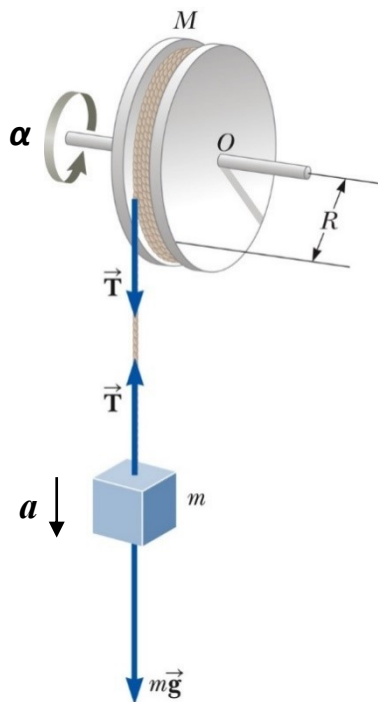




ΘΕΜΑ 1. [3]

Το σύστημα αφήνεται από την ηρεμία όταν το βαρίδιο βρίσκεται σε ύψος $h = 14 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και ξετυλίγεται χωρίς να γλιστράει, ενώ η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο της O .

$$m = 10 \text{ kg}, \quad M = 8 \text{ kg}, \quad I = \frac{1}{2}MR^2, \quad g = 9,8 \text{ N/kg}$$

Η ακτίνα της τροχαλίας δεν δίνεται επειδή δεν χρειάζεται στα επόμενα ερωτήματα (απλοποιείται).

- 1) Τι ταχύτητα έχει το βαρίδιο όταν έχει κατέβει $3,5 \text{ m}$ και τι κινητική ενέργεια έχει η τροχαλία την ίδια στιγμή ;
- 2) Πότε το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος ;
- 3) Πόση είναι η τάση του νήματος

ΛΥΣΗ

Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει, το μήκος του τόξου από όπου έχει ξετυλιχτεί το νήμα είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του βαριδίου

$$y = s \Rightarrow y = \theta R \Rightarrow \theta = \frac{y}{R}$$

Για να ισχύει διαρκώς το παραπάνω, θα πρέπει να συνδέονται με την ίδια σχέση και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας με την ταχύτητα του βαριδίου καθώς και η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιμέτρου της τροχαλίας με την επιτάχυνση του βαριδίου.

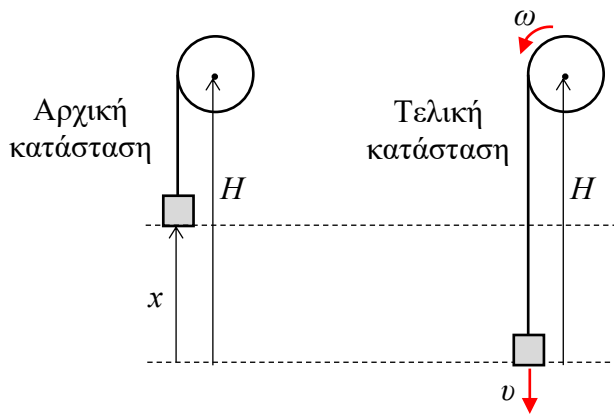
$$v = v_{\text{γραμ}} \Rightarrow v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}, \quad a = a_{\text{γραμ}} \Rightarrow a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$

1.1 Την ταχύτητα του βαριδίου μπορούμε να την βρούμε από τη διατήρηση της ενέργειας χωρίς να ξέρουμε την επιτάχυνση. Θέτουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στα $3,5 \text{ m}$ κάτω από την αρχική θέση του βαριδίου. Έστω ότι το κέντρο της τροχαλίας απέχει από αυτό το σημείο κατακόρυφη απόσταση H .

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \Rightarrow K_{\text{βαρ,αρχ}} + U_{\text{βαρ,αρχ}} + K_{\text{τροχ,αρχ}} + U_{\text{τροχ,αρχ}} = K_{\text{βαρ,τελ}} + U_{\text{βαρ,τελ}} + K_{\text{τροχ,τελ}} + U_{\text{τροχ,τελ}} \Rightarrow$$

$$0 + mgx + 0 + \cancel{MgH} = \frac{1}{2}mv^2 + 0 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \cancel{MgH} \Rightarrow mgx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 \Rightarrow$$

$$mgx = \frac{1}{2}v^2 \left(m + \frac{M}{2} \right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgx}{m + \frac{M}{2}}} = \sqrt{\frac{2(10)(9,8)(3,5)}{10 + 4}} = \sqrt{\frac{(98)(7)}{14}} = \sqrt{49} = 7,00 \text{ m/s}$$



Άρα μετά από κάθοδο 3,50 m $v=7,00$ m/s

$$K_{\text{τροχ}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{4} M v^2 = \frac{1}{4} (8)(49) = (2)(49) \Rightarrow$$

$$K_{\text{τροχ}} = 98 \text{ J}$$

2.2. και 2.3 Γράφουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα (θεμελιώδης νόμος μηχανικής) στην κατάλληλη μορφή για τα δύο σώματα για βρούμε και την επιτάχυνση και την τάση του νήματος μαζί.

Μεταφορική βαριδίου: $\sum F = ma \Rightarrow B - T = ma \quad (1)$

Στροφική κίνηση τροχαλίας: $\sum \tau = I \alpha_{\omega} \Rightarrow TR = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M a \quad (2)$

Σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους T και a .

Προσθέτοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε την a

$$(1)+(2): B - T + T = ma + \frac{1}{2} M a \Rightarrow mg = a \cdot \left(m + \frac{M}{2} \right) \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow a = \frac{(10)(9,8)}{10 + \frac{8}{2}} = \frac{98}{14} = 7 \text{ m/s}^2$$

και αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε την τάση του νήματος T :

$$T = \frac{1}{2} M a = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ N}$$

Η επιτάχυνση του βαριδίου είναι σταθερή a και άρα η κατακόρυφη κίνηση του βαριδίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$y = \frac{1}{2} a t^2, \quad v = at, \quad v^2 = 2ay$$

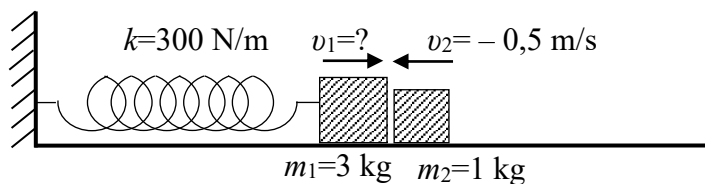
$$h = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(14)}{7}} \Rightarrow$$

$$t = 2 \text{ s}$$

Έλεγχος στα 3,5 m: $v^2 = 2ay = 2(7)(3,5) = 49 \Rightarrow v = 7 \text{ m/s}$

ΘΕΜΑ 2ο [3]

Το σώμα 1, που είναι συνδεδεμένο με το ελατήριο, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A_1=10\text{ cm}$. Τη στιγμή που περνάει από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τα δεξιά, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα 2. Το δάπεδο είναι λείο.



Να βρείτε :

2.1 Την ταχύτητα v_1 του σώματος 1 πριν την κρούση

2.2 Τις ταχύτητες u_1 και u_2 των σωμάτων μετά την κρούση

2.2 Το νέο πλάτος A_2 της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα 1 μετά την κρούση

ΛΥΣΗ

2.1 Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{300}{3}} = \sqrt{100} = 10\text{ rad/s}$.

Όταν περνάει από τη θέση ισορροπίας έχει τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης που δίνεται από τον τύπο :

$$v_{\max} = A\omega \Rightarrow v_1 = A_1\omega = (0,1)(10) = 1\text{ m/s}$$

2.2 Στην ελαστική κρούση διατηρείται και η ορμή και η κινητική ενέργεια

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 &= p'_1 + p'_2 \\ K_1 + K_2 &= K'_1 + K'_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (1) \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad (2) \end{aligned} \right\}$$

Αυτές είναι δύο εξισώσεις για τους δύο αγνώστους u_1 και u_2 . Όμως η δεύτερη είναι δευτέρου βαθμού.

Μαζεύοντας μαζί τις μεταβλητές με δείκτη 1 στο αριστερό σκέλος και τις μεταβλητές με δείκτη 2 στο δεξί σκέλος κάθε εξίσωσης, διαιρώντας τις εξισώσεις μεταξύ τους και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων $v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$, βρίσκουμε μια τρίτη γραμμική εξίσωση που αντικαθιστά την δευτεροβάθμια.

$$\left. \begin{aligned} m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_2^2) \quad (2) \\ m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2) \quad (1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{m_1 \cancel{(v_1 - u_1)} (v_1 + u_1)}{\cancel{m_1(v_1 - u_1)}} = \frac{m_2 \cancel{(u_2 - v_2)} (u_2 + v_2)}{\cancel{m_2(u_2 - v_2)}} \Rightarrow v_1 + u_1 = u_2 + v_2 \quad (3)$$

Έτσι έχουμε τελικά δύο γραμμικές εξισώσεις (δηλ. πρώτου βαθμού) για τους δύο αγνώστους u_1 και u_2 , που λύνονται εύκολα.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (1)$$

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \quad (3)$$

Είτε θυμόμαστε τον τύπο της λύσης της ελαστικής κρούσης για την u_1 απ' έξω :

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{3-1}{3+1} (1) + \frac{2 \cdot 1}{3+1} (-0,5) = 0,5 - 0,25 = 0,25\text{ m/s}$$

είτε αντικαθιστούμε τα νούμερα και λύνουμε το σύστημα

$$3(1) + 1(-0,5) = 3u_1 + 1u_2 \quad (1)$$

$$1 + u_1 = -0,5 + u_2 \quad (3)$$

Λύνουμε την (3) ως προς u_2 : $u_2 = 1,5 + u_1$ και την αντικαθιστούμε στην (1): $2,5 = 3u_1 + 1,5 + u_1$, για να βρούμε την u_1 : $2,5 = 3u_1 + 1,5 + u_1 \Rightarrow 4u_1 = 1 \Rightarrow$

$$u_1 = \frac{1}{4} = 0,25\text{ m/s}$$

Μετά από την (3) βρίσκουμε την u_2 :

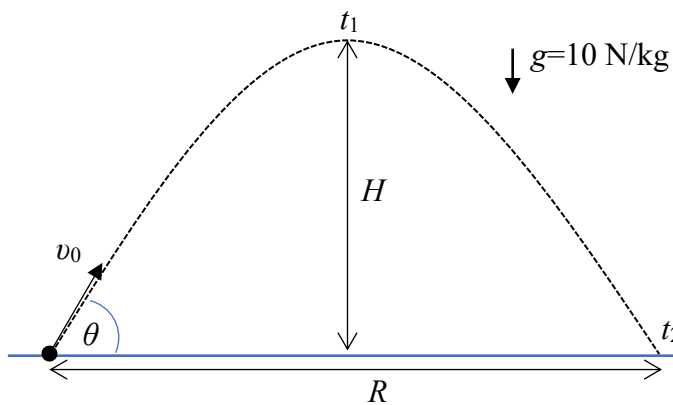
$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2 = 1 + 0,25 - (-0,5) = 1,75 \text{ m/s}$$

2.3 Αφού η κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας, το σώμα 1 θα ξεκινήσει από εκεί μια νέα ταλάντωση με το ίδιο ω , αλλά με νέα μέγιστη ταχύτητα u_1 και άρα νέο πλάτος:

$$u_1 = A_2 \omega \Rightarrow A_2 = \frac{u_1}{\omega} = \frac{0,25}{10} = 0,025 = 2,5 \text{ cm}$$

ΘΕΜΑ 3ο [4]

Τη χρονική στιγμή $t=0$, βλήμα μάζας $m=0,1 \text{ kg}$, εκτοξεύεται από μηδενικό ύψος ($y_0=0$), με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0=100 \text{ m/s}$, υπό γωνία $\theta=65^\circ$, πάνω από οριζόντιο έδαφος. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα να βρείτε:



3.1 Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία θα φτάσει στο μέγιστο ύψος

3.2 Το μέγιστο ύψος H και τη δυναμική ενέργεια του βλήματος εκεί

3.3 Την κινητική ενέργεια που έχει στο μέγιστο ύψος

3.4 Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία θα χτυπήσει στο έδαφος

3.5 Το βεληνεκές R .

ΛΥΣΗ

$$v_x = v_0 \cos \theta = \text{σταθ} \quad (1) \quad v_y = v_{0y} - gt \quad (2)$$

Εξισώσεις πλάγιας βολής:

$$x = v_x t \quad (3) \quad y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

$$v_x = v_0 \cos \theta = (100)(\cos 65^\circ) = (100)(0,422618) = 42,26 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta = (100)(\sin 65^\circ) = (100)(0,906308) = 90,63 \text{ m/s}$$

$$\text{Ενέργεια (διατηρείται)} : E = K + U = K_0 + U_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g y_0 = \frac{1}{2} (0,1)(100)^2 + (0,1)(10)(0) = 500 \text{ J}$$

3.1 Όταν φτάσει στο μέγιστο ύψος η κατακόρυφη ταχύτητα γίνεται μηδέν. Από την (2) :

$$v_y = 0 \Rightarrow 0 = v_{0y} - g t_1 \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{90,63}{10} = 9,063 \text{ s}$$

3.2 Από την (4) βρίσκουμε το y εκείνη τη στιγμή, το οποίο είναι το μέγιστο ύψος

$$H = y(t_1) \Rightarrow H = v_{0y} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0y}^2 - v_{0y}^2 / 2}{g} \Rightarrow$$

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{90,63^2}{2(10)} = 410,7 \text{ m}$$

Η δυναμική ενέργεια είναι :

$$U = m g y \Rightarrow U_{top} = m g H = (0,1)(10)(410,7) = 410,7 \text{ J}.$$

3.3 Στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα έχει μόνο οριζόντια (x) συνιστώσα.

$$K_{top} = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = \frac{1}{2} (0,1)(42,26)^2 = 89,3 \text{ J}$$

$$\text{Ή από την ενέργεια} : E = K_{top} + U_{top} \Rightarrow K_{top} = E - U_{top} = 500 - 410,7 = 89,3 \text{ J}$$

3.4 Όταν το βλήμα χτυπήσει στο έδαφος, το y θα είναι μηδέν

$$y(t_2) = 0 \Rightarrow v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0 \Rightarrow \left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)t_2 = 0 \Rightarrow v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_1 = 2(9,063) = 18,126 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_1 = 2(9,063) = 18,126 \text{ s}$$

3.5 Από την (3) βρίσκουμε το x εκείνη τη στιγμή, που είναι το βεληνεκές

$$R = x(t_2) \Rightarrow R = v_x t_2 = (42,26)(18,126) = 766 \text{ m}$$