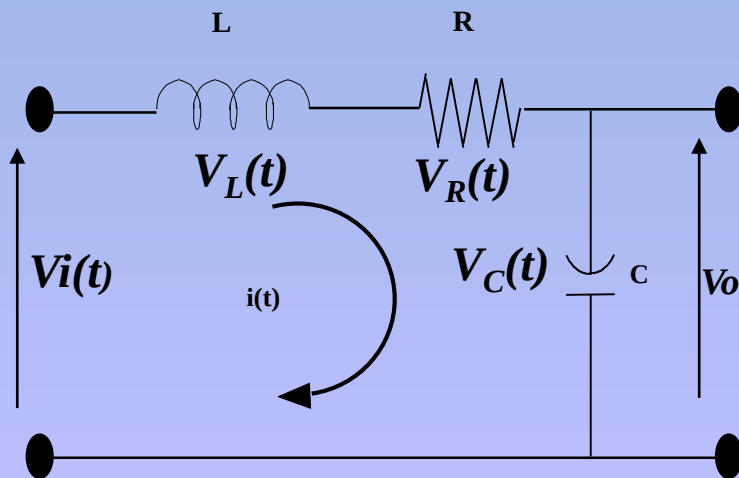
$$(1) \Rightarrow f(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t)$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = L\left\{m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{dx(t)}{dt} + C \cdot x(t)\right\} \Rightarrow$$

$$F(s) = m \cdot s^2 \cdot X(s) + b \cdot s \cdot X(s) + k \cdot X(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = (m \cdot s^2 + b \cdot s + k) X(s) \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}$$

* Ηλεκτρικό ανάλογο



$$V_i(t) = V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) \Rightarrow$$

$$V_i(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt$$

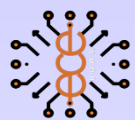
$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (1) \Rightarrow V_i(t) = L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q(t) \quad (2)$$

$$V_o(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (2) \Rightarrow V_i(t) = LC \frac{d^2 V_o(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_o(t)}{dt} + V_o(t)$$

$$\Rightarrow L \{V_i(t)\} = L \left\{ LC \frac{d^2 V_o(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_o(t)}{dt} + V_o(t) \right\} \Rightarrow$$

$$V_i(s) = LC \cdot s^2 V_o(s) + RC \cdot s V_o(s) + V_o(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_i(s) = (LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1) V_o(s) \Rightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$$

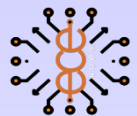


Μετασχηματισμός Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

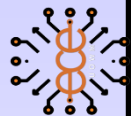
$$L[f(t)] = F(s)$$

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$



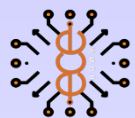
• Βασικές Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

α/α	$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	α/α	$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
1	$\alpha f_1(t) \pm \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) \pm \beta F_2(s)$	11	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) * F_2(s)$
2	$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$	12	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(p)F_2(s-p)dp$
3	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = f''(t) = \ddot{f}(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	13	$e^{-\alpha t} \cdot f(t)$	$F(s+\alpha)$
4	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	14	$f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$	$\alpha F(\alpha s)$
5	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$	15	$f(t)\cos\omega t$	$\frac{1}{2}F(s-j\omega) + \frac{1}{2}F(s+j\omega)$
6	$\int_0^t \int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s}$	16	$f(\alpha t)$	$\frac{F\left(\frac{s}{\alpha}\right)}{\alpha}$
7	$\int \dots \int f(t)(dt)^n$	$\frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \left[\int \dots \int f(t)(dt)^k \right]_{t=0}$	17	$\frac{f(t)}{t^n}$	$\int_s^\infty \dots \int_s^\infty F(s)(ds)^n$
8	$f(t-r) \cdot u(t-r)$	$e^{-rs} F(s)$	18	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ <i>Θεώρημα αρχικής τιμής</i>
9	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$	19	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ <i>Θεώρημα τελικής τιμής</i>
10	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \Phi(\sigma) d\sigma$			

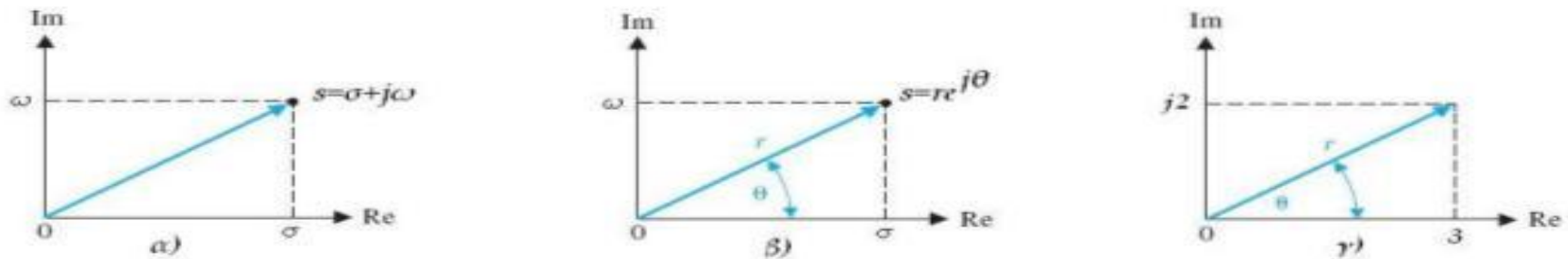


• Μετασχηματισμοί Laplace Βασικών Συναρτήσεων

α/α	$F(s) = LT\{f(t)\}$	$f(t) = ILT\{F(s)\}$	α/α	$F(s) = LT\{f(t)\}$	$f(t) = ILT\{F(s)\}$
1	1	$\delta(t)$	8	$\frac{1}{s^{n+1/2}}$	$\frac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi^{1/2}}$
2	$\frac{1}{s}$	$u(t)$	9	$\frac{e^{as}}{s}$	$u(t-\alpha)$
3	$\frac{1}{s^2}$	t	10	$\frac{1}{s}(1-e^{-as})$	$u(t)-u(t-\alpha)$
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}, n$ ΘΕΤΙΚΟΣ αριθμός	11	$\frac{K}{s \pm \alpha}$	$Ke^{\mp \alpha t}$
5	s	$\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta^{(1)}(t)$	12	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot e^{-\alpha t}, n$ ΘΕΤΙΚΟΣ αριθμός
6	s^n	$\delta^{(n)}(t), n$ ΘΕΤΙΚΟΣ αριθμός	13	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$
7	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$			



• Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών



Εικόνα 1. α) Καρτεσιανή, β) Εκθετική γ) Πολική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

α/α	$s = \sigma + j\omega = re^{j\theta} = r^{\angle\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$
1	$r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$, μέτρο μιγάδα
2	$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma}, \quad \sigma, \omega > 0$ $\theta = -\tan^{-1} \frac{ \omega }{\sigma}, \quad \sigma > 0 \text{ και } \omega < 0$ $\theta = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{ \sigma }, \quad \sigma < 0 \text{ και } \omega > 0$ $\theta = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{ \omega }{ \sigma }, \quad \sigma, \omega < 0$
3	$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$
4	$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$
5	$(\sigma_1 + j\omega_1) + (\sigma_2 + j\omega_2) = ((\sigma_1 + \sigma_2) + j(\omega_1 + \omega_2))$
6	$(\sigma_1 + j\omega_1) - (\sigma_2 + j\omega_2) = ((\sigma_1 - \sigma_2) + j(\omega_1 - \omega_2))$
7	$r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
8	$\frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι η διαδικασία υπολογισμού της συναρτήσεως $g(t)$ όταν γνωρίζουμε την συνάρτηση $G(s)$.

* Περίπτωση Διακεκριμένων Πόλων

Έστω η συνάρτηση $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, m < n$

Γράφουμε τη συνάρτηση στην παρακάτω μορφή αφού υπολογίσουμε τις ρίζες του παρονομαστή που ονομάζονται και πόλοι της συνάρτησης.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_n}{s+p_n}$$

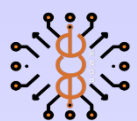
Υπολογίζουμε τις τιμές των συντελεστών k_i από τη σχέση:

$$k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} G(s) \cdot (s + p_i)$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω πίνακες η σχέση γίνεται:

$$g(t) = k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \dots + k_n e^{-p_n t}$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ και $z_1, z_2, \dots, z_m$ είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί.





* Περίπτωση πολλαπλών πόλων

Εάν η συνάρτηση $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$, $m < n$ έχει πολλαπλές ρίζες (πόλους),

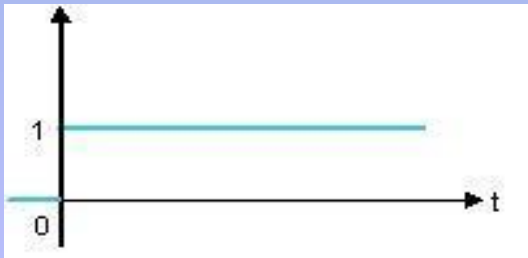
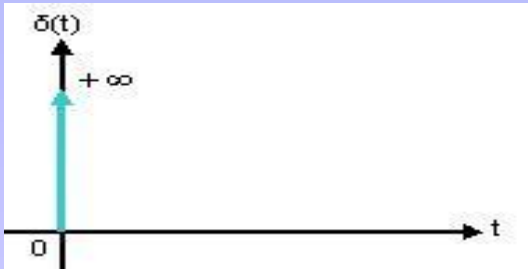
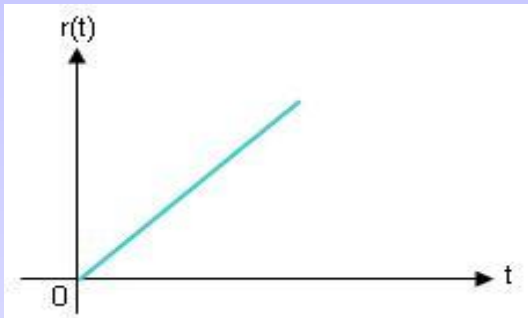
τότε οι συντελεστές που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ρίζα υπολογίζονται ως εξής :

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)^r (s + p_2) \cdots (s + p_n)} = \\ &= \frac{k_{11}}{s + p_1} + \frac{k_{12}}{(s + p_1)^2} + \dots + \frac{k_{1r}}{(s + p_1)^r} + \frac{k_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n} \end{aligned}$$

$$k_{ij} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{s \rightarrow -p_i} \left[\frac{d^{(r-j)}}{ds^{(r-j)}} \left(G(s) \cdot (s + p_i)^r \right) \right]$$

- όπου i εκφράζει την ρίζα (απλή ή πολλαπλή) της οποίας τον συντελεστή υπολογίζουμε.
- όπου j εκφράζει την θέση του συντελεστή k της πολλαπλής ρίζας με τιμές από 1 μέχρι r .
- όπου r ο αριθμός που εκφράζει την πολλαπλότητα της ρίζας.

•Βασικές Συναρτήσεις Διέγερσης Συστημάτων

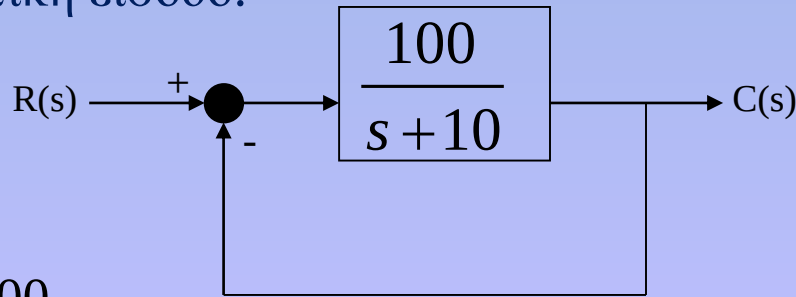
α/α	Ονομασία	Γραφική Παράσταση	Εξίσωση	Μετ. Laplace
1	Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση $u(t)$		$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \\ \text{απροσδιόριστη για } t = 0 \end{cases}$	$U(s) = \frac{1}{s}$
2	Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση $\delta(t)$ Dirac		$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t \neq 0 \\ \infty & \text{για } t = 0 \end{cases}$	$D(s) = 1$
3	Μοναδιαία Αναρριχητική Συνάρτηση $r(t)$		$r(t) = \begin{cases} t & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t \leq 0 \end{cases}$	$R(s) = \frac{1}{s^2}$

•Βασικές Συναρτήσεις Διέγερσης Συστημάτων

α/α	Ονομασία	Γραφική Παράσταση	Εξίσωση	Μετ. Laplace
4	Μοναδιαία Συνάρτηση Πύλης $g(t)$		$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t \in (0, T) \\ 0 & \text{για } t \notin (0, T) \\ \text{απροσδιόριστη για } t=0, t=T \end{cases}$	$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts}$
5	Εκθετική Συνάρτηση $f(t)$		$f(t) = Ke^{\pm \alpha t}$	$F(s) = \frac{K}{s \mp a}$
6	Ημιτονοειδής Συνάρτηση $f(t)$		$f(t) = \sin \omega t$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Παραδείγματα

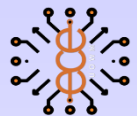
1. Να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της εξόδου $C(t)$ του εικονιζόμενου συστήματος, όταν διεγείρεται με μοναδιαία βηματική είσοδο.



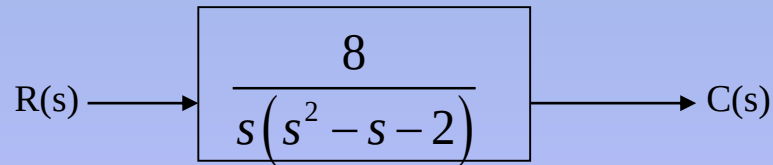
$$C(s) = \frac{100}{s+10} \cdot \frac{1}{1 + \frac{100}{s+10}} = \frac{100}{s+110} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+110}$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{100}{s(s+110)} = \frac{100}{110} \\ K_2 &= \lim_{s \rightarrow -110} (s+110) \frac{100}{s(s+110)} = \frac{-100}{110} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C(s) = \frac{100}{110} \cdot \frac{1}{s} - \frac{100}{110} \cdot \frac{1}{s+110} \Rightarrow$$

$$c(t) = \frac{100}{110} - \frac{100}{110} e^{-110t} \Rightarrow \underline{\underline{c(t) = \frac{100}{110} (1 - e^{-110t})}}$$



2. Να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της εξόδου $C(t)$ με μοναδιαία βηματική είσοδο

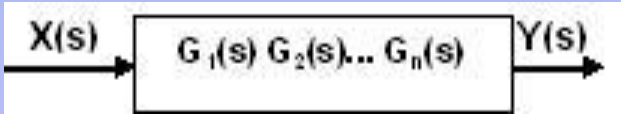
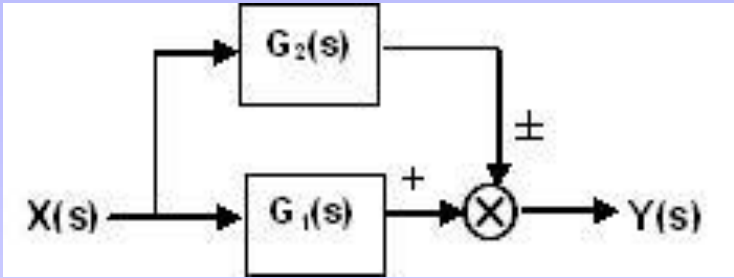
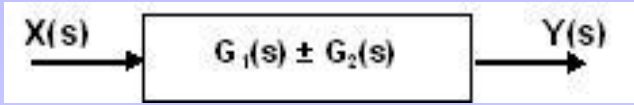
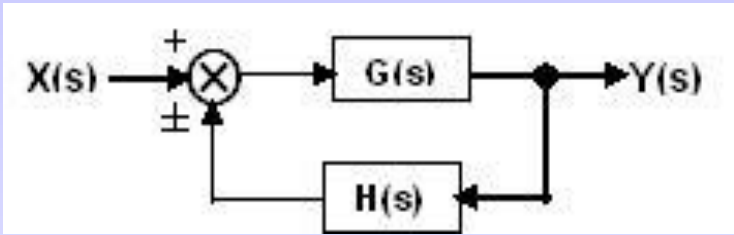
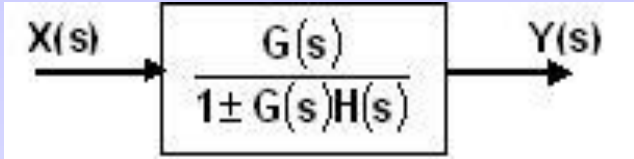


$$C(s) = \frac{8}{s(s^2 - s - 2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{8}{s^2(s^2 - s - 2)} = \frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_3}{s+1} + \frac{K_4}{s-2}$$

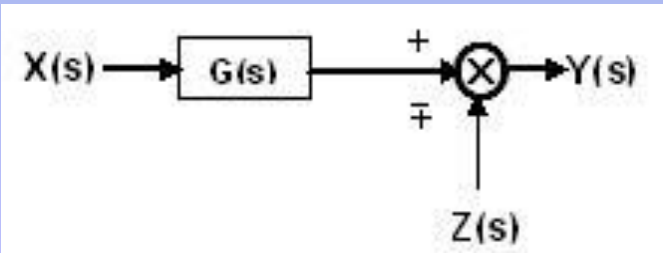
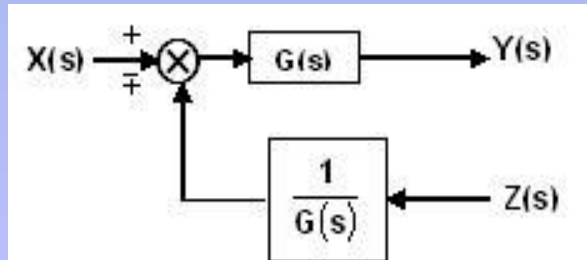
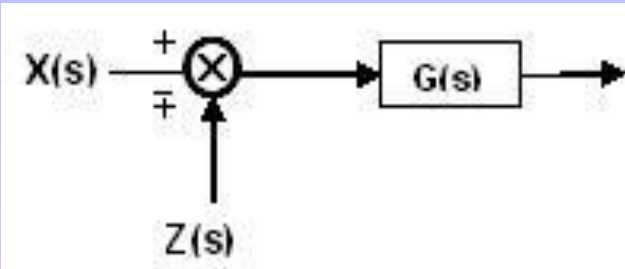
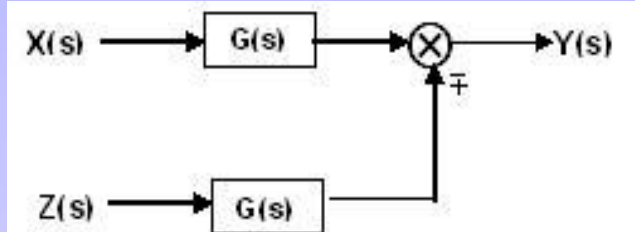
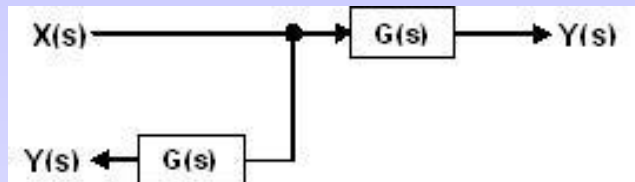
$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} \cdot s^2 \right) = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{8}{(s+1)(s-2)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-8(2s-1)}{((s+1)(s-2))^2} = \frac{8}{4} = 2 \\ K_{12} &= \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^0}{ds^0} \left(\frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} \cdot s^2 \right) = \frac{1}{0!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{8}{(s+1)(s-2)} = \frac{8}{-2} = -4 \\ K_3 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} \cdot (s+1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{8}{s^2(s-2)} = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3} \\ K_4 &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{8}{s^2(s+1)(s-2)} \cdot (s-2) = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{8}{s^2(s+1)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s^2} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-2} \Rightarrow \underline{\underline{c(t) = 2 - 4t - \frac{8}{3} \cdot e^{-t} + \frac{2}{3} \cdot e^{2t}}}$$

Μετασχηματισμοί δομικών διαγραμμάτων

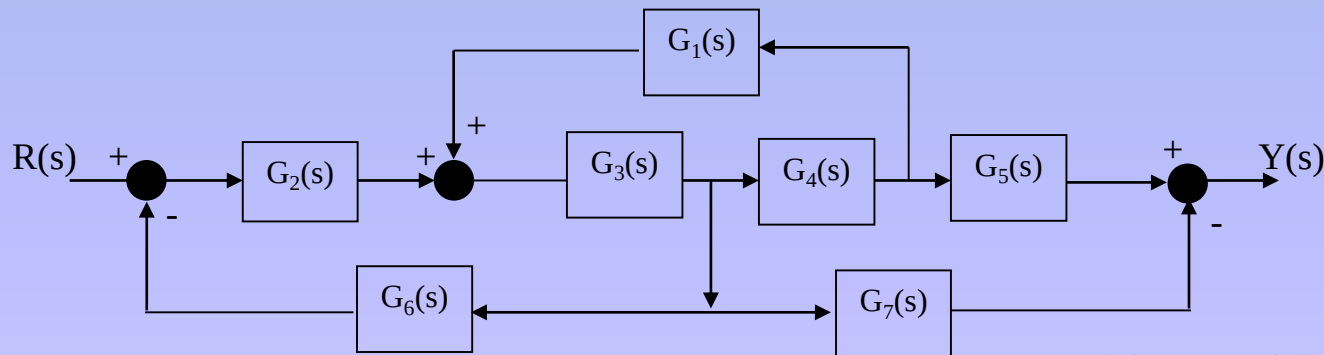
α/α	Αρχικό Διάγραμμα	Ισοδύναμο Διάγραμμα
1		
2		
3		

Μετασχηματισμοί δομικών διαγραμμάτων

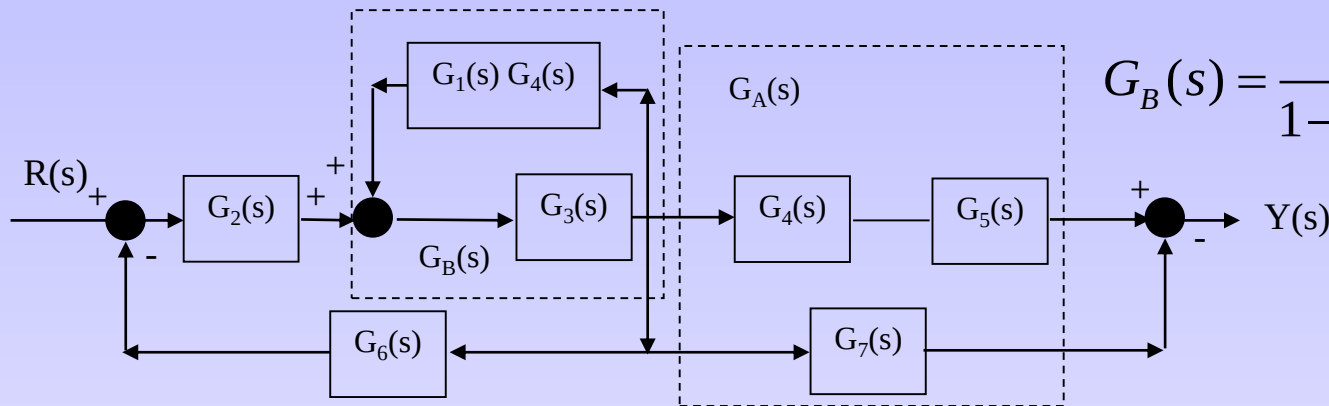
α/α	Αρχικό Διάγραμμα	Ισοδύναμο Διάγραμμα
4		
5		
6		

Παράδειγμα

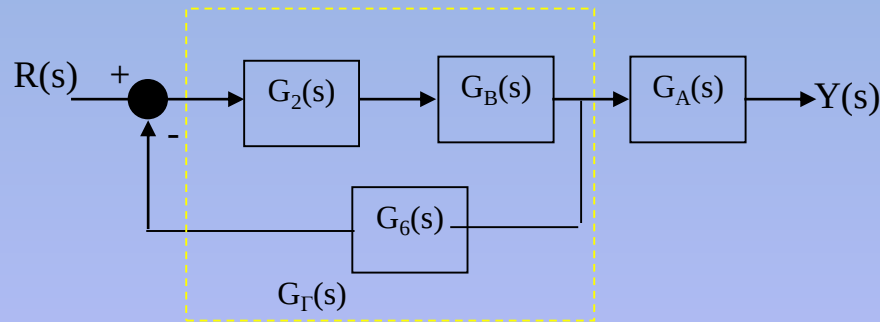
1. Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Μεταφορά (Σ.Μ) του εικονιζόμενου συστήματος:



$$G_A(s) = G_4(s) \cdot G_5(s) - G_7(s)$$

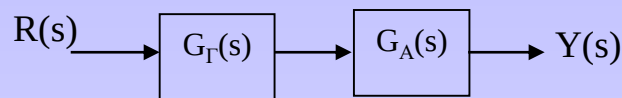


$$G_B(s) = \frac{G_3(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s)}$$



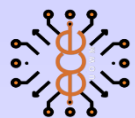
$$G_{\Gamma}(s) = \frac{G_2(s) \cdot G_B(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_B(s) \cdot G_6(s)} = \frac{G_2(s) \cdot \frac{G_3(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s)}}{1 + G_2(s) \cdot \frac{G_3(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s)} \cdot G_6(s)} =$$

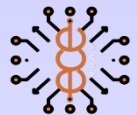
$$= \frac{G_2(s) \cdot G_3(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s) + G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_6(s)}$$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_{\Gamma}(s) \cdot G_A(s) = \frac{G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot (G_4(s) \cdot G_5(s) - G_7(s))}{1 - G_1(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s) + G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_6(s)} =$$

$$= \frac{G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s) \cdot G_5(s) - G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_7(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s) + G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_6(s)}$$



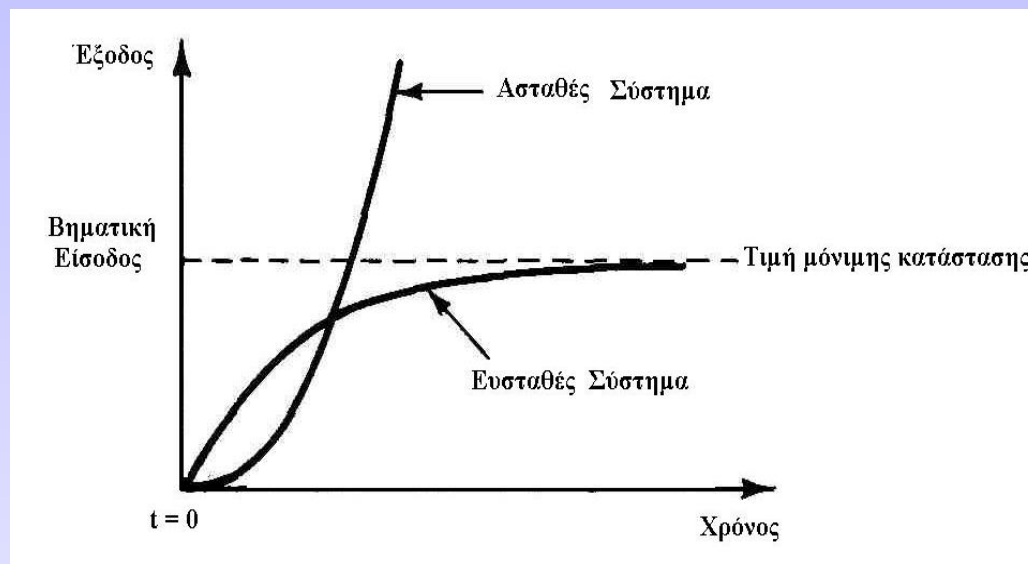
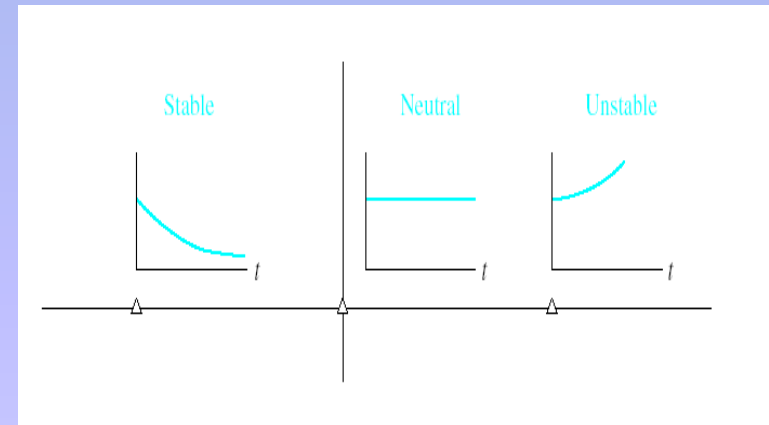
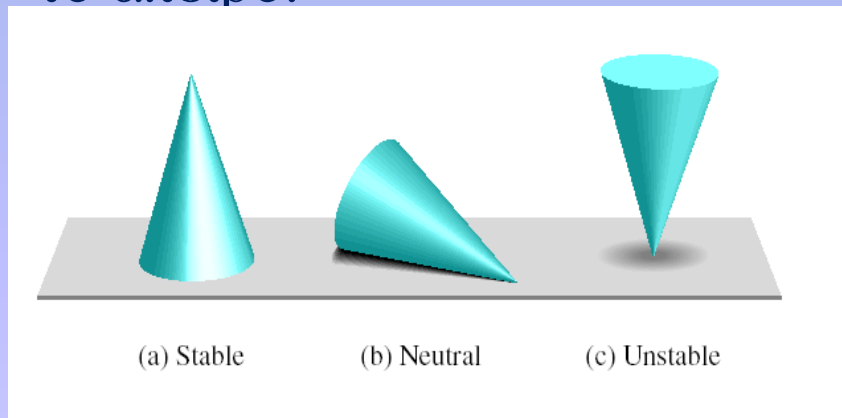


Βασικά χαρακτηριστικά συστημάτων ελέγχου

- Ευστάθεια
- Ακρίβεια
- Ταχύτητα Απόκρισης
- Ευαισθησία

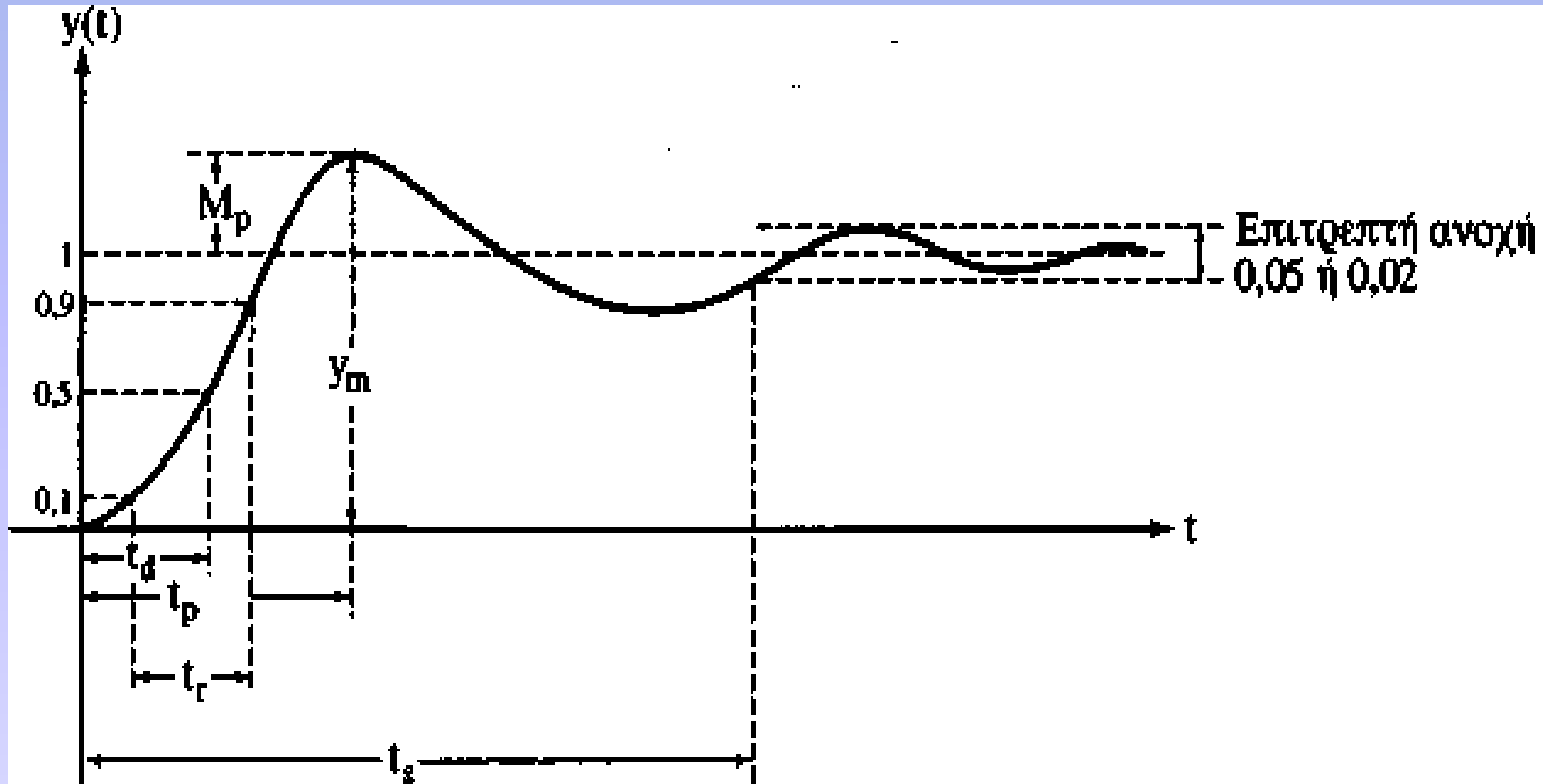
Ευστάθεια

- Ένα σύστημα είναι ευσταθές, αν για φραγμένη είσοδο η έξοδος είναι φραγμένη.
- Η έξοδος ενός ευσταθούς συστήματος βρίσκεται μέσα σε επιτρεπτά όρια.
- Η έξοδος ενός ασταθούς συστήματος αυξάνει θεωρητικά προς το άπειρο.



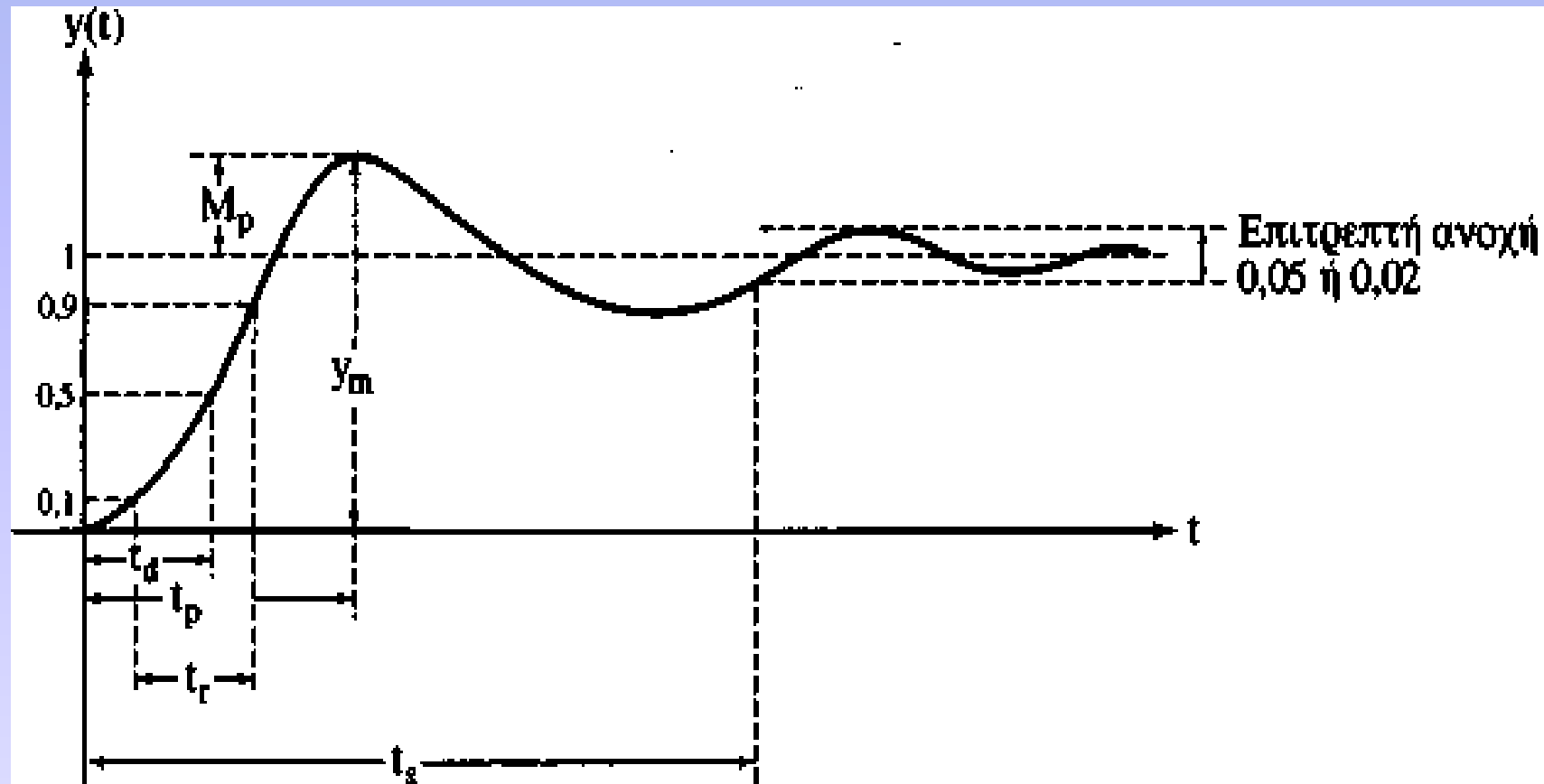
Ακρίβεια

- Η απόκλιση μεταξύ επιθυμητής και της πραγματικής τιμής να είναι μηδενική.



Ταχύτητα Απόκρισης

- Ένα σύστημα θα πρέπει να ανταποκρίνεται με ικανοποιητική ταχύτητα στις μεταβολές του σήματος εισόδου και να οδηγεί την έξοδο σε μια σταθερή τελική τιμή σε εύλογο χρονικό διάστημα.



Ευαισθησία

- Η ευαισθησία είναι η μέτρηση του πόσο εύκολα μεταβάλλεται η έξοδος ενός συστήματος σε μεταβολές των παραμέτρων του ίδιου του συστήματος όπως και σε πιθανές εξωτερικές διαταραχές.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}, \quad T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T};$$

$$\frac{\partial T}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial G} \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] = \frac{1 + G(s)H(s) - G(s)H(s)}{[1 + G(s)H(s)]^2}.$$

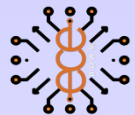
$$S_G^T = \frac{1}{[1 + G(s)H(s)]^2} \cdot \frac{G(s)}{G(s) / (1 + G(s)H(s))}$$

$$S_G^T = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}.$$

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T};$$

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] = - \frac{G(s) \cdot G(s)}{[1 + G(s)H(s)]^2}.$$

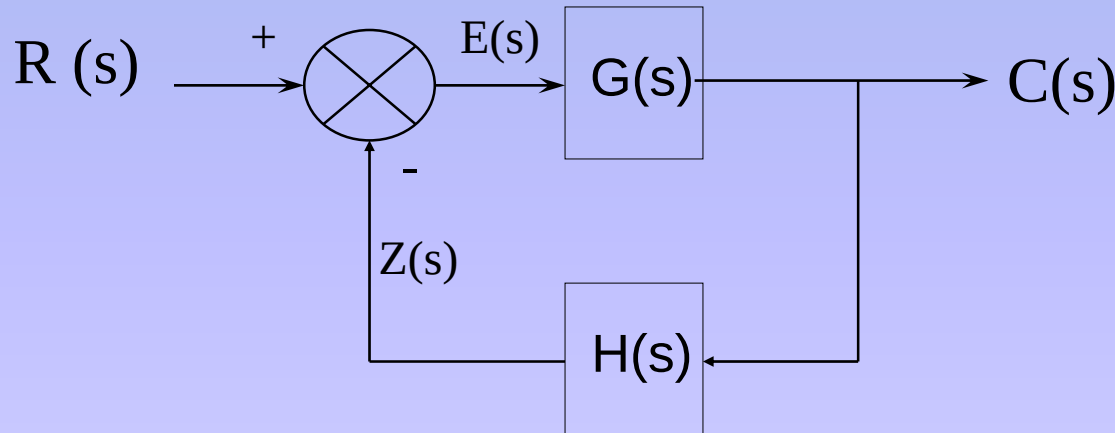
$$S_H^T = - \left(\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right)^2 \cdot \frac{H(s)}{G(s) / (1 + G(s)H(s))} = - \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$



Τύποι συστημάτων και σταθερές σφαλμάτων

Το παρακάτω σύστημα ελέγχου κλειστού βρόγχου έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_{ολ}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόγχου είναι:

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{s^r \prod_{j=1}^k |s + p_j|}$$

όπου r ο αριθμός των μηδενικών ριζών του πολυωνύμου του παρονομαστή της συνάρτησης.

*Ένα σύστημα ονομάζεται τύπου r αν έχει r πόλους στο σημείο $s=0$.

Το σφάλματος δίνεται από τη σχέση:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση ορίζεται από τη σχέση:

$$e_{ss} = e_{\mu ov} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Ορίζουμε:

Σταθερά σφάλματος θέσης την τιμή:

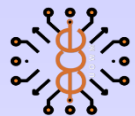
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$$

Σταθερά σφάλματος ταχύτητας την τιμή:

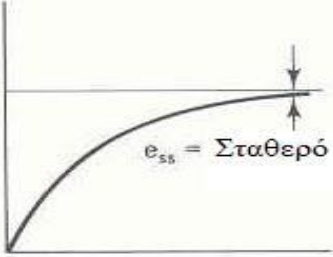
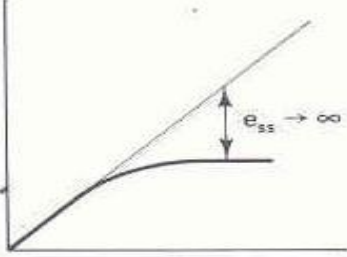
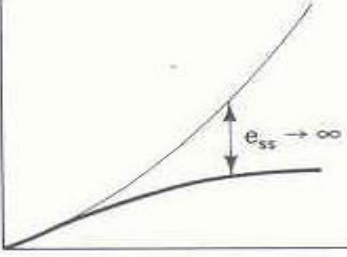
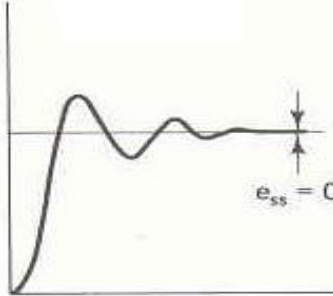
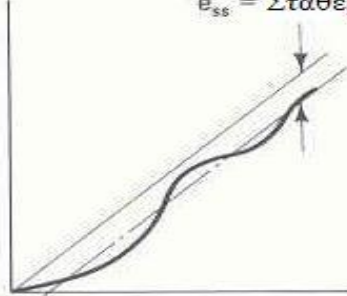
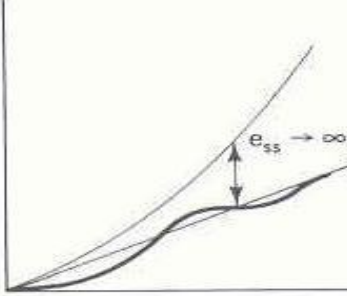
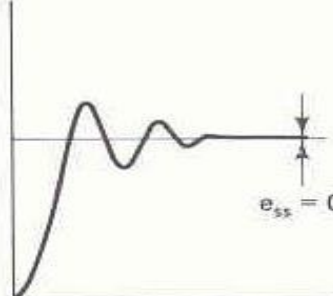
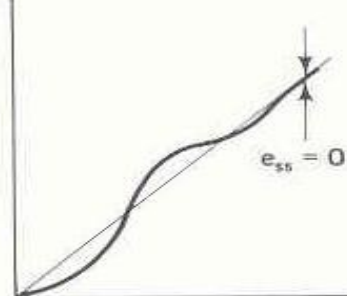
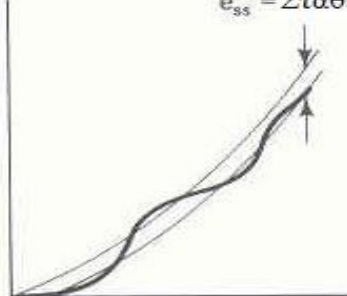
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

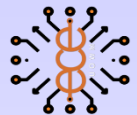
Σταθερά σφάλματος επιτάχυνσης την τιμή:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$



Γραφική αναπαράσταση μονίμου σφάλματος συστήματος ελέγχου για συγκεκριμένες συναρτήσεις εισόδου και τύπους συστημάτων

ΤΥΠΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	ΕΙΣΟΔΟΣ		
	Step	Ramp	Parabolic
0			
1			
2			



Οι τιμές των σφαλμάτων για τις περιπτώσεις της κύριας διαγωνίου της παραπάνω γραφικής απεικόνισης που δίνεται σε μορφή πίνακα 3Χ3 είναι οι εξής:

1. Είσοδος $R(s) = \frac{P}{s}$ και σύστημα τύπου 0

$$e_{ss} = e_{\mu\sigma\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{P}{s}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{P}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{P}{1 + K_p}$$

2. Είσοδος $R(s) = \frac{V}{s^2}$ και σύστημα τύπου 1

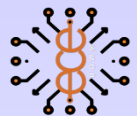
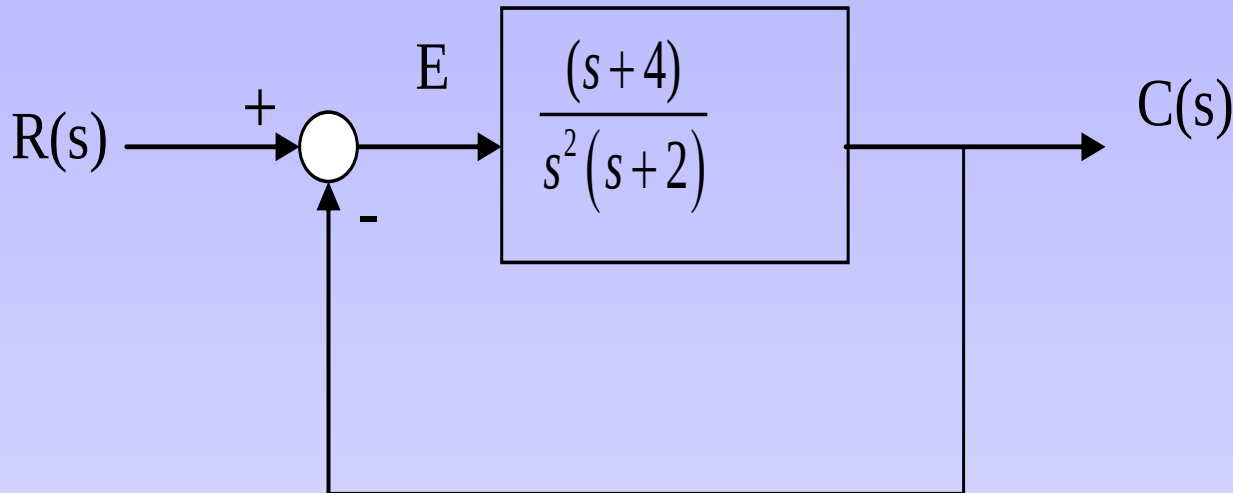
$$e_{ss} = e_{\mu\sigma\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{V}{s^2}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{V}{\lim_{s \rightarrow 0} (s + sG(s)H(s))} = \frac{V}{K_v}$$

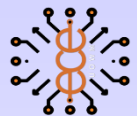
3. Είσοδος $R(s) = \frac{A}{s^3}$ και σύστημα τύπου 2

$$e_{ss} = e_{\mu\sigma\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{A}{s^3}}{1 + G(s)H(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} (s^2 + s^2G(s)H(s))} = \frac{A}{K_a}$$

Παράδειγμα

1. Να υπολογιστούν:
- α) Η σταθερά σφάλματος θέσεως και το σφάλμα θέσης .
 - β) Η σταθερά σφάλματος ταχύτητας και το σφάλμα ταχύτητας.
 - γ) Η σταθερά σφάλματος επιτάχυνσης και το σφάλμα επιτάχυνσης.





$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+4}{s^2(s+2)} = \infty \Rightarrow e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{P}{s}}{1+G(s)H(s)} = \frac{P}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{P}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s+4}{s^2(s+2)} = \infty \Rightarrow e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{V}{s^2}}{1+G(s)H(s)} = \frac{V}{\lim_{s \rightarrow 0} (s + sG(s)H(s))} = \frac{V}{K_v} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{s+4}{s^2(s+2)} = 2 \Rightarrow e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{A}{s^3}}{1+G(s)H(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} (s^2 + s^2G(s)H(s))} = \frac{A}{K_a} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Χρονική απόκριση συστημάτων 1ης & 2ης τάξης

* *Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί*

Με τον όρο **χρονική απόκριση** ενός συστήματος, εννοούμε τη συμπεριφορά του συστήματος συναρτήσει του χρόνου όταν διεγείρεται από μία συγκεκριμένη είσοδο.

Η χρονική απόκριση ενός συστήματος ελέγχου αποτελείται από δύο μέρη:

❖ Τη **μεταβατική απόκριση (transient response)** και

❖ Την **απόκριση μόνιμης κατάστασης (steady state response)**.

Αν $c(t)$ ονομάσουμε την απόκριση του συστήματος (έξοδος) τότε έχουμε:

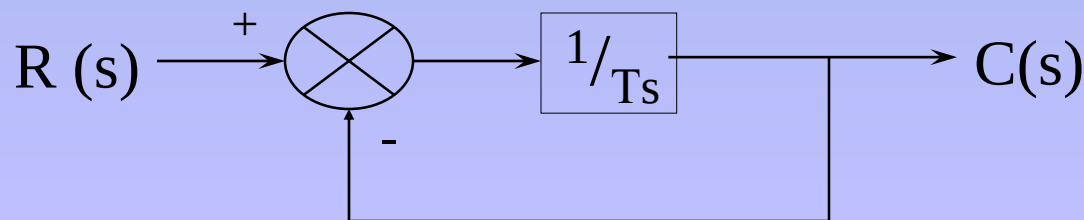
$$c(t) = c_t(t) + c_{ss}(t)$$

όπου: $c_t(t)$ = απόκριση μεταβατικής κατάστασης.

$c_{ss}(t)$ = απόκριση μόνιμης κατάστασης.

* Συστήματα πρώτης τάξης

Ας θεωρήσουμε το δομικό διάγραμμα του συστήματος 1ης τάξης του παρακάτω σχήματος

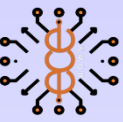


Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι της μορφής:

$$G_{ολ}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1/Ts}{1 + 1/Ts} = \frac{1}{Ts + 1} \Rightarrow$$

$$C(s) = G_{ολ}(s) \cdot R(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot R(s)$$

όπου T είναι η σταθερά χρόνου του συστήματος.



*Απόκριση συστήματος πρώτης τάξης σε διέγερση μοναδιαίας βαθμίδας

Η απόκριση του συστήματος για είσοδο της μορφής $r(t) = u(t)$ ή $R(s) = 1/s$ θα είναι:

$$C(t) = L^{-1} \{C(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1/T}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1/T} \right\}$$

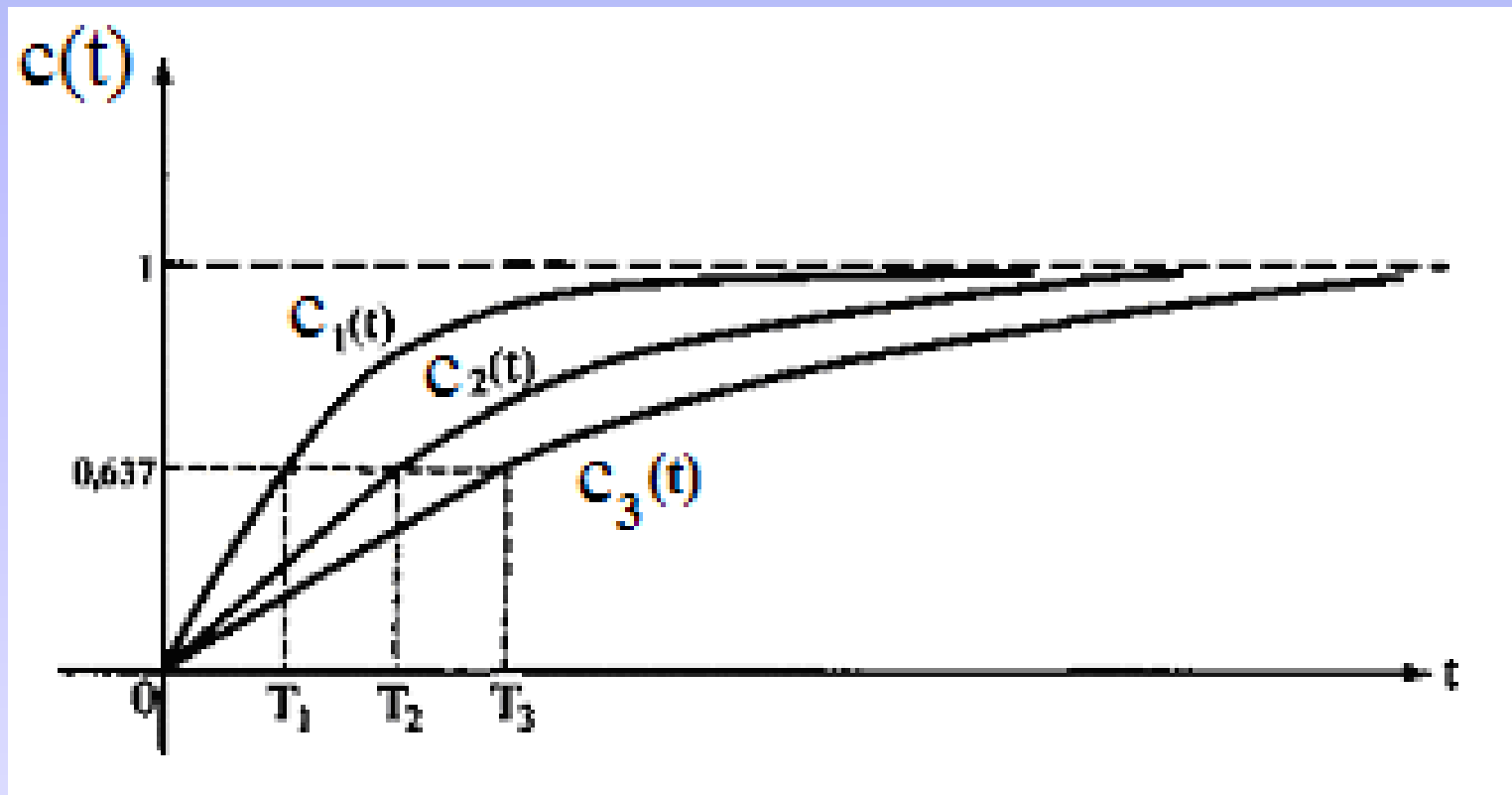
$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/T}{s \cdot (s+1/T)} = 1 \\ K_2 &= \lim_{s \rightarrow -1/T} (s+1/T) \frac{1/T}{s(s+1/T)} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} \Rightarrow$$

$$C(t) = L^{-1} \{C(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} \right\} = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}$$

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{K}{s \pm \alpha}$	$Ke^{\mp \alpha t}$

**Απόκριση συστήματος πρώτης τάξης σε διέγερση μοναδιαίας βαθμίδας*

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η καμπύλη της απόκρισης $C(t)$, για σταθερές χρόνου $T_1 < T_2 < T_3$.



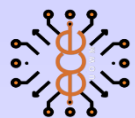
Η έξοδος ανεβαίνει εκθετικά από την τιμή 0 προς την τελική τιμή 1.
Η αρχική κλίση της καμπύλης στον χρόνο $t=0$ δίνεται από τη σχέση:

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

και η τιμή της εξόδου για $t = T$

$$C(T) = 1 - e^{-\frac{T}{T}} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2,7182} = 1 - 0,3678 = 0,6322$$

όπου η T είναι η σταθερά χρόνου του συστήματος ή ταχύτητα απόκρισης.



Χρόνος ανόδου t_r

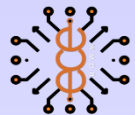
Εάν t_1 είναι ο χρόνος στον οποίο η έξοδος έχει φτάσει στο 10% της τελικής της τιμής και t_2 ο χρόνος στον οποίο η έξοδος έχει φτάσει στο 90% της τελικής τιμής τότε:

$$1 - e^{-t_1/T} = 0,1 \Rightarrow e^{-t_1/T} = 0,9 \Rightarrow \ln\left(e^{-t_1/T}\right) = \ln(0,9) \Rightarrow$$

$$-\frac{t_1}{T} \ln e = \ln(0,9) \Rightarrow -\frac{t_1}{T} = -0,1 \Rightarrow t_1 \cong 0,1T$$

$$1 - e^{-t_2/T} = 0,9 \Rightarrow t_2 = -T(\ln 0,1) \cong 2,3T$$

$$\text{Άρα } t_r = t_2 - t_1 \cong 2,2T$$

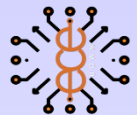


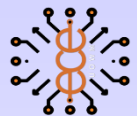
Χρόνος αποκατάστασης t_s 2%

Είναι ο χρόνος στον οποίο η έξοδος του συστήματος διαφέρει από την τελική της τιμή κατά 2%. Επομένως:

$$1 - e^{\frac{-t_s}{T}} = 1 - 0,02 \Rightarrow e^{\frac{-t_s}{T}} = 0,02 \Rightarrow \ln \left(e^{\frac{-t_s}{T}} \right) = \ln(0,02) \Rightarrow$$

$$\frac{-t_s}{T} \cdot \ln e = \ln(0,02) \Rightarrow \frac{-t_s}{T} \cong -4 \Rightarrow t_s \cong 4T$$



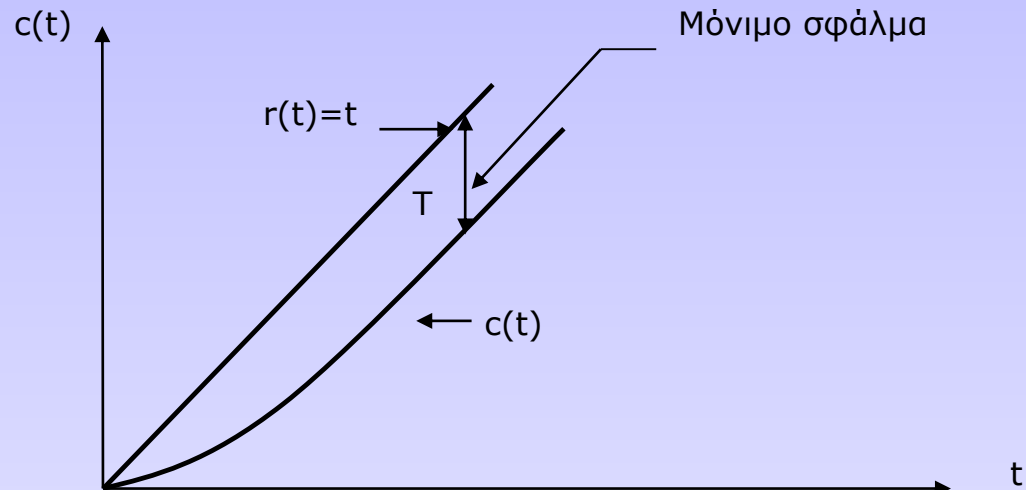


* *Απόκριση συστήματος πρώτης τάξης σε διέγερση μοναδιαίας αναρρίχησης*

Η απόκριση του συστήματος για είσοδο της μορφής $r(t) = t$ θα είναι:

$$C(t) = L^{-1} \{ C(s) \} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{Ts + 1} \bullet \frac{1}{s^2} \right\} = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω.

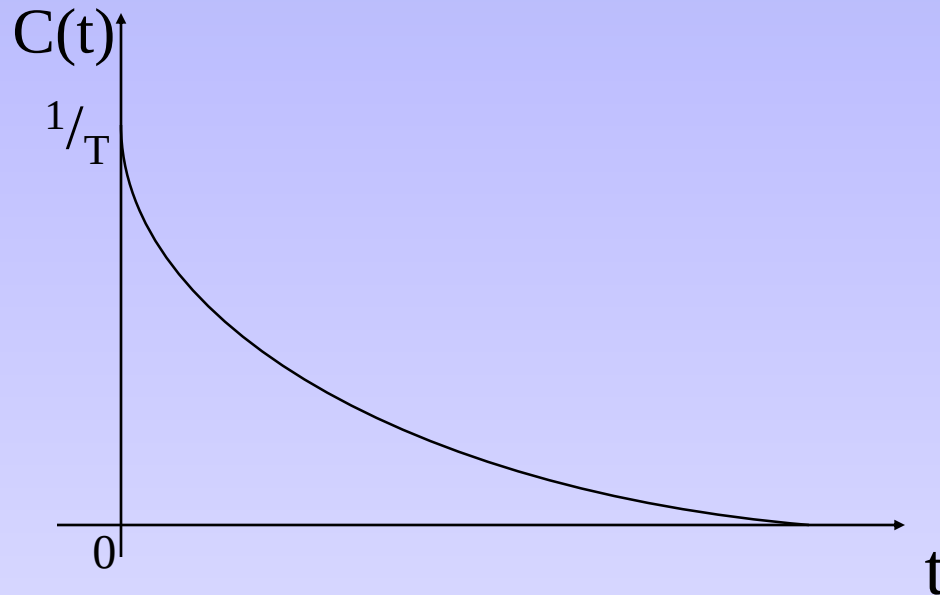


*** Κρουστική απόκριση συστήματος πρώτης τάξης**

Η απόκριση του συστήματος για είσοδο της μορφής $r(t)=\delta(t)$ θα είναι:

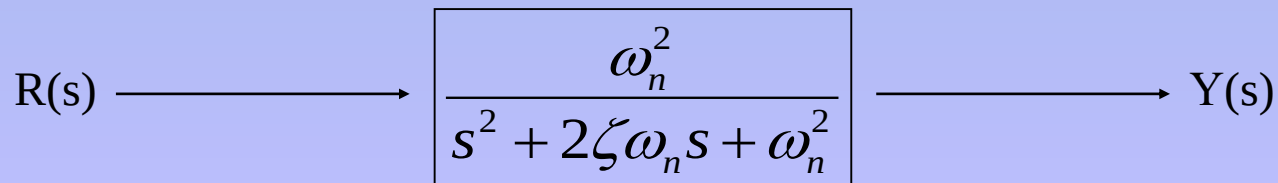
$$C(t) = L^{-1} \{ C(s) \} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{Ts+1} \bullet 1 \right\} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Η καμπύλη της κρουστικής απόκρισης απεικονίζεται παρακάτω.



* Συστήματα δεύτερης τάξης

Ας θεωρήσουμε το δομικό διάγραμμα του συστήματος 2ης τάξης του παρακάτω σχήματος



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι της μορφής:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

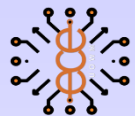
Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Οι πόλοι της $T(s)$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

δηλαδή: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ ή $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

Υπό-απόσβεση	$0 < \zeta < 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta$
Χωρίς απόσβεση	$\zeta = 0$	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$
Κρίσιμη απόσβεση	$\zeta = 1$	$s_{1,2} = -\omega_n$
Υπέρ-απόσβεση	$\zeta > 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\alpha$
Όπου	$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$	$\alpha = \sqrt{\zeta^2 - 1}$
		$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

Ο συντελεστής ζ ονομάζεται συντελεστής απόσβεσης του συστήματος (damping ratio) και το ω_n κυκλική ιδιοσυχνότητα (natural frequency) χωρίς απόσβεση.



ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΒΑΘΜΙΑΔΑΣ

1) Υπό-απόσβεση ($0 < \zeta < 1$)

Στην περίπτωση όπου $0 < \zeta < 1$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δυο ρίζες συζυγείς μιγαδικές.

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta$$

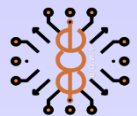
Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$c(t) = L^{-1}\{C(s)\} = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\beta} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

όπου: $\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta}{\zeta}$ ή $\varphi = \cos^{-1} \zeta$ και

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_n \beta$$

Ο συντελεστής ω_d ονομάζεται κυκλική ιδιοσυχνότητα του συστήματος με απόσβεση (damped natural frequency).



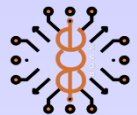
2) Κρίσιμη απόσβεση ($\zeta = 1$)

Στην περίπτωση που $\zeta=1$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές ίδιες με τιμή:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$



3) Υπέρ-απόσβεση ($\zeta > 1$)

Στην περίπτωση όπου $\zeta > 1$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές με τιμές:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$c(t) = 1 - e^{\zeta\omega_n t} \left[\cosh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot t) + \sinh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot t) \right]$$

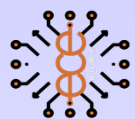
4) Μηδενική απόσβεση ($\zeta = 0$)

Στην περίπτωση όπου $\zeta = 0$ η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες συζυγείς φανταστικές:

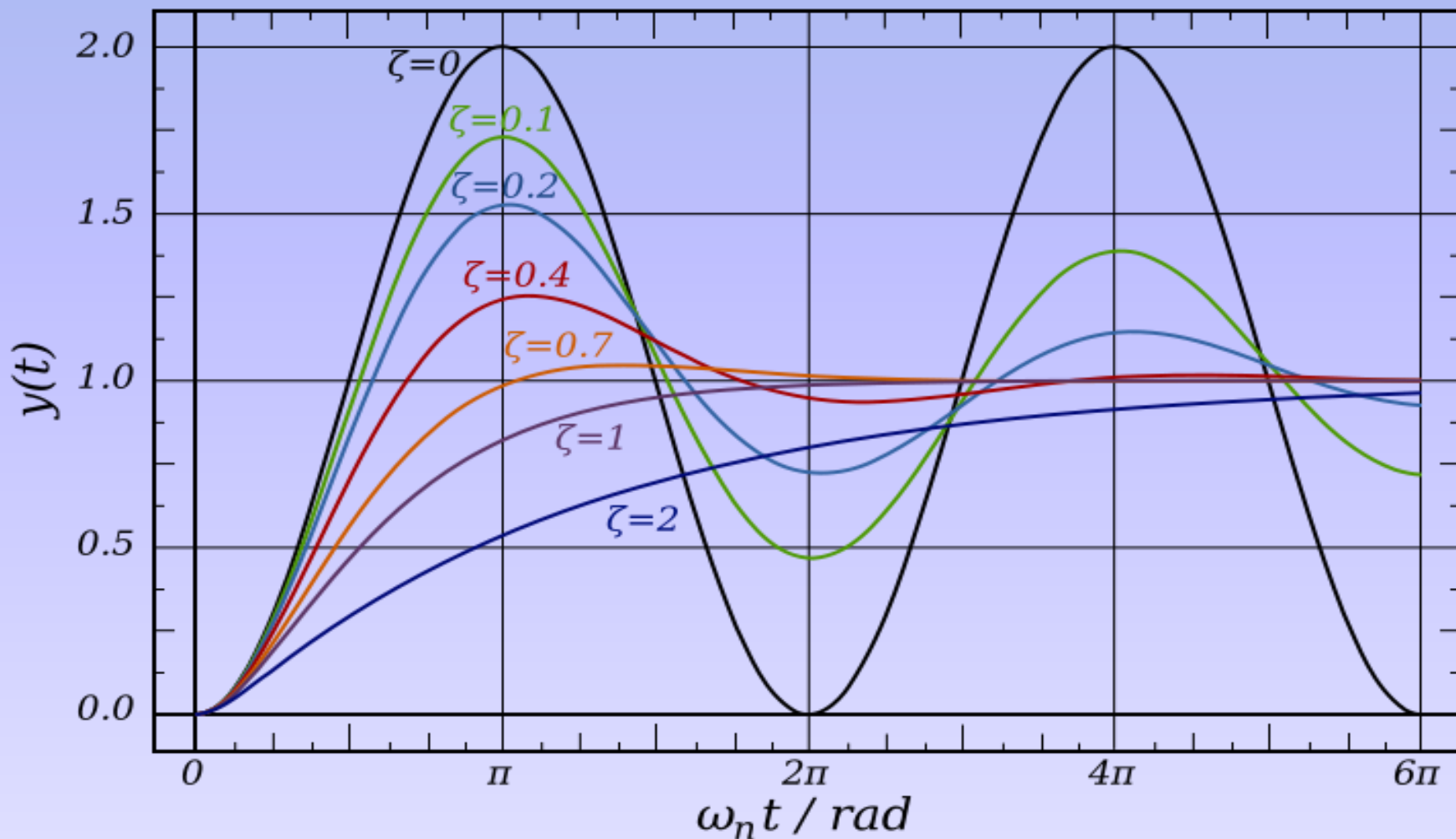
$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

Η χρονική απόκριση είναι της μορφής:

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

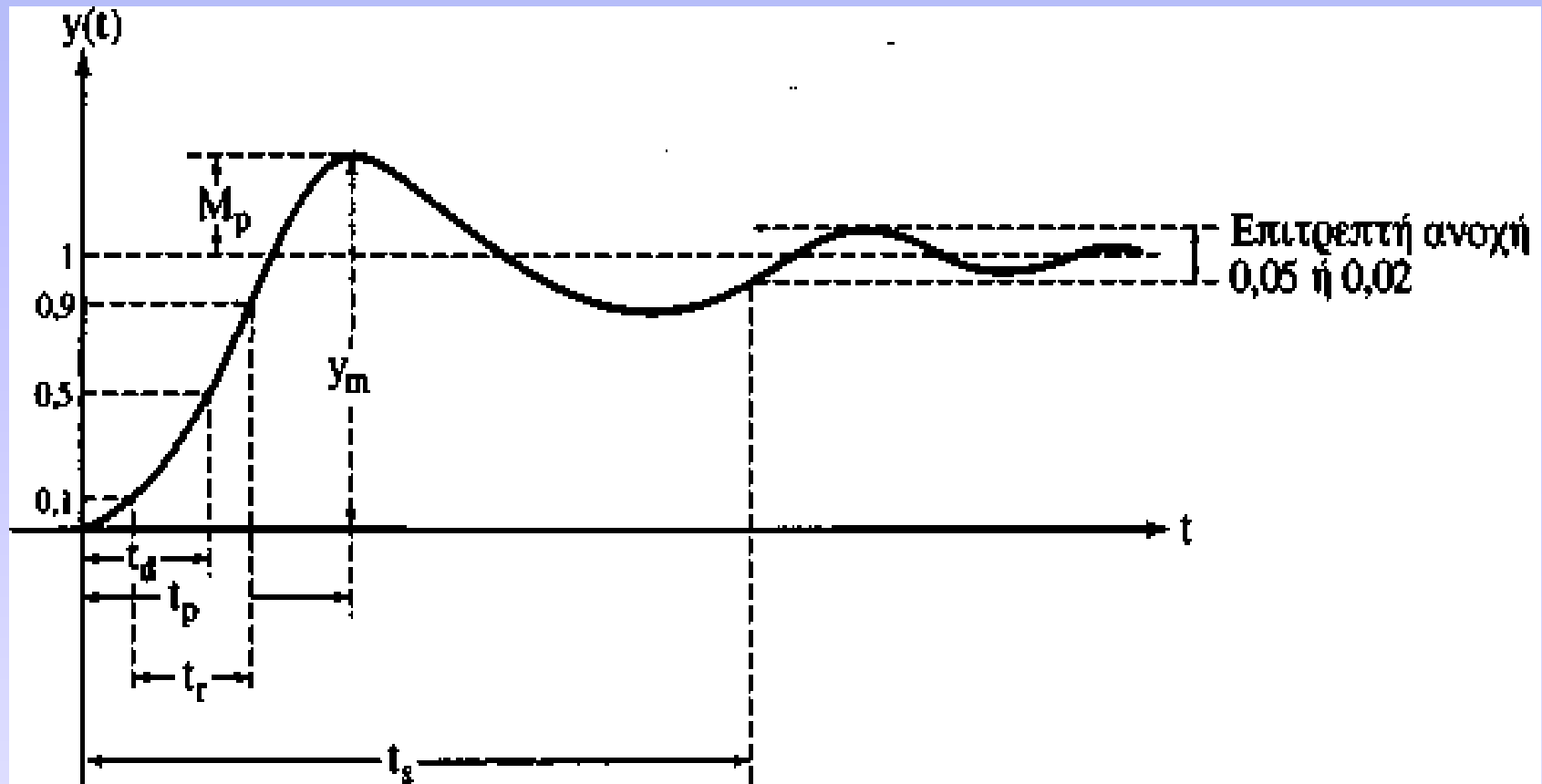


Χρονική απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης σε διέγερση μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ . Ο οριζόντιος άξονας είναι σε **radians** και αναπαριστά το χρόνο πολλαπλασιασμένο με την φυσική συχνότητα ω_n του συστήματος.



Χαρακτηριστικά μεγέθη χρονικής απόκρισης ευσταθούς συστήματος που διεγείρεται με σήμα μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

Στα πρακτικά συστήματα ελέγχου η μεταβατική απόκριση εμφανίζει αποσβενόμενες ταλαντώσεις, προτού φθάσει στη μόνιμη κατάσταση (παρακάτω σχήμα).

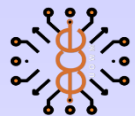


- **Χρόνος καθυστέρησης t_d (delay time):** Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει η απόκριση, για πρώτη φορά, το 50% της τελικής της τιμής.
- **Χρόνος ανύψωσης t_r (rise time):** Ο χρόνος που χρειάζεται για να ανέλθει η απόκριση από το 10% στο 90% της τελικής της τιμής και δίνεται από τη σχέση:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\zeta} \right)$$

- **Χρόνος κορυφής t_p (peak time):** Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει η απόκριση στην πρώτη κορυφή της καμπύλης και είναι:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$



Χρόνος αποκατάστασης t_s (settling time): Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει και να παραμείνει η καμπύλη απόκρισης ανάμεσα στο $\pm 2\%$ ή $\pm 5\%$ της τελικής τιμής.

Με κριτήριο ζώνης το 2% είναι:

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

Με κριτήριο ζώνης το 5% είναι:

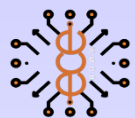
$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$$

Μέγιστη υπερύψωση M_p (maximum percent overshoot): Η διαφορά της μέγιστης τιμής c_m και της τελικής τιμής έστω c_f της $c(t)$. Το ποσοστό υπερύψωσης ορίζεται:

$$M.O = 100 \cdot e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad M_p = \frac{c_m - c_f}{c_f} \cdot 100\% \quad \text{όπου: } c_f = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$$

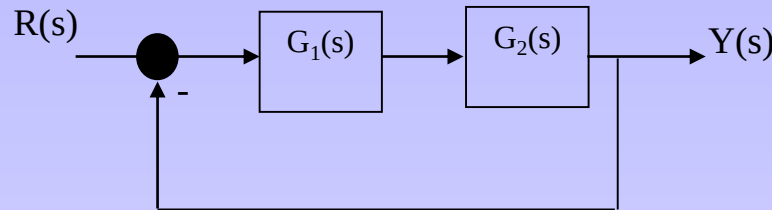
Μέγιστη τιμή της απόκρισης C_m : Η τιμή της απόκρισης στην πρώτη κορυφή της καμπύλης είναι:

$$c_m = 1 + e^{-\frac{\zeta \pi}{\beta}}$$



Παραδείγματα

1. Σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G_1(s) = \frac{1}{s(s+25)}$ συνδέεται σε σειρά με ελεγκτή με συνάρτηση μεταφοράς $G_2(s) = 625$. Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόγχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση, καθώς επίσης τα μεγέθη αυτής: ω_d , ζ , ω_n , υπερύψωση **M.O%**.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+25)} \cdot 625}{1 + \frac{1}{s(s+25)} \cdot 625 \cdot 1} = \frac{\frac{625}{s(s+25)}}{\frac{s(s+25) + 625}{s(s+25)}} = \frac{625}{s(s+25) + 625} \Rightarrow$$

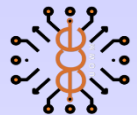
$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{625}{s^2 + 25s + 625} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow 2\zeta\omega_n = 25 \quad \& \quad \omega_n^2 = 625$$

$$\omega_n^2 = 625 \Rightarrow \omega_n = 25$$

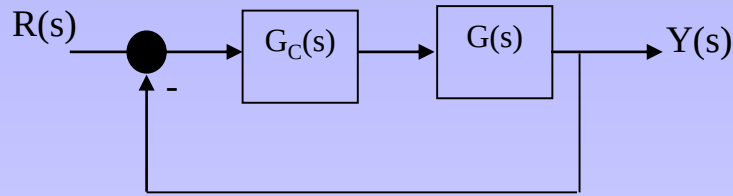
$$2\zeta\omega_n = 25 \Rightarrow 2\zeta \cdot 25 = 25 \Rightarrow 2\zeta = 1 \Rightarrow \zeta = 0.5$$

$$\begin{aligned}\omega_d &= \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 25\sqrt{1-0.5^2} = 25\sqrt{1-0.25} = 25\sqrt{0.75} = \\ &= 25 \cdot 0,866 = 21.65\end{aligned}$$

$$M.O = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100 \cdot e^{-\frac{3.14 \cdot 0.5}{\sqrt{1-0.5^2}}} = 100 \cdot e^{-1,81} = 16.36\%$$



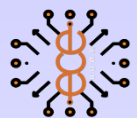
2. Σύστημα κλειστού βρόγχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση έχει συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{4}{s+2}$ και συνδέεται με αντισταθμιστή σειράς με συνάρτηση μεταφοράς $G_C(s) = \frac{s+a}{s}$. Να εκλεγεί κατάλληλη τιμή για την παράμετρο a , έτσι ώστε το ποσοστό υπερύψωσης της αντίστοιχης βηματικής απόκρισης να είναι 5%.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) \cdot G_C(s)}{1 + G(s) \cdot G_C(s) \cdot H(s)} = \frac{\frac{4}{s+2} \cdot \frac{s+a}{s}}{1 + \frac{4}{s+2} \cdot \frac{s+a}{s} \cdot 1} = \frac{\frac{4(s+a)}{s(s+2)}}{\frac{s(s+2) + 4(s+a)}{s(s+2)}} =$$

$$\frac{4(s+a)}{s(s+2) + 4(s+a)} = \frac{4(s+a)}{s^2 + 6s + 4a} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4(s+a)}{s^2 + 6s + 4a} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow 2\zeta\omega_n = 6 \quad (1) \quad \& \quad \omega_n^2 = 4a \quad (2)$$



$$M.O = 100 \cdot e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 5\% \Rightarrow$$

$$e^{-3.14\cdot\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,05 \Rightarrow e^{-3.14\cdot\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2,9957 = \frac{-3,14 \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow -2,9957\sqrt{1-\zeta^2} = -3,14 \cdot \zeta$$

$$\Rightarrow \left(-2,9957\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2 = \left(-3,14 \cdot \zeta\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8,9744(1-\zeta^2) = 9,86\zeta^2 \Rightarrow 8,9744 - 8,9744\zeta^2 = 9,86\zeta^2$$

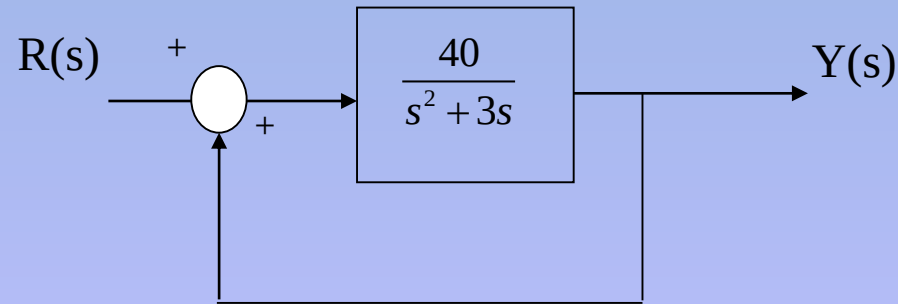
$$\Rightarrow 18,834\zeta^2 = 8,9744 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta^2 = 0.4765 \Leftrightarrow \zeta = 0,69$$

$$(1) \Rightarrow 2 \cdot 0,69 \cdot \omega_n = 6 \Rightarrow \omega_n = 4,347$$

$$(2) \Rightarrow 4,347^2 = 4 \cdot a \Rightarrow a = 4,72$$

3. Να υπολογιστεί η ΣΜ και η χρονική απόκριση $y(t)$ του ΣΚΒ με μοναδιαία είσοδο ράμπας ($r(t)=t$).



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{40}{s^2 + 3s}}{1 - \frac{40}{s^2 + 3s} \cdot 1} = \frac{40}{s^2 + 3s - 40} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{40}{s^2 + 3s - 40} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{40}{s^2 (s - 5)(s + 8)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_2}{(s - 5)} + \frac{K_3}{(s + 8)}$$

$$K_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{40}{s^2 (s-5)(s+8)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-40(s+8+s-5)}{(s-5)^2 (s+8)^2} = -\frac{3}{40}$$

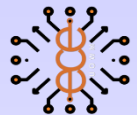
$$K_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \rightarrow 0} \left(s^2 \frac{40}{s^2 (s-5)(s+8)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{40}{(s-5)(s+8)} = -1$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow 5} \left((s-5) \frac{40}{s^2 (s-5)(s+8)} \right) = \lim_{s \rightarrow 5} \frac{40}{s^2 (s+8)} = \frac{8}{65}$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow -8} \left((s+8) \frac{40}{s^2 (s-5)(s+8)} \right) = \lim_{s \rightarrow -8} \frac{40}{s^2 (s-5)} = -\frac{5}{104}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_2}{(s-5)} + \frac{K_3}{(s+8)}$$

$$y(t) = -\frac{3}{40} - t + \frac{8}{65} \cdot e^{5t} - \frac{5}{104} \cdot e^{-8t}$$



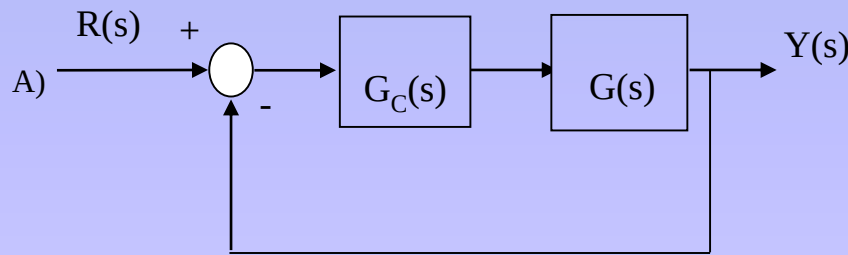
4. Για σύστημα με Σ.Μ. $G(s) = \frac{1}{s^2 + 12s}$

και αναλογικό (P) ελεγκτή σειράς με Σ.Μ. $G_c(s) = k, k > 0$
και μοναδιαία αρνητική ανάδραση.

A) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα βαθμίδων.

B) Να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της εξόδου του Σ.Κ.Β., με μοναδιαία βηματική είσοδο για $k=100$.

Γ) Να υπολογιστεί ο χρόνος μεγίστου της παραπάνω χρονικής απόκρισης.



B)

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{1}{s^2 + 12s} \cdot 1 = \frac{k}{s(s+12)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s(s+12)}}{1 + \frac{k}{s(s+12)} \cdot 1} = \frac{k}{s^2 + 12s + k}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{100}{s^2 + 12s + k} \cdot \frac{1}{s} = \frac{100}{s(s+6+8j)(s+6-8j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+6+8j)} + \frac{K_3}{(s+6-8j)}$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{100}{s(s+6+8j)(s+6-8j)} \right) = \frac{100}{(6+8j)(6-8j)} = \frac{100}{36+64} = 1$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow -6-8j} \left((s+6+8j) \frac{100}{s(s+6+8j)(s+6-8j)} \right) =$$

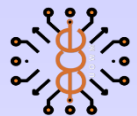
$$= \frac{100}{(-6-8j)(-6-8j+6-8j)} = \frac{100}{(-6-8j)(-16j)} = \frac{100}{-128+96j}$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow -6+8j} \left((s+6-8j) \frac{100}{s(s+6+8j)(s+6-8j)} \right) =$$

$$= \frac{100}{(-6+8j)(-6+8j+6+8j)} = \frac{100}{(-6+8j)(16j)} = \frac{100}{-128-96j}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+6+8j)} + \frac{K_3}{(s+6-8j)}$$

$$y(t) = 1 + \frac{100}{-128+96j} \cdot e^{(-6-8j)t} + \frac{100}{-128-96j} \cdot e^{(-6+8j)t}$$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s(s+12)}}{1 + \frac{k}{s(s+12)} \cdot 1} = \frac{k}{s^2 + 12s + k} = \frac{100}{s^2 + 12s + 100}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100}{s^2 + 12s + 100} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

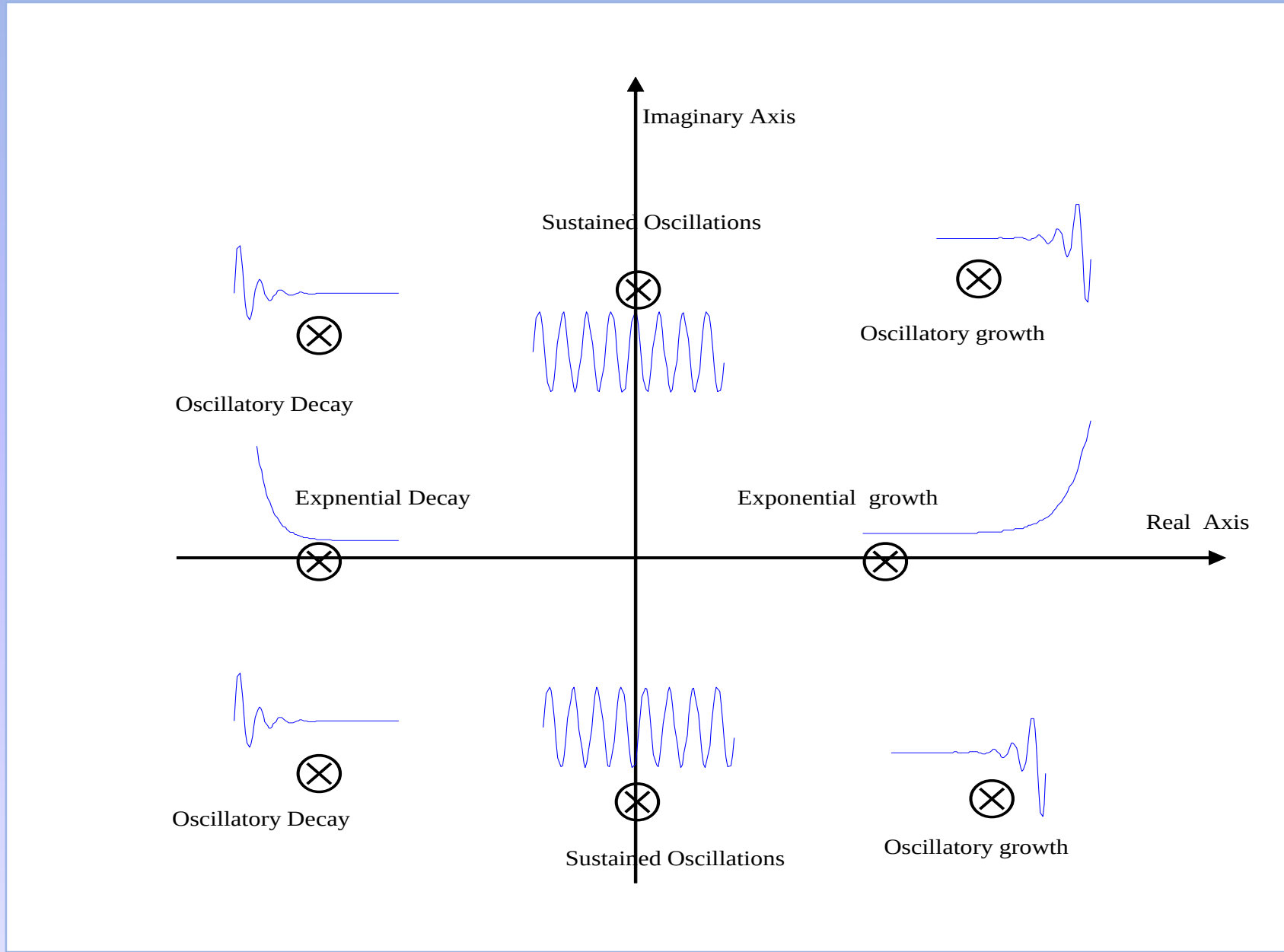
$$\Rightarrow 2\zeta\omega_n = 12 \quad \& \quad \omega_n^2 = 100 \quad \Rightarrow \omega_n = 10$$

$$\Rightarrow 2\zeta \cdot 10 = 12 \Rightarrow \zeta = 0,6$$

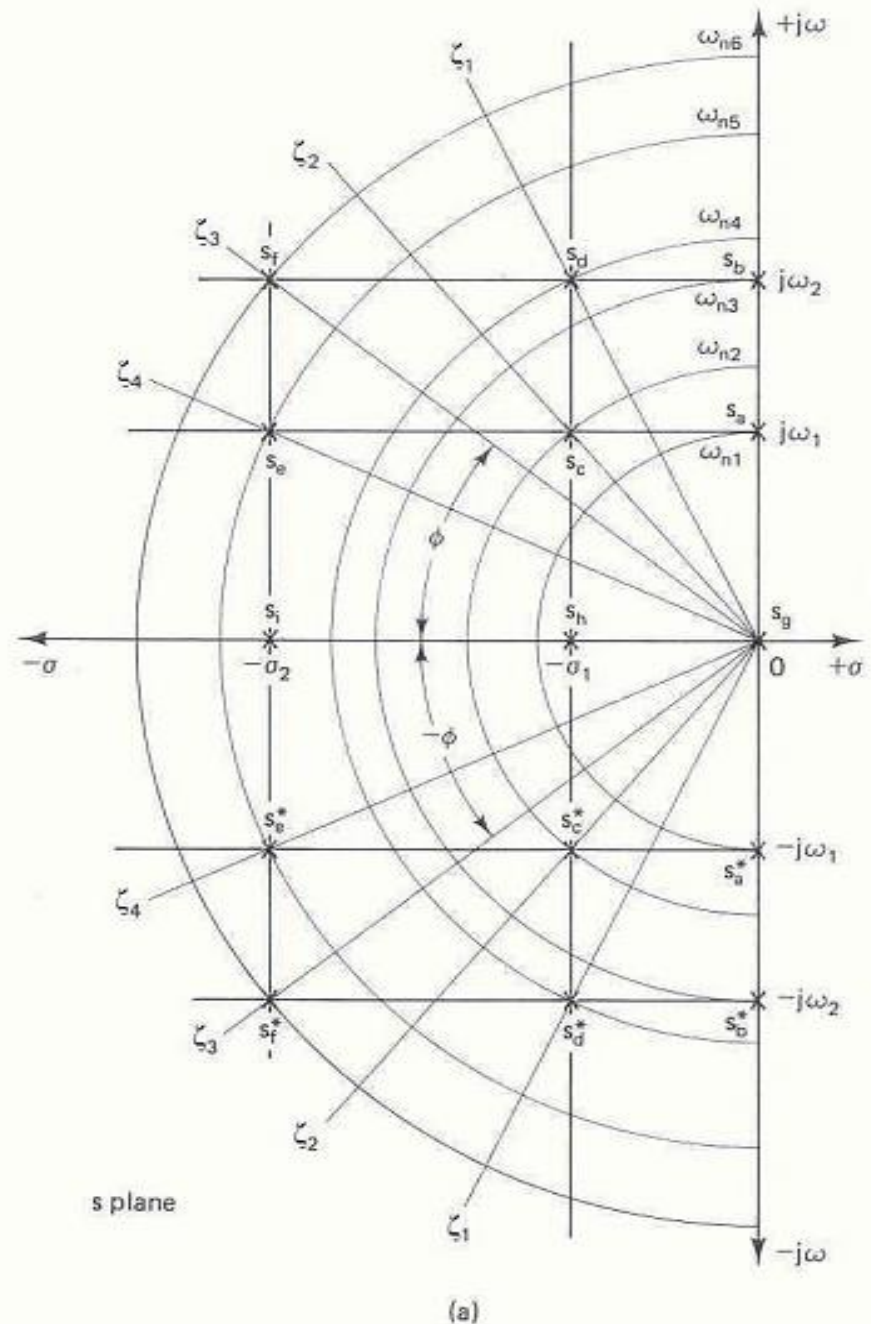
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 10\sqrt{1 - 0,6^2} = 10\sqrt{1 - 0,36} = 10\sqrt{0,64} = 10 \cdot 0,8 = 8$$

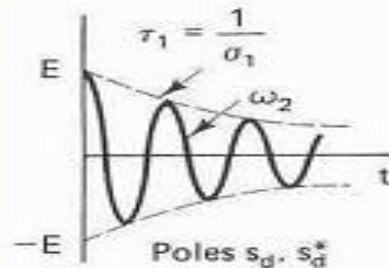
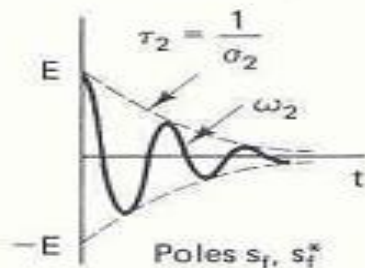
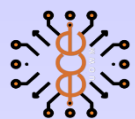
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3,14}{8} = 0,39 \text{ sec}$$

Σχέση μεταξύ της θέσης των πόλων και των μηδενικών στο πεδίο-s και την αντίστοιχη απόκριση στο πεδίο του χρόνου.

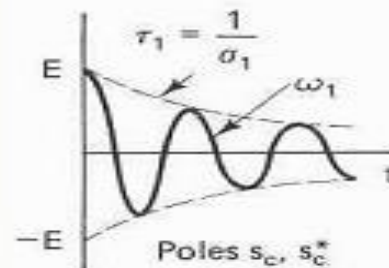
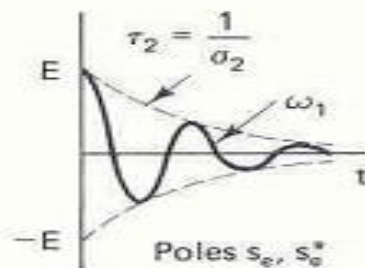
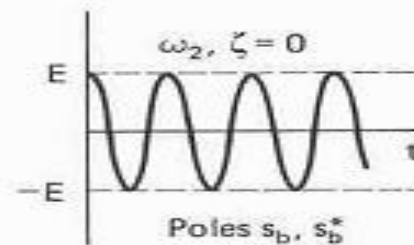


Όπως φαίνεται στα σχήματα η θέση των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο σχετίζεται άμεσα με τη χρονική απόκριση του συστήματος. Στο (a) φαίνεται η θέση των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο, στο (b) φαίνεται η χρονική απόκριση κατά μήκος του άξονα $j\omega_2$ του μιγαδικού επιπέδου, στο (c) φαίνεται η χρονική απόκριση κατά μήκος του άξονα $j\omega_1$ και στο (d) φαίνεται η χρονική απόκριση του συστήματος του οποίου οι πόλοι βρίσκονται πάνω στον αρνητικό ημιάξονα.

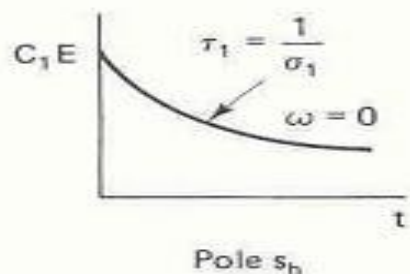
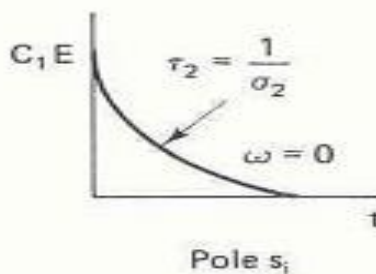
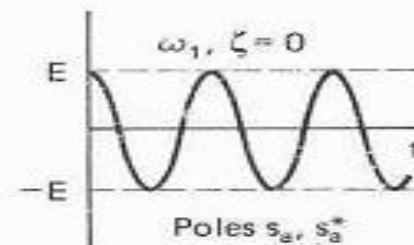




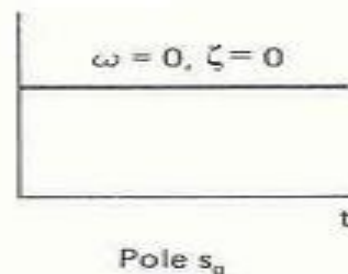
(b)



(c)



(d)

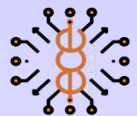


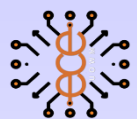
$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \zeta_2 \omega_{n2} = \zeta_1 \omega_{n4} \\ \sigma_2 &= \zeta_4 \omega_{n5} = \zeta_3 \omega_{n6} \\ \omega_1 &= \omega_{n5} (1 - \zeta_4^2)^{1/2} = \omega_{n2} (1 - \zeta_2^2)^{1/2} = \omega_{n1} \\ \omega_2 &= \omega_{n6} (1 - \zeta_3^2)^{1/2} = \omega_{n4} (1 - \zeta_1^2)^{1/2} = \omega_{n3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &< \tau_1 \\ \omega_1 &< \omega_2\end{aligned}$$

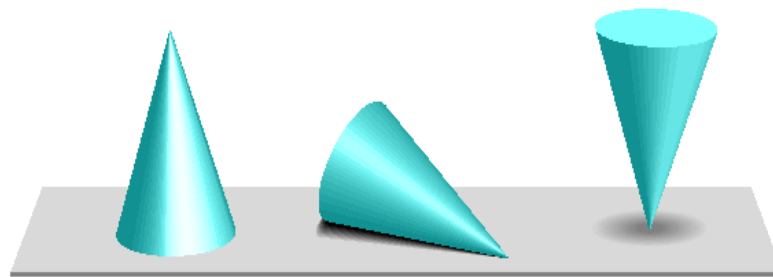
ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

- Ένα από τα βασικά πρακτικά προβλήματα της επιστήμης των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι η σχεδίαση ενός συστήματος τέτοιου ώστε:
 - η έξοδός του συστήματος να "ακολουθεί" την είσοδό του, όσο γίνεται πιο πιστά.
- Τα ασταθή συστήματα δεν μπορούν να μας εξασφαλίσουν μία τέτοια συμπεριφορά και επομένως δεν είναι χρήσιμα.
- Γι' αυτό, κατά τη σχεδίαση ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου, επιδιώκεται πρώτα και πάνω απ' όλα η εξασφάλιση της ευστάθειας του συστήματος.
- Μετά την εξασφάλιση της ευστάθειας επιδιώκεται η ικανοποίηση άλλων απαιτήσεων σχεδίασης, όπως η ταχύτητα και η ακρίβεια απόκρισης, το εύρος ζώνης, το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση, κ.λπ..





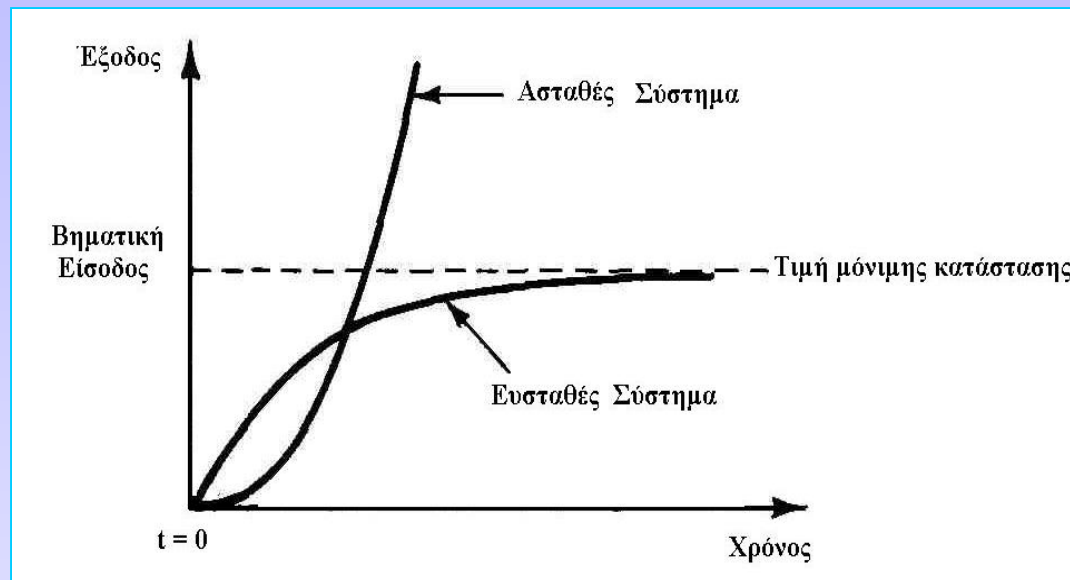
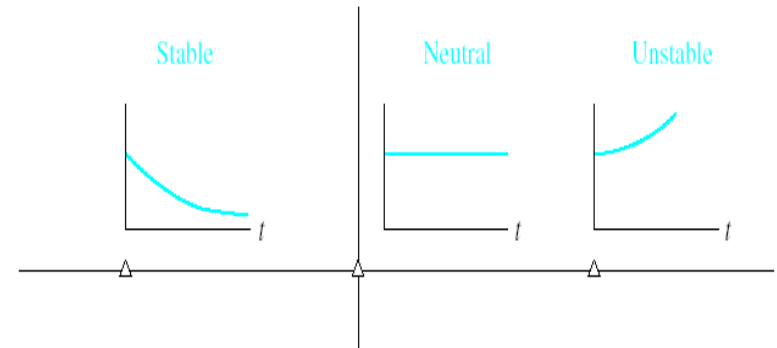
Ένα σύστημα είναι **ευσταθές**, αν για φραγμένη είσοδο η έξοδος είναι φραγμένη. Η έξοδος ενός ευσταθούς συστήματος βρίσκεται μέσα σε επιτρεπτά όρια ενώ η έξοδος ενός ασταθούς συστήματος αυξάνει θεωρητικά προς το άπειρο.

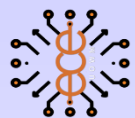


(a) Stable

(b) Neutral

(c) Unstable





Από θεωρητικής πλευράς, η έννοια της ευστάθειας έχει μελετηθεί σε βάθος και έχουν προταθεί διάφοροι ορισμοί και κριτήρια ευστάθειας.

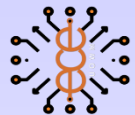
Π.χ. για την κατηγορία των γραμμικών μη χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων, ισχύει το πολύ γνωστό γεγονός, ότι η ευστάθεια συνδέεται με τη θέση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο.

Στην περίπτωση αυτή, ένα σύστημα είναι ευσταθές αν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν έστω και μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκεται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το σύστημα είναι ασταθές.

Υπάρχουν κριτήρια ευστάθειας που μας βοηθούν να διαπιστώσουμε για ποιες τιμές των παραμέτρων έχουμε ευστάθεια.

Τα γνωστότερα είναι:

- 1) Το κριτήριο Routh,
- 2) Γεωμετρικού Τόπου Ριζών (Γ.Τ.Ρ)
- 3) Bode
- 4) Nyquist, κ.λ.π.

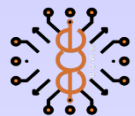
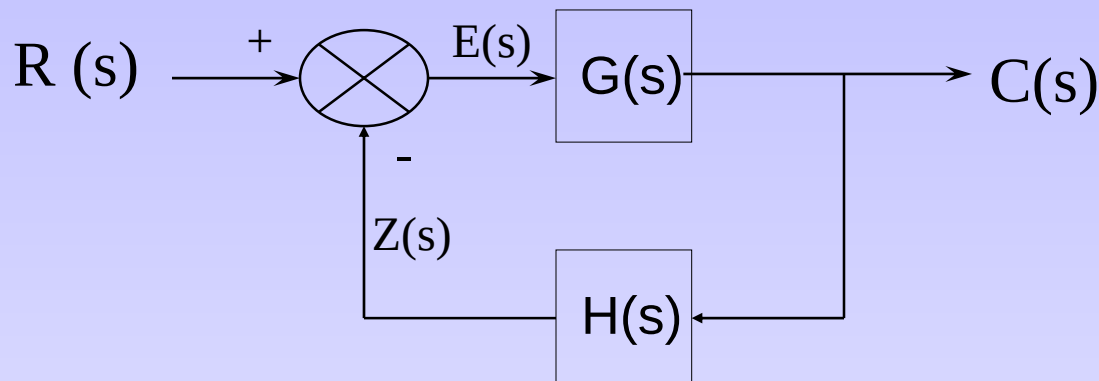


Γεωμετρικός Τόπος Ριζών

Ο (Γ.Τ.Ρ) είναι μια γραφική απεικόνιση των θέσεων των πόλων (ρίζες της Χ.Ε) του συστήματος κλειστού βρόγχου στο μιγαδικό επίπεδο-s, για όλες τις τιμές της παραμέτρου K (κέρδος) του συστήματος.

Είναι γνωστό ότι οι θέσεις των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο επηρεάζουν τη μεταβατική απόκριση του συστήματος καθώς και την ευστάθειά του.

Για το σύστημα κλειστού βρόγχου όπως αυτό εικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:



Συνάρτηση Μεταφοράς του Συστήματος (Σ.Μ.)

$$G_{ολ}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς (Σ.Μ.) του Κλάδου Δράσης $G(s)$

Συνάρτηση Μεταφοράς (Σ.Μ.) του Κλάδου Ανάδρασης $H(s)$

Συνάρτηση Μεταφοράς (Σ.Μ.) Ανοιχτού Βρόγχου $G(s)H(s)$

Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο $1 + G(s)H(s)$

Χαρακτηριστική Εξίσωση $1 + G(s)H(s) = 0$

Αν η συνάρτηση μεταφοράς (Σ.Μ) ανοικτού βρόγχου είναι της μορφής:

$$G(s)H(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = K \frac{N(s)}{D(s)}$$

τότε η Σ.Μ του συστήματος θα είναι:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + K \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{G(s)D(s)}{D(s) + KN(s)}$$

από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι η μεταβολή των τιμών της παραμέτρου **K** επηρεάζει τις τιμές των ριζών της Χ.Ε του συστήματος με αποτέλεσμα τη μετατόπισή τους πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτό μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα πάνω στο μιγαδικό επίπεδο που θα είναι το σύνολο των σημείων που θα είναι ρίζες της Χ.Ε. του συστήματος αν η παράμετρος **K** πάρει όλες τις τιμές από το 0 μέχρι το $+\infty$.

Το διάγραμμα που προκύπτει όταν το **K** πάρει τιμές μεταξύ του $-\infty$ και του μηδενός ονομάζεται συμπληρωματικός Γ.Τ.Ρ..

Από την Χ.Ε προκύπτουν τα παρακάτω:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow G(s)H(s) = -1$$

$$|G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle(G(s)H(s)) = (2\mu + 1)\pi, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ Συνθήκη φάσης για το Γ.Τ.Ρ.}$$

$$|K| \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = 1$$

Συνθήκη μέτρου για το Γ.Τ.Ρ.

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της παραμέτρου **K** πάνω στο διάγραμμα.

* *Κανόνες Προσεγγιστικής Χάραξης του Γ.Τ.Ρ.*

1. Οι πόλοι της $G(s)H(s)$ είναι τα σημεία εκκίνησης του Γ.Τ.Ρ.
2. Τα μηδενικά (zeros) της $G(s)H(s)$ και το άπειρο όταν $m < n$ είναι τα σημεία λήξης του Γ.Τ.Ρ.
3. Ο αριθμός των κλάδων του τόπου ριζών ισούται με το $\max(m, n)$ όπου m είναι το πλήθος των μηδενικών και n είναι το πλήθος των πόλων της $G(s)H(s)$
4. Ο Γ.Τ.Ρ. είναι συμμετρικός ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.
5. Το σημείο τομής των ασύμπτωτων ευθειών με τον άξονα των πραγματικών αριθμών δίδεται από την σχέση.

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

όπου $\sum_{i=1}^n p_i$ = το άθροισμα των τιμών των πόλων της

όπου $\sum_{j=1}^m z_j$ = το άθροισμα των τιμών των μηδενικών της

- 6 Οι γωνίες που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες με τον πραγματικό άξονα δίνεται από τη σχέση.

$$\phi_{\alpha_{\mu}} = \frac{(2\mu+1)\pi}{n-m}, \quad \mu = 0,1,2,\dots((n-m)-1) \quad K \geq 0$$

όπου $((n-m)-1)$ είναι η τελευταία τιμή του μ .

7. Ένα τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι τμήμα του Γ.Τ.Ρ. αν το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος είναι περιττό. (για $K \geq 0$).
8. Τα σημεία αποχωρισμού και άφιξης των κλάδων από και προς τον οριζόντιο άξονα ονομάζονται σημεία θλάσης του Γ.Τ.Ρ. και υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$K = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \text{ή} \quad D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 0$$

κάθε ρίζα της παραπάνω εξίσωσης αποτελεί ένα δεκτό σημείο θλάσης αν είναι ταυτόχρονα και ρίζα της Χ.Ε. του συστήματος για κάποια τιμή του K .

9. Οι γωνίες αναχώρησης του Γ.Τ.Ρ. από μιγαδικό πόλο ή άφιξης σε μιγαδικό μηδενικό υπολογίζονται από τη σχέση:

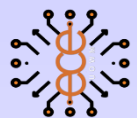
$$\angle \varphi_d = (2\mu + 1)\pi - \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{p_i} - \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j} \right)$$

όπου: $\sum_{i=1}^n \varphi_{p_i}$ = το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών που σχηματίζουν οι πόλοι ως προς τον αναφερόμενο μιγαδικό πόλο (μηδενικό)

$\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j}$ = το αλγεβρικό άθροισμα των γωνιών που σχηματίζουν τα μηδενικά ως προς τον αναφερόμενο μιγαδικό πόλο (μηδενικό).

Τα σημεία τομής του Γ.Τ.Ρ. με τον άξονα των φανταστικών αριθμών είναι τα σημεία όπου το σύστημα μεταπίπτει από την ευστάθεια στην αστάθεια.

Οι τιμές του K και του ω για τα σημεία αυτά, ονομάζονται κρίσιμο κέρδος (K_{cr}) και κρίσιμη συχνότητα (ω_{cr}) αντίστοιχα.



* **Κριτήριο Routh**

Το κριτήριο ευστάθειας Routh, προσδιορίζει τον αριθμό των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου που βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο-s και δίνει απάντηση στο ερώτημα:

«είναι το σύστημα ευσταθές;», χωρίς να προσδιορίζει τη σχετική ευστάθεια του συστήματος όπως συμβαίνει με άλλα κριτήρια όπως του Γ.Τ.Ρ. που είδαμε προηγουμένως.

Ας θεωρήσουμε ότι η Χ.Ε $1 + G(s)H(s) = 0$ της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος έχει την παρακάτω γενική μορφή:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

όπου όλοι οι συντελεστές $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ και είναι $\neq 0$

Εφ' όσον όλοι οι συντελεστές είναι ΟΜΟΣΗΜΟΙ, σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα του Routh.

Πίνακας Routh

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	.	.	.
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	.	.	.
s^{n-2}	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	.	.	.	.
s^{n-3}	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
s^1	e_n	e_{n-1}	.	.	.	.	.
s^0	f_n	f_{n-1}	.	.	.	.	.

Όπου οι όροι, $b_n, b_{n-1}, \dots, c_n, c_{n-1}, \dots, e_n \dots$ υπολογίζονται ως εξής:

$$b_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_n = \frac{b_n a_{n-3} - b_{n-1} a_{n-1}}{b_n}$$

$$c_{n-1} = \frac{b_n a_{n-5} - b_{n-2} a_{n-1}}{b_n}$$

Σύμφωνα με το ΚΡΙΤΗΡΙΟ του Routh για να είναι ευσταθές ένα σύστημα πρέπει οι όροι της πρώτης στήλης του πίνακα Routh να είναι **ΟΜΟΣΗΜΟΙ**.

Ο αριθμός των ριζών της Χ.Ε που βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο s ισούται με τον αριθμό αλλαγών του πρόσημου των συντελεστών της πρώτης στήλης του πίνακα Routh.

Ειδικές περιπτώσεις για την συμπλήρωση του πίνακα Routh

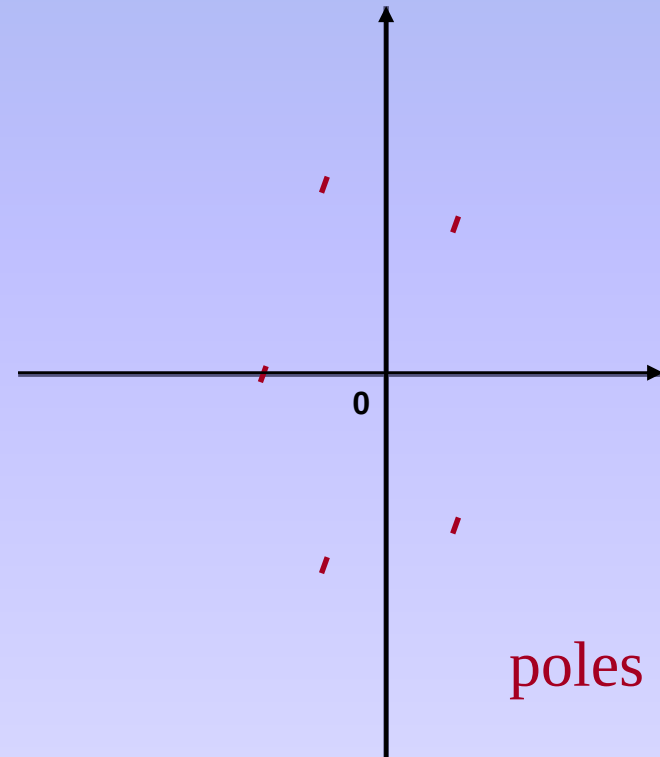
- α. Όταν ένας όρος της πρώτης στήλης είναι μηδέν, ενώ οι υπόλοιποι όροι της σειράς είναι διάφοροι του μηδενός ή δεν υπάρχουν, τότε, αντικαθίσταται ο μηδενικός όρος, από ένα πολύ μικρό αριθμό ομόσημο με τους προηγούμενους της πρώτης στήλης, και συνεχίζεται η ανάπτυξη του πίνακα.
- β. Όταν όλοι οι όροι μίας σειράς του πίνακα Routh είναι μηδενικοί, ο πίνακας συμπληρώνεται με την τοποθέτηση, αντί των μηδενικών όρων με τους όρους της παραγωγισμένης βοηθητικής εξίσωσης της αμέσως προηγούμενης σειράς.
- γ. Όταν τουλάχιστον δύο σειρές έχουν μηδενικούς όρους, τότε το σύστημα είναι ασταθές και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει δύο αντίθετους πραγματικούς πόλους με πολλαπλότητα 2.
- δ. Για την εύρεση της κρίσιμης (οριακής) τιμής του K για ευστάθεια αρκεί να μηδενιστεί ο όρος της σειράς s_1 και να λυθεί η εξίσωση ως προς $K=K_{cr}$.
- ε. Για την εύρεση της οριακής συχνότητας ταλαντώσεων του συστήματος αρκεί να λυθεί η βοηθητική εξίσωση της σειράς s_2 ως προς $\omega=\omega_{cr}$. Αυτή θα έχει τη μορφή: $\lambda_n s^2 + \lambda_{n-1} = 0$ όπου λ_n, λ_{n-1} οι συντελεστές της σειράς s_2 και όπου k θα τεθεί η τιμή K_{cr} που βρέθηκε .

Παράδειγμα 1 :Κριτήριο Routh-Hurwitz

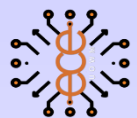
Χαρακτηριστική εξίσωση $s^5 + s^4 + 6s^3 + 5s^2 + 12s + 20 = 0$

Πίνακας Routh

$s^5:$	1	6	12	0
$s^4:$	1	5	20	0
$s^3:$	1	-8	0	
$s^2:$	13	20	0	
$s^1:$	$-\frac{124}{13}$	0		
$s^0:$	20	0		



2 πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο



Παράδειγμα 2 :Κριτήριο Routh-Hurwitz

Χαρακτηριστική εξίσωση $s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 12s + 10 = 0$

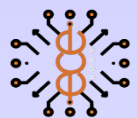
Πίνακας Routh

$s^5:$	1	5	12	0
$s^4:$	1	5	10	0
$s^3:$	ε	2	0	
$s^2:$	c_1	10	0	
$s^1:$	d_1	0		
$s^0:$	10	0		

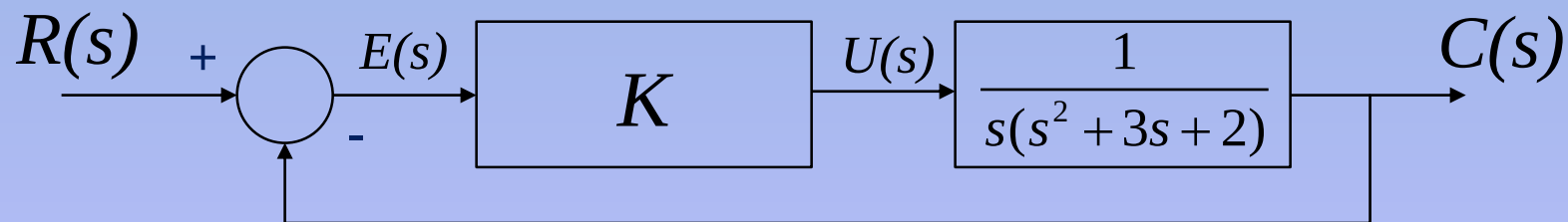
$$c_1 = \frac{5\varepsilon - 2}{\varepsilon} \approx \frac{-2}{\varepsilon}$$

$$d_1 = \frac{2c_1 - 10\varepsilon}{c_1} \approx 2$$

2 πόλοι στο δεξιό ημιεπίπεδο



Να σχεδιαστεί ο Γ.Τ.Ρ του εικονιζόμενου συστήματος κλειστού βρόγχου.

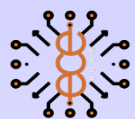
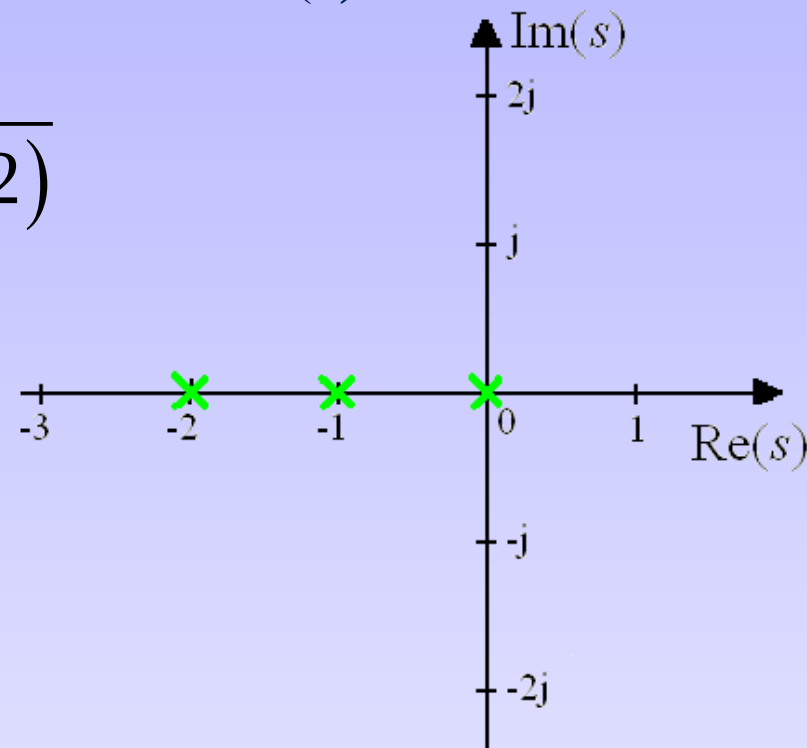


ΒΗΜΑ 1^ο : ΑΦΟΥ ΒΡΩ ΤΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΤΗΣ $G(s)H(s)$, ΤΑ ΣΧΕΔΙΑΖΩ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ-S ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ ΜΕ (x) ΚΑΙ ΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΜΕ (o).

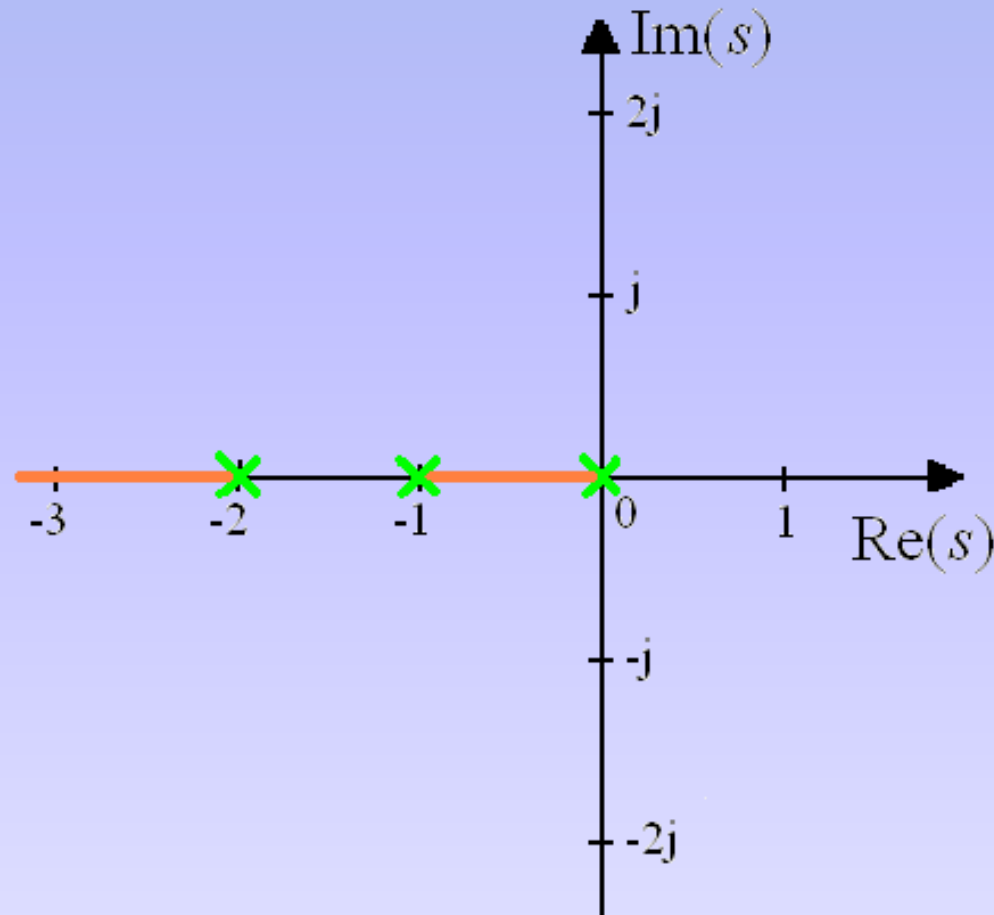
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

3 πόλοι: $p_1 = 0$; $p_2 = -1$; $p_3 = -2$

Κανένα μηδενικό.



ΒΗΜΑ 2^ο : Ένα τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι κλάδος του Γ.Τ.Ρ. αν το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του κλάδου είναι περιττό. (για $K \geq 0$).



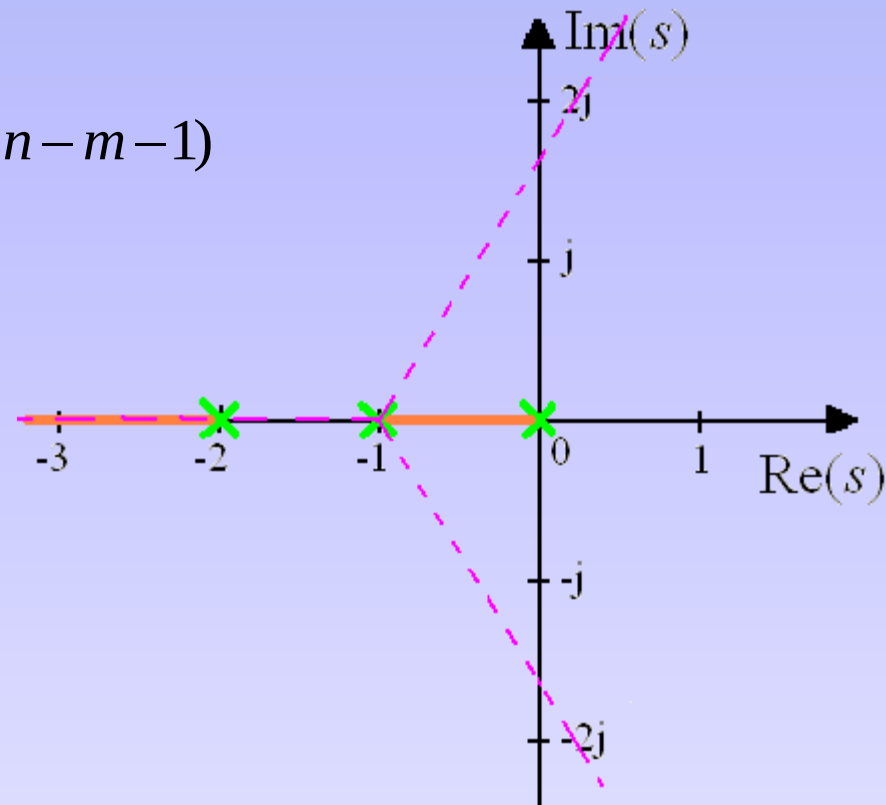
ΒΗΜΑ 3ο: Υπολογισμός των ασύμπτωτων

$$\sigma_a = \frac{\sum_n p_i - \sum_m z_i}{n - m}$$

$$\sigma_a = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3 - 0} = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

$$\varphi_l = \frac{(2\mu + 1)180^\circ}{n - m} \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, (n - m - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = \frac{180^\circ (2 \times 0 + 1)}{3 - 0} = 60^\circ \\ \varphi_1 = \frac{180^\circ (2 \times 1 + 1)}{3 - 0} = 180^\circ \\ \varphi_2 = \frac{180^\circ (2 \times 2 + 1)}{3 - 0} = 300^\circ \end{cases}$$



ΒΗΜΑ 4ο: Υπολογισμός σημείου αποχώρησης

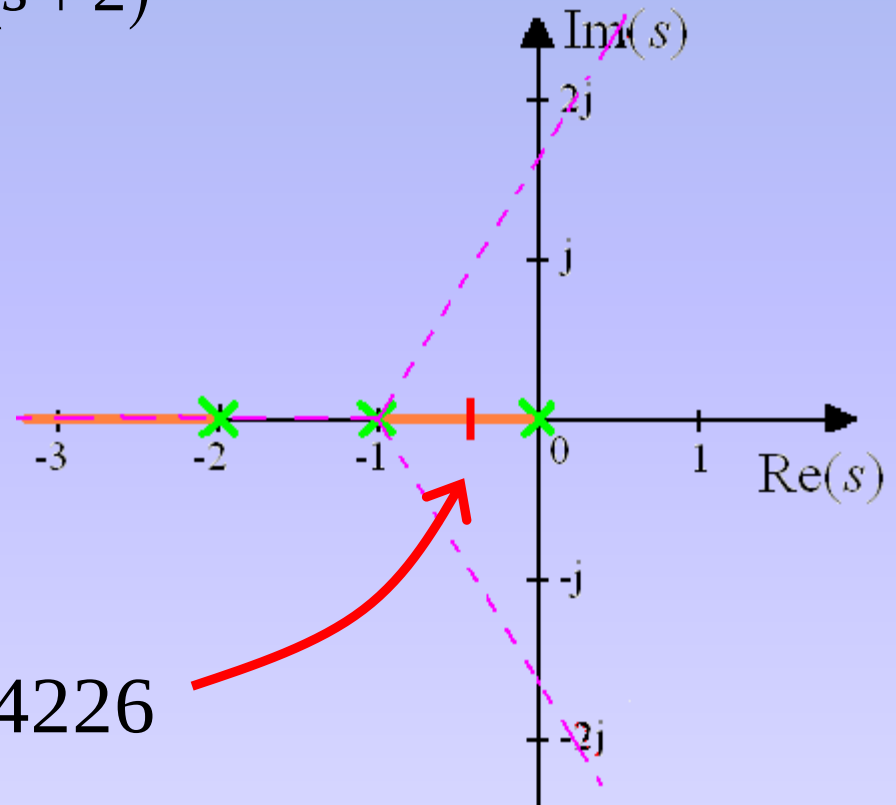
$$K = \frac{-1}{G(s)H(s)} = -s(s+1)(s+2)$$

$$K = -s^3 - 3s^2 - 2s$$

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

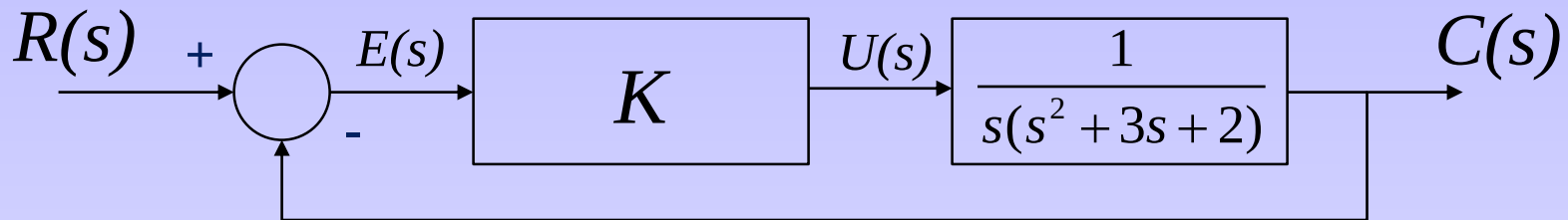
$$-3s^2 - 6s - 2 = 0$$

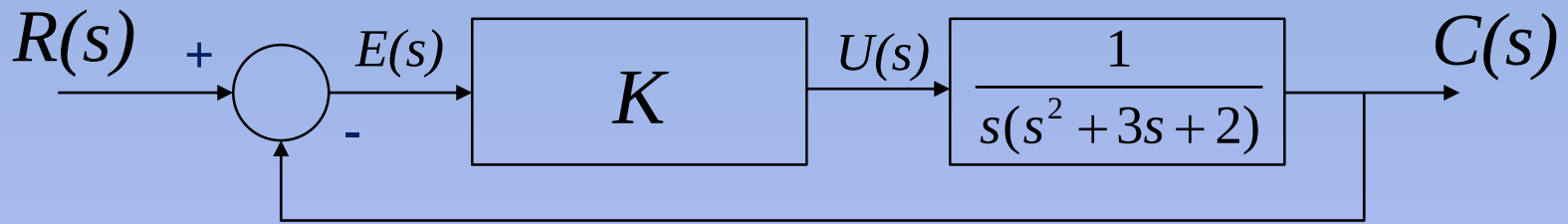
$$s_1 = -1.5774, \quad s_2 = -0.4226$$



ΒΗΜΑ 5ο: Υπολογισμός K_{cr} και ω_{cr} με το κριτήριο Routh-Hurwitz

Για ποιές τιμές του K το σύστημα είναι **ευσταθές** ?





Χαρακτηριστική εξίσωση

$$X.E = 1 + G(s)H(s) = 0 \dots \text{επειδή} \dots G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \dots \text{και} \dots H(s) = 1 \Rightarrow$$

Πίνακας Routh

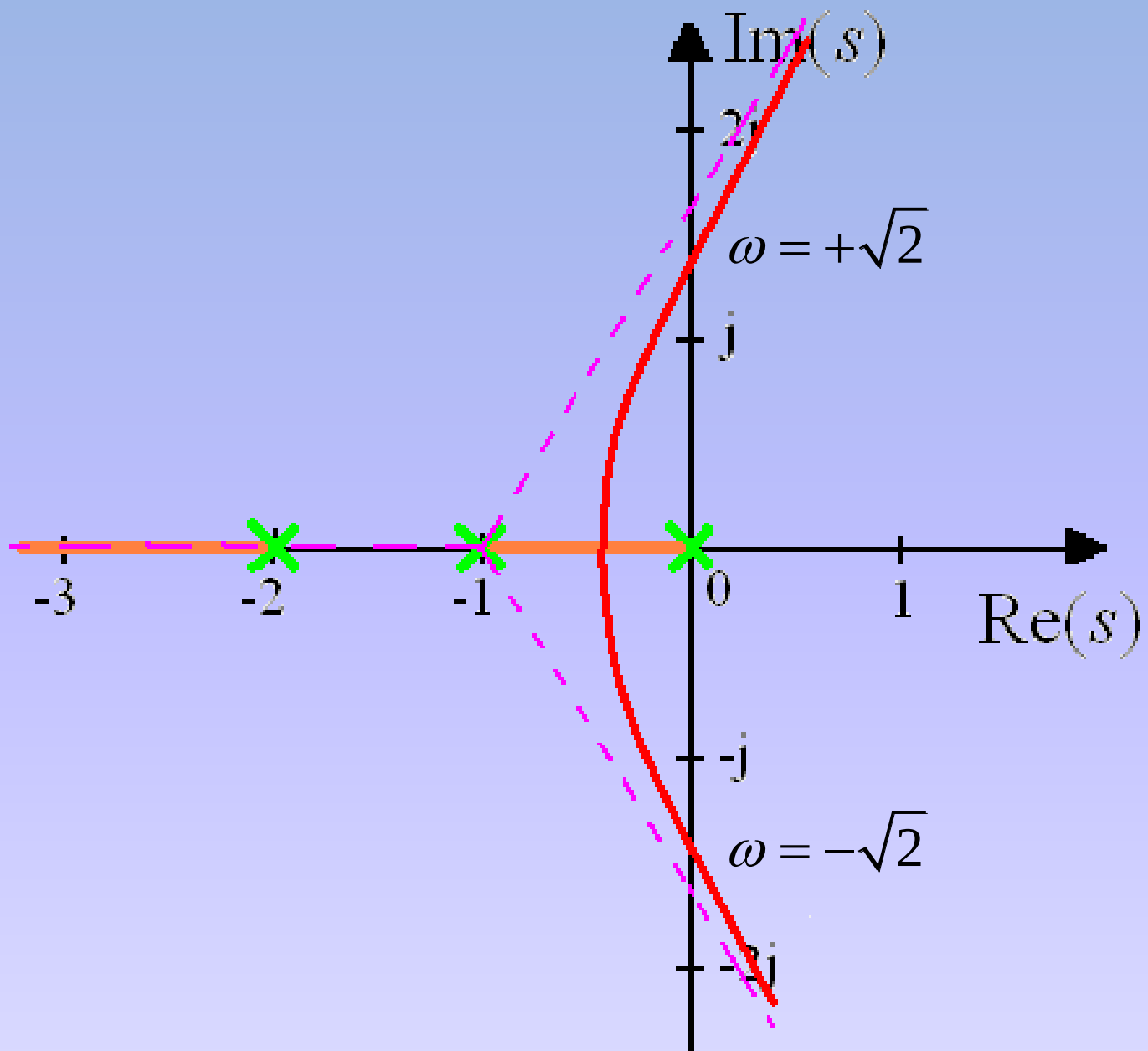
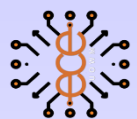
s^3 :	1	2	0
s^2 :	3	K	0
s^1 :	$\frac{6-K}{3}$	0	
s^0 :	K	0	

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

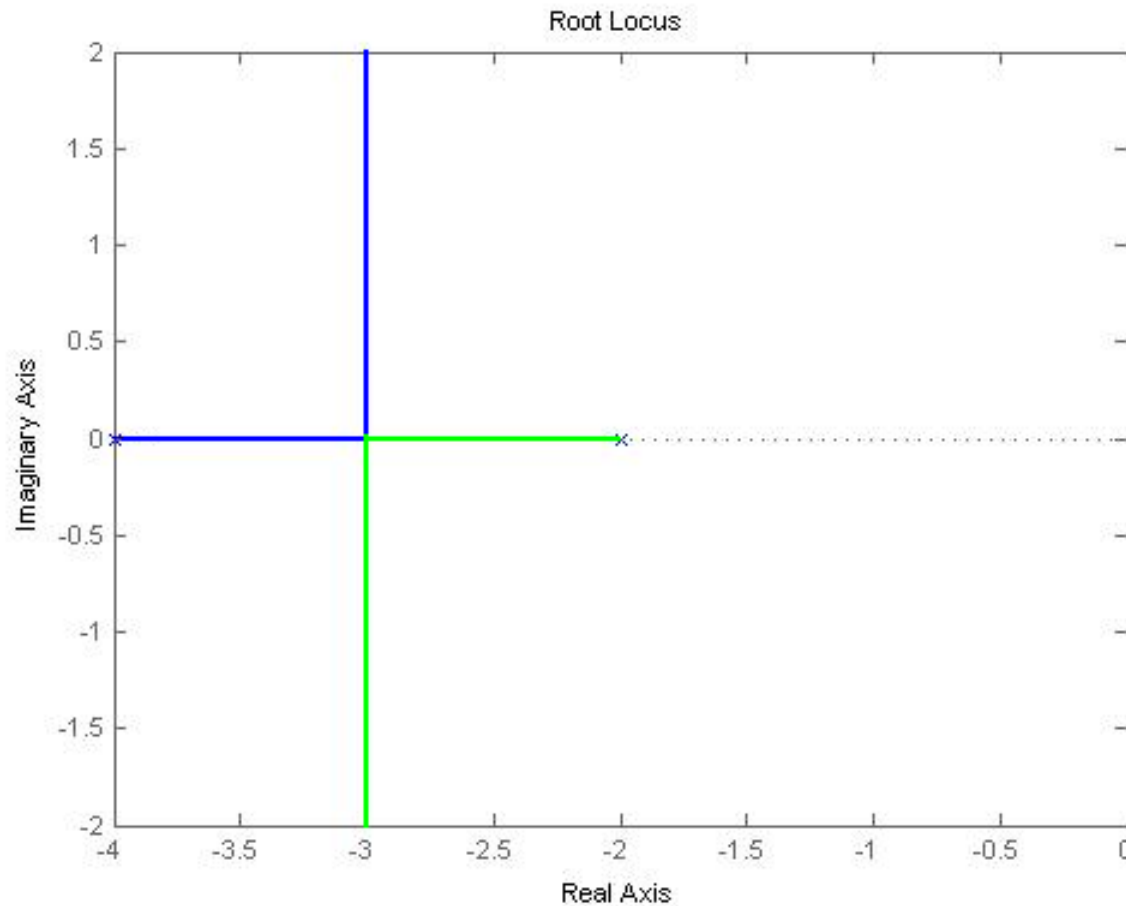
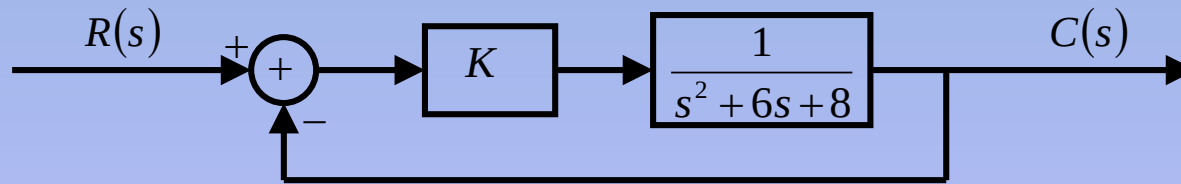
$$3s^2 + K = 0 \Rightarrow 3(j\omega)^2 + K = 0 \Rightarrow$$

$$-3\omega^2 + 6 = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{2}$$

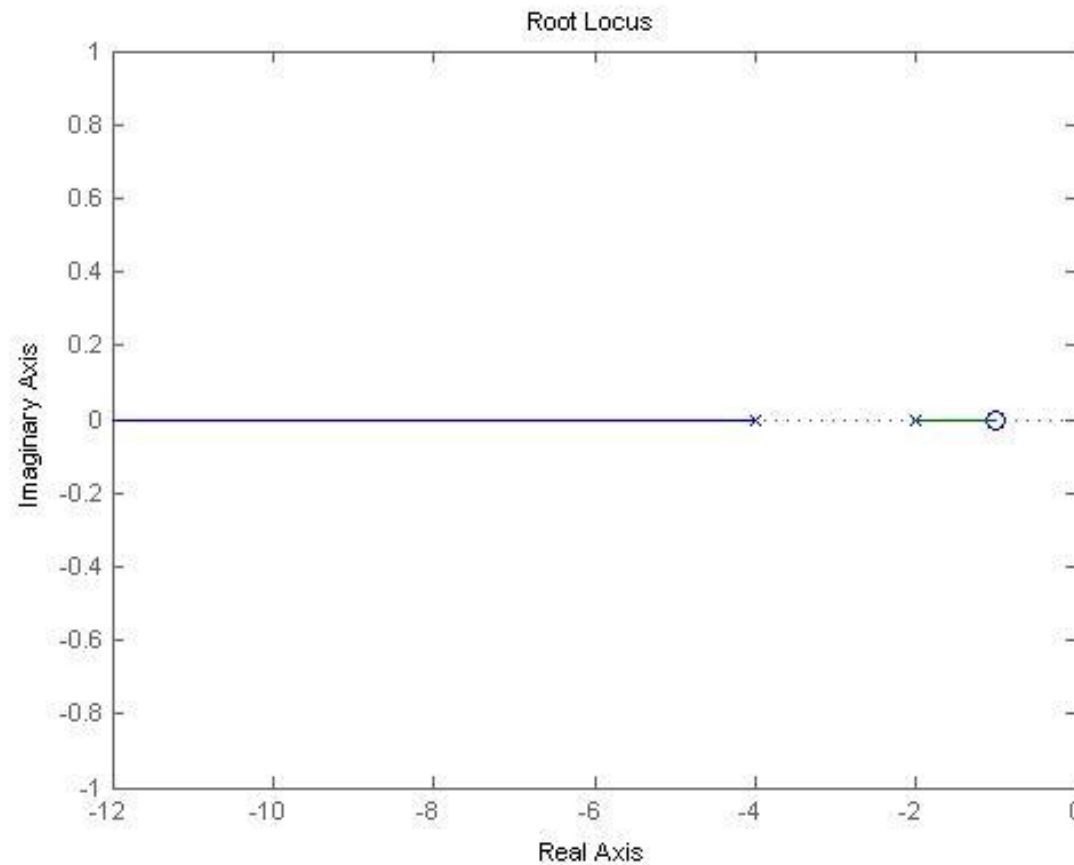
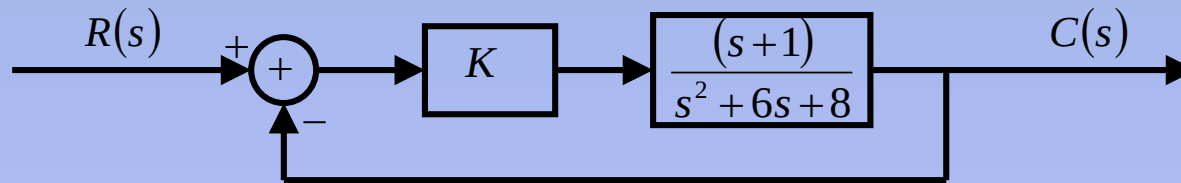
Σύστημα ευσταθές για: $0 < K < 6$



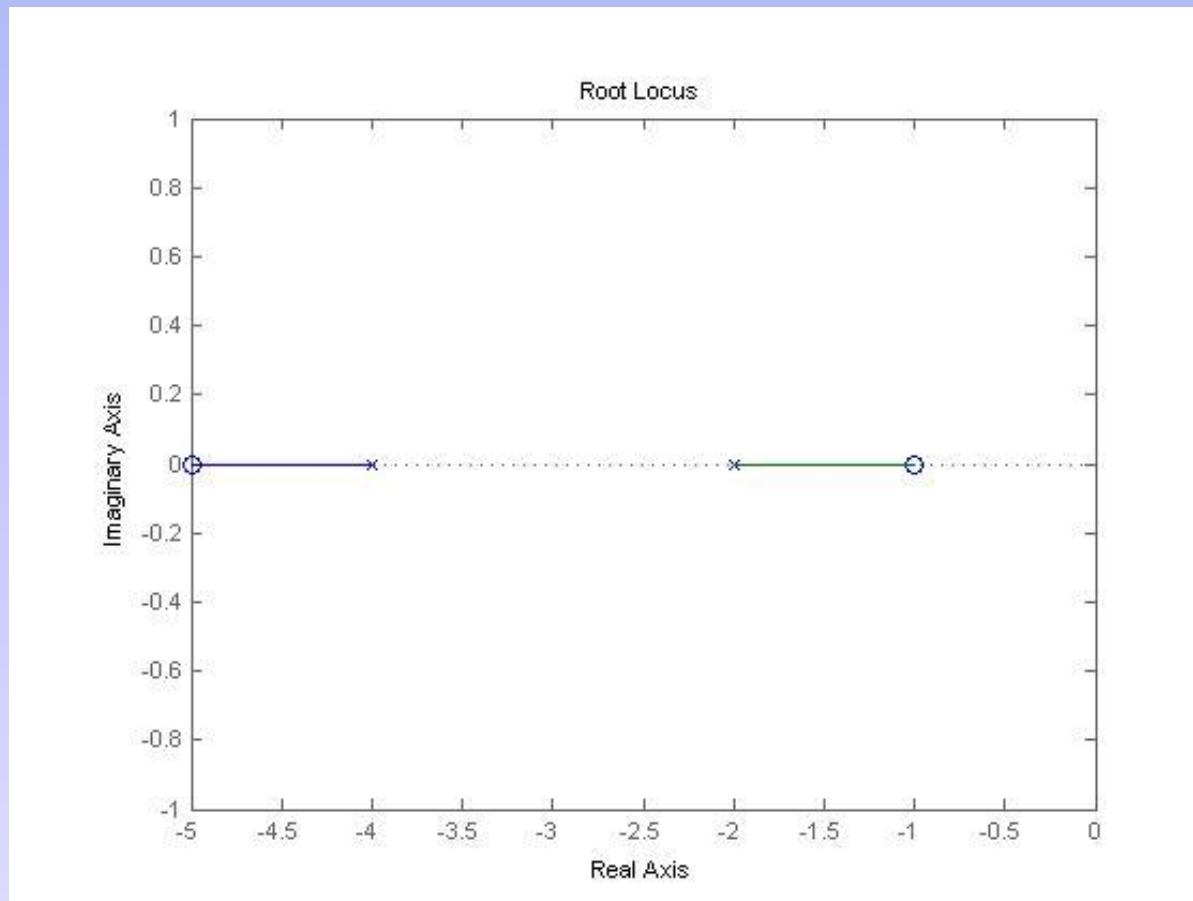
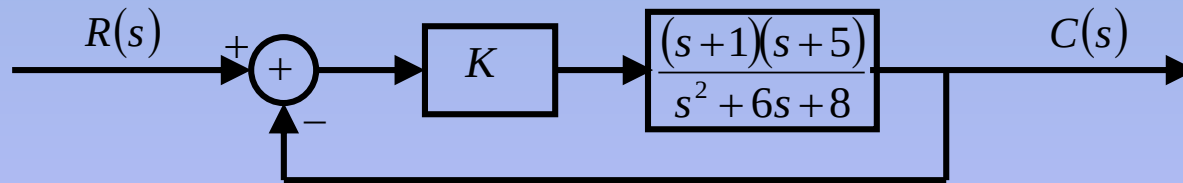
Γ.Τ.Ρ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1



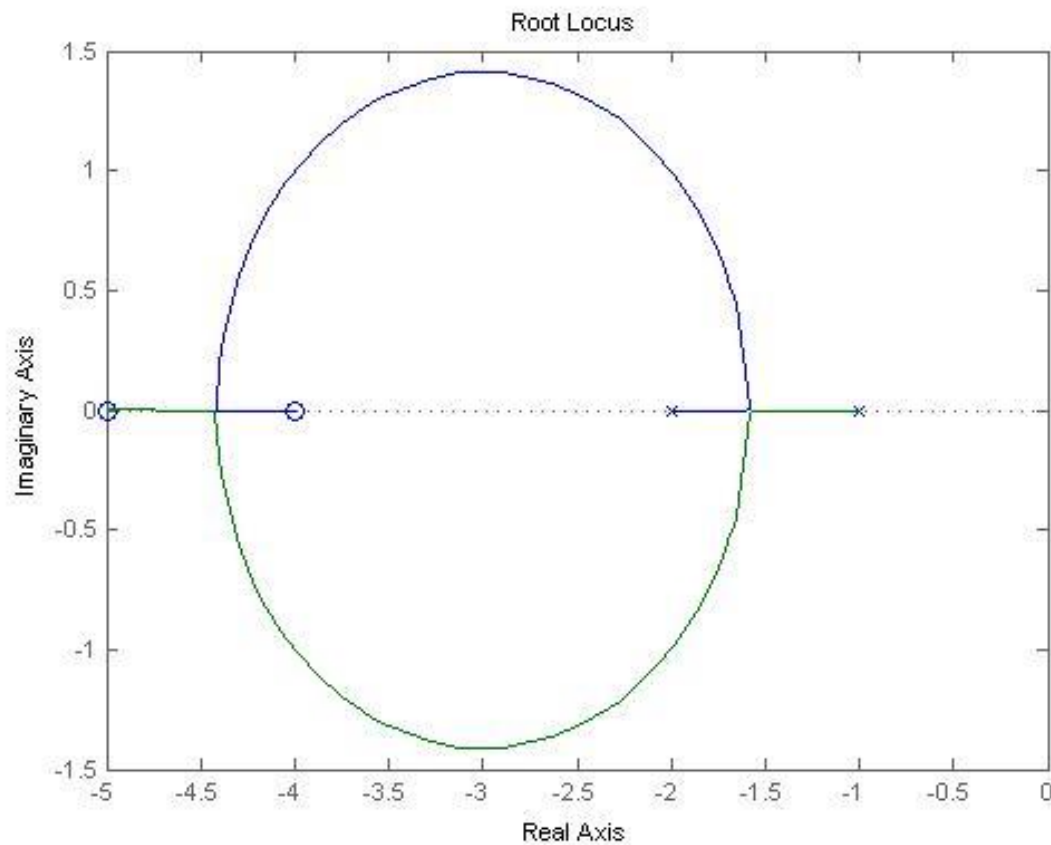
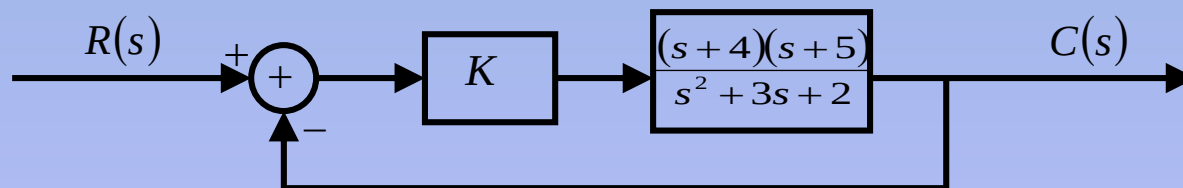
Γ.Τ.Ρ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2



Γ.Τ.Ρ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3



Γ.Τ.Ρ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4



Γ.Τ.Ρ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

