

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2022-23

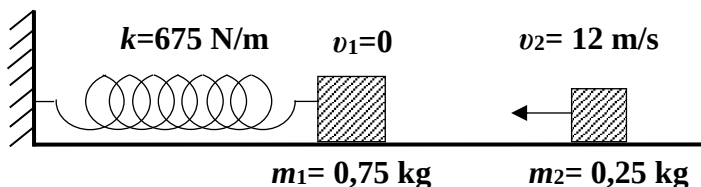
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ (ΤΕ)

Τρίτη, 5 Σεπτεμβρίου 2023, 11:30-13:00, αίθουσα 3403 Κοίλα.

Εισηγητής: Κώστας Φιλίππιδης (kphilippides@uowm.gr)

ΘΕΜΑ 1ο [3]

Το σώμα 1 που είναι συνδεδεμένο με το ελατήριο ισορροπεί ακίνητο, με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος. Το δάπεδο είναι λείο. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.



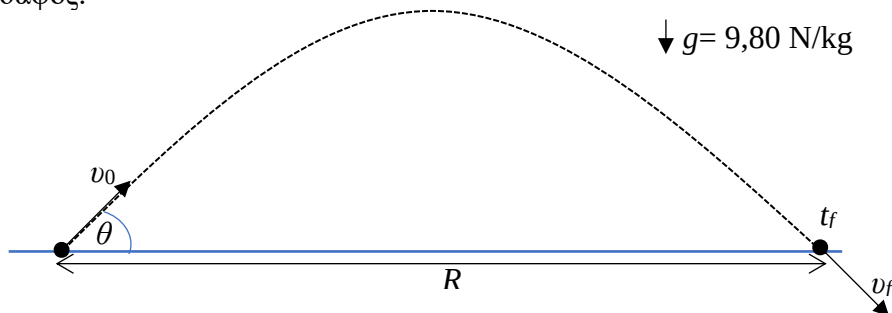
Να βρείτε :

1.1 Την ταχύτητα u_2 του σώματος 2, μετά την κρούση [1]

1.2 Το πλάτος A της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα 1 μετά την κρούση [2]

ΘΕΜΑ 2ο [3]

Τη χρονική στιγμή $t=0$, βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0=20$ m/s, υπό γωνία $\theta=40^\circ$ πάνω από οριζόντιο έδαφος.



Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα να υπολογίσετε:

2.1 Την χρονική στιγμή t_f στην οποία θα χτυπήσει στο έδαφος

2.2 Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία προσκρούει στο έδαφος

2.3 Το βεληνεκές R .

ΘΕΜΑ 3ο [4]

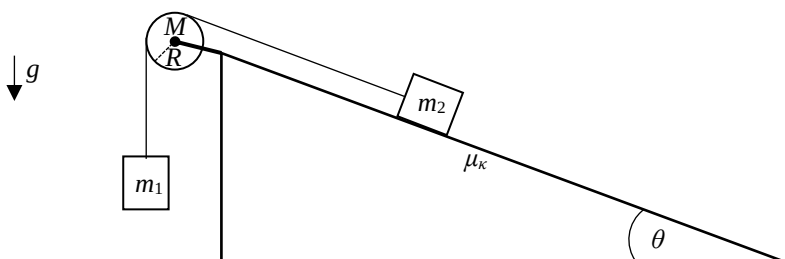
Το κεκλιμένο δάπεδο δεν είναι λείο. Η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κάθετο άξονα που περνάει από το κέντρο της ενώ το νήμα είναι μη εκτατό και δεν γλιστράει πάνω της αλλά γυρνάει μαζί της.

Αριθμητικά δεδομένα: $\theta=16^\circ$, $M=2$ kg, $I_{\text{τροχ}}=\frac{1}{2}MR^2$, $m_1=10$ kg, $m_2=26$ kg, $\mu_k=0,1$, $g=9,80$ N/kg

3.1 Να μεταφέρετε το παρακάτω σχήμα στο γραπτό σας, να επιλέξετε μια αυθαίρετη φορά για την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθούν τα σώματα και να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δρουν πάνω στα σώματα 1 και 2 και τις δυνάμεις που προκαλούν περιστροφή στην τροχαλία [1]

3.2 Να γράψετε τις εξισώσεις του 2ου νόμου του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση των σωμάτων 1 και 2 και την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας και να κάνετε τις απαραίτητες απλοποιήσεις στην τελευταία εξίσωση ώστε να απαλειφθεί η ακτίνα της τροχαλίας R [0,8]

3.3 Να λύσετε τις παραπάνω 3 εξισώσεις και να βρείτε: την επιτάχυνση των σωμάτων [1] και τις τάσεις στα δύο τμήματα του νήματος [1]. Προς τα που θα επιταχυνθεί το σώμα 1; Προς τα πάνω ή προς τα κάτω; [0,2]



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1°

1.1

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατευθείαν οι τύποι της ελαστικής κρούσης βλήματος με ταχύτητα v_2 σε ακίνητο στόχο ($v_1 = 0$):

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{0,25 - 0,75}{0,75 + 0,25} (12) = -\frac{0,50}{1,00} (12) = -6 \text{ m/s} \quad \text{προς τα δεξιά}$$

$$u_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2(0,25)}{0,75 + 0,25} (12) = +6 \text{ m/s} \quad \text{προς τα αριστερά}$$

Αλλιώς πρέπει να επιλυθεί το δευτεροβάθμιο σύστημα που προκύπτει από την διατήρηση της ορμής (1) και την διατήρηση της κινητικής ενέργειας (2):

$$\left. \begin{array}{l} m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (1) \\ \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad (2) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (0,25)(12) = 0,75u_1 + 0,25u_2 \quad (1) \\ (0,25)(12)^2 = 0,75u_1^2 + 0,25u_2^2 \quad (2) \end{array}$$

Όλα επί 4

$$12 = 3u_1 + u_2 \quad (1)$$

$$144 = 3u_1^2 + u_2^2 \quad (2)$$

Λύνουμε την (1) ως προς u_2 και αντικαθιστούμε στην (2)

$$u_2 = 12 - 3u_1 \quad (1)$$

$$144 = 3u_1^2 + (12 - 3u_1)^2 \quad (2)$$

Οι πράξεις στη δευτεροβάθμια είναι :

$$144 = 3u_1^2 + (12 - 3u_1)^2 \Rightarrow 144 = 3u_1^2 + 144 - 72u_1 + 9u_1^2 \Rightarrow 12u_1^2 - 72u_1 = 0 \Rightarrow 12u_1(u_1 - 6) = 0$$

Άρα $u_1 = 0$ που απορρίπτεται (μη κρούση) ή $u_1 = +6 \text{ m/s}$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε και την u_2 : $12 = 3u_1 + u_2 \Rightarrow 12 = 3(6) + u_2 \Rightarrow u_2 = 12 - 18 = -6 \text{ m/s}$

1.2

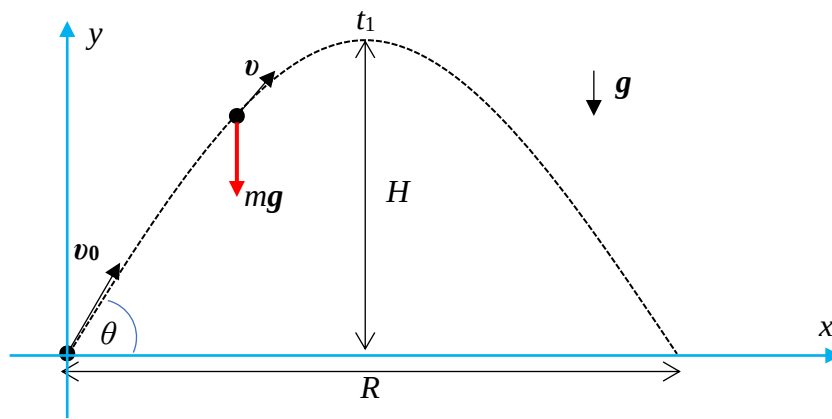
Στην απλή αρμονική ταλάντωση η ενέργεια διατηρείται. Το σώμα 1 θα φτάσει στη μέγιστη απομάκρυνση (πλάτος) από το σημείο ισορροπίας όταν το ελατήριο θα το σταματήσει. Τότε όλη η αρχική του κινητική ενέργεια θα έχει γίνει δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από τον

$$\text{τύπο } U_{\text{ελατ}}(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$K_0 + U_{\text{ελατ}}(0) = K_A + U_{\text{ελατ}}(A) \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow A = u_1 \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 6 \sqrt{\frac{0,75}{675}} = 0,20 \text{ m}$$

Θέμα 2°

Πλάγια βολή.



Στην οριζόντια διεύθυνση, όπου δεν υπάρχει καμία δύναμη, το βλήμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $v_x = v_0 \cos \theta = (20)(\cos 40^\circ) = 15,32 \text{ m/s}$

Στην κατακόρυφη διεύθυνση όπου υπάρχει η σταθερή δύναμη του βάρους προς τα κάτω, το βλήμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση (κατακόρυφη βολή) με σταθερή επιτάχυνση αντίθετη της αρχικής του ταχύτητας: $a = \frac{F_{\text{net},y}}{m} = \frac{-mg}{m} = -g = -9,80 \text{ m/s}^2$ και αρχική ταχύτητα $v_{y0} = v_0 \sin \theta = (20)(\sin 40^\circ) = 12,85575 = 12,86 \text{ m/s}$

$$v_x = v_0 \cos \theta = \text{σταθ} \quad (1) \quad v_y = v_{y0} - gt \quad (2)$$

Οπότε ισχύουν οι εξισώσεις :

$$x = v_x t \quad (3) \quad y = v_{y0} t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (4)$$

2.1 Θέτοντας $y = 0$ στην (4) βρίσκουμε το χρόνο πτήσης t_f :

$$y = v_{y0} t - \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow 0 = v_{y0} t_f - \frac{1}{2} gt_f^2 \Rightarrow t_f = \frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \frac{2(20) \sin 40^\circ}{9,80} = 2,62362 \approx 2,62 \text{ s}$$

2.2 Ο πιο γρήγορος τρόπος να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας είναι να χρησιμοποιήσουμε διατήρηση της ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης εξαρτάται από την απομάκρυνση από το έδαφος και δίνεται από τον τύπο $U_{\text{βαρ}}(y) = mgy$. Άρα είναι μηδέν και την αρχική στιγμή της εκτόξευσης και την τελική στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος αφού και τις δύο φορές $y = 0$. Οπότε το μέτρο της ταχύτητας πρόσκρουσης θα είναι το ίδιο με το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης.

$$K_0 + U_0 = K_f + U_f \Rightarrow \frac{1}{2} mv_0^2 + mg0 = \frac{1}{2} mv_f^2 + mg0 \Rightarrow v_0^2 = v_f^2 \Rightarrow v_f = v_0 = 20 \text{ m/s}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο $v_f = |\vec{v}_f| = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2}$ και από τις κινηματικές σχέσεις των συνιστωσών της ταχύτητας (1) και (2)

Η x συνιστώσα παραμένει σταθερή $v_{fx} = v_{0x} = v_0 \cos \theta$, ενώ η y συνιστώσα προκύπτει να έχει την αντίθετη

$$\text{τιμή από την αρχική } v_{fy} = v_{y0} - gt_f = v_{y0} - g \frac{2v_{y0}}{g} = v_{y0} - 2v_{y0} = -v_{y0}$$

Οπότε όταν προσθέσουμε τα τετράγωνα θα πάρουμε την ίδια τιμή με την αρχική

$$v_f = |\vec{v}_f| = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + (-v_{0y})^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = v_0$$

Με νούμερα

$$v_{xf} = 15,32 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v_{yf} = v_{y0} - gt_f = 12,85575 - (9,80)(2,62362) = -12,85573 = -12,86 \text{ m/s}$$

$$v_f = |\vec{v}_f| = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{(15,32)^2 + (-12,86)^2} = \sqrt{234,7024 + 165,3796} = \sqrt{400,082} = 20,002 \approx 20 \text{ m/s}$$

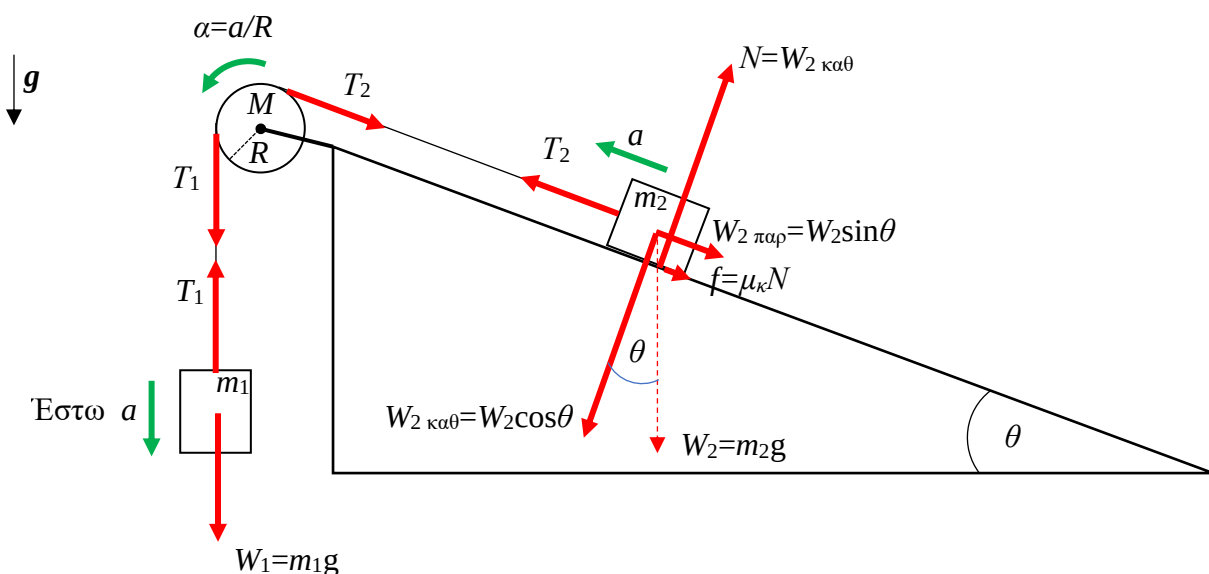
2.3

Θέτοντας $t = t_f$ στην (3) βρίσκουμε το βεληνεκές

$$x = v_{0x} t \Rightarrow R = v_0 \cos \theta \cdot t_f = v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \Rightarrow R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(20)^2 (\sin 80^\circ)}{9,80} = 40,20 \text{ m}$$

Θέμα 3^ο

3.1



3.2

Επειδή το νήμα είναι στην περίμετρο της τροχαλίας και δεν γλιστράει πάνω της, η γραμμική (επιτρόχια) επιτάχυνση των σημείων της περιμέτρου θα είναι ίση με αυτήν των σημείων του νήματος που είναι ίση με την επιτάχυνση των σωμάτων 1 και 2 επειδή το νήμα είναι μη εκτατό: $a_{\text{γραμ}} = a \Rightarrow \alpha R = a$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

$$T_2 - m_2 g \sin \theta - \mu_k m_2 g \cos \theta = m_2 a \quad (2)$$

$$T_1 R - T_2 R = I \alpha \Rightarrow (T_1 - T_2) R = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M a \quad (3)$$

3.3

$$(1) + (2) + (3) : m_1 g - T_1 + T_2 - m_2 g \sin \theta - \mu_k m_2 g \cos \theta + T_1 - T_2 = m_1 a + m_2 a + \frac{1}{2} M a$$

$$a = g \frac{m_1 - m_2 (\sin \theta + \mu_k \cos \theta)}{m_1 + m_2 + M/2} = 9,8 \frac{10 - 26[\sin(16^\circ) + 0,1 \cos(16^\circ)]}{10 + 26 + 2/2} = 0,088504 \approx 0,089 \text{ m/s}^2$$

Η επιτάχυνση βγήκε θετική άρα η φορά της είναι όπως στο σχήμα και το σώμα 1 θα επιταχυνθεί προς τα κάτω και θα τραβήξει το σώμα 2 προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν έβγαινε αρνητική θα συνέβαινε το αντίθετο.

$$(1) : T_1 = m_1 (g - a) = 10(9,8 - 0,0885) = 97,11496 \approx 97,115 \text{ N}$$

$$(2) : T_2 = m_2 (a + g(\sin \theta + \mu_k \cos \theta)) = 97,02645 \approx 97,026 \text{ N}$$

$$\text{Έλεγχος (3)} : T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M a \Rightarrow 97,115 - 97,026 = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 0,089 \Rightarrow 0,089 = 0,089 \text{ OK}$$