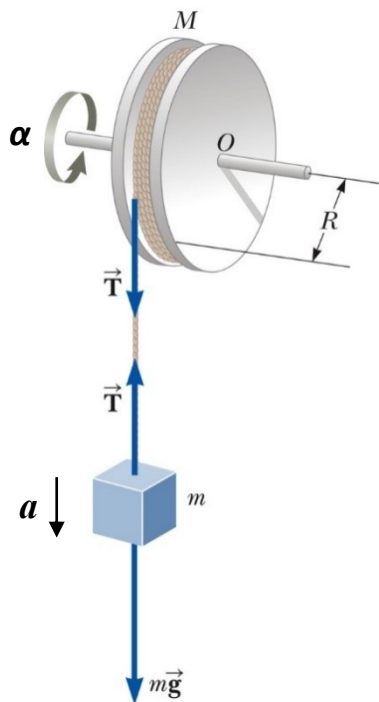


Τρίτη, 14 Ιανουαρίου 2025, 12:00 – 13:30 αιθ. 3403 Κοίλα.
Εισηγητής: Κώστας Φιλίππιδης (kphilippides@uowm.gr)



ΘΕΜΑ 1. [3]

Το σύστημα αφήνεται από την ηρεμία όταν το βαρίδιο βρίσκεται σε ύψος $h = 14 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και ξετυλίγεται χωρίς να γλιστράει, ενώ η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο της O .

$$m = 10 \text{ kg}, \quad M = 8 \text{ kg}, \quad I = \frac{1}{2}MR^2, \quad g = 9,8 \text{ N/kg}$$

Η ακτίνα της τροχαλίας δεν δίνεται επειδή δεν χρειάζεται στα επόμενα ερωτήματα (απλοποιείται).

- 1) Τι ταχύτητα έχει το βαρίδιο όταν έχει κατέβει $3,5 \text{ m}$ και τι κινητική ενέργεια έχει η τροχαλία την ίδια στιγμή ;
- 2) Πότε το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος ;
- 3) Πόση είναι η τάση του νήματος

Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιμέτρου της τροχαλίας $a_{\text{γραμ}} = \alpha R$ είναι ίση με την επιτάχυνση a του βαριδίου.

$$a = a_{\text{γραμ}} \Rightarrow a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$

Με την ίδια σχέση συνδέεται και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας με την ταχύτητα του βαριδίου

$$v = v_{\text{γραμ}} \Rightarrow v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

Για τον ίδιο λόγο το μήκος του τόξου που έχει ξετυλιχτεί το νήμα είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του βαριδίου

$$y = s \Rightarrow y = \theta R \Rightarrow \theta = \frac{y}{R}$$

Γράφουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα (θεμελιώδης νόμος μηχανικής) στην κατάλληλη μορφή για τα δύο σώματα

Μεταφορική βαριδίου: $\sum F = ma \Rightarrow B - T = ma \quad (1)$

Στροφική κίνηση τροχαλίας: $\sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}Ma \quad (2)$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε την a και

$$(1)+(2) : B - T + T = ma + \frac{1}{2}Ma \Rightarrow mg = a \cdot \left(m + \frac{M}{2} \right) \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow a = \frac{(10)(9,8)}{10 + \frac{8}{2}} = \frac{98}{14} = 7 \text{ m/s}^2$$

Αντικαθιστώντας στην (2) θα μπορούσαμε να βρούμε και την τάση του νήματος T που δεν ζητείται.

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ N}$$

Η κατακόρυφη κίνηση του βαριδίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις

$$\text{εξισώσεις: } y = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at, \quad v^2 = 2ay$$

Η περιστροφή της ράβδου είναι ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad \omega = \alpha t, \quad \omega^2 = 2\alpha\theta$$

$$\text{Οπότε για } y = 3,5 \text{ m: } v^2 = 2ay = 2(7)(3,5) = 49 \Rightarrow$$

$$v = 7 \text{ m/s}$$

$$K_{\text{τροχ}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{1}{4}(5)(49) \Rightarrow$$

$$K_{\text{τροχ}} = 61,25 \text{ J}$$

Το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος όταν $y=h$:

$$y = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(14)}{7}} \Rightarrow$$

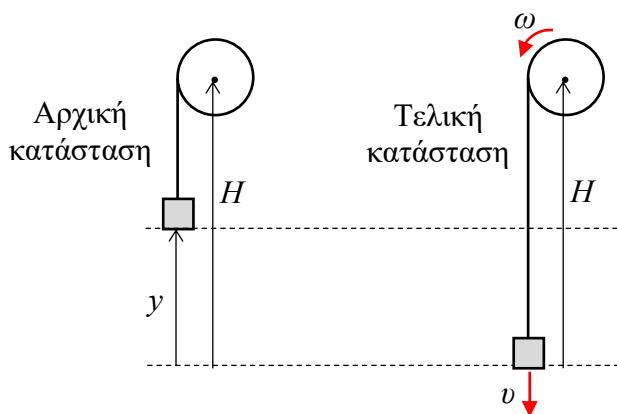
$$t = 2 \text{ s}$$

Την ταχύτητα του βαριδίου θα μπορούσαμε να την βρούμε και από τη διατήρηση της ενέργειας χωρίς να ξέρουμε την επιτάχυνση. Θέτουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στα 3,5 m κάτω από την αρχική θέση του βαριδίου. Έστω ότι το κέντρο της τροχαλίας απέχει από αυτό το σημείο κατακόρυφη απόσταση H .

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \Rightarrow K_{\text{βαρ,αρχ}} + U_{\text{βαρ,αρχ}} + K_{\text{τροχ,αρχ}} + U_{\text{τροχ,αρχ}} = K_{\text{βαρ,τελ}} + U_{\text{βαρ,τελ}} + K_{\text{τροχ,τελ}} + U_{\text{τροχ,τελ}} \Rightarrow$$

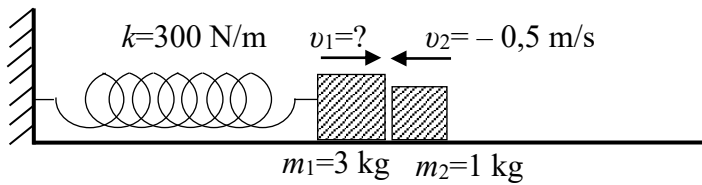
$$0 + mgy + 0 + \cancel{MgH} = \frac{1}{2}mv^2 + 0 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \cancel{MgH} \Rightarrow mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 \Rightarrow$$

$$mgy = \frac{1}{2}v^2\left(m + \frac{M}{2}\right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgy}{m + \frac{M}{2}}} = \sqrt{\frac{2(10)(9,8)(3,5)}{10 + 4}} = \sqrt{\frac{(98)(7)}{14}} = \sqrt{49} = 7 \text{ m/s}$$



ΘΕΜΑ 2ο [3]

Το σώμα 1, που είναι συνδεδεμένο με το ελατήριο, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A_1=10\text{ cm}$. Τη στιγμή που περνάει από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τα δεξιά, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα 2. Το δάπεδο είναι λείο.



Να βρείτε :

2.1 Την ταχύτητα v_1 του σώματος 1 πριν την κρούση

2.2 Τις ταχύτητες u_1 και u_2 των σωμάτων μετά την κρούση

2.2 Το νέο πλάτος A_2 της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα 1 μετά την κρούση

ΛΥΣΗ

2.1 Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{300}{3}} = \sqrt{100} = 10\text{ rad/s}$.

Όταν περνάει από τη θέση ισορροπίας έχει τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης που δίνεται από τον τύπο :

$$v_{\max} = A\omega \Rightarrow v_1 = A_1\omega = (0,1)(10) = 1\text{ m/s}$$

2.2 Στην ελαστική κρούση διατηρείται και η ορμή και η κινητική ενέργεια

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 &= p'_1 + p'_2 \\ K_1 + K_2 &= K'_1 + K'_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (1) \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad (2) \end{aligned} \right\}$$

Αυτές είναι δύο εξισώσεις για τους δύο αγνώστους u_1 και u_2 . Όμως η δεύτερη είναι δευτέρου βαθμού.

Μαζεύοντας μαζί τις μεταβλητές με δείκτη 1 στο αριστερό σκέλος και τις μεταβλητές με δείκτη 2 στο δεξί

σκέλος κάθε εξίσωσης, διαιρώντας τις εξισώσεις μεταξύ τους και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της

διαφοράς τετραγώνων $v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$, βρίσκουμε μια τρίτη γραμμική εξίσωση που αντικαθιστά την

δευτεροβάθμια.

$$\left. \begin{aligned} m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_2^2) \quad (2) \\ m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2) \quad (1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1)}{m_1(v_1 - u_1)} = \frac{m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2)}{m_2(u_2 - v_2)} \Rightarrow v_1 + u_1 = u_2 + v_2 \quad (3)$$

Έτσι έχουμε τελικά δύο γραμμικές εξισώσεις (δηλ. πρώτου βαθμού) για τους δύο αγνώστους u_1 και u_2 , που λύνονται εύκολα.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (1)$$

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \quad (3)$$

Είτε θυμόμαστε τον τύπο της λύσης της ελαστικής κρούσης για την u_1 απ'έξω :

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{3-1}{3+1} (1) + \frac{2 \cdot 1}{3+1} (-0,5) = 0,5 - 0,25 = 0,25\text{ m/s}$$

είτε αντικαθιστούμε τα νούμερα και λύνουμε το σύστημα

$$3(1) + 1(-0,5) = 3u_1 + 1u_2 \quad (1)$$

$$1 + u_1 = -0,5 + u_2 \quad (3)$$

Λύνουμε την (3) ως προς u_2 : $u_2 = 1,5 + u_1$ και την αντικαθιστούμε στην (1): $2,5 = 3u_1 + 1,5 + u_1$, για να

βρούμε την u_1 : $2,5 = 3u_1 + 1,5 + u_1 \Rightarrow 4u_1 = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{4} = 0,25\text{ m/s}$

Μετά από την (3) βρίσκουμε την u_2 :

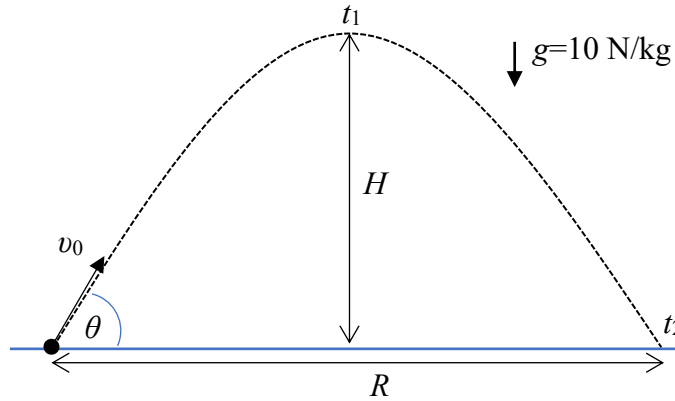
$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2 = 1 + 0,25 - (-0,5) = 1,75\text{ m/s}$$

2.3 Αφού η κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας, το σώμα 1 θα ξεκινήσει από εκεί μια νέα ταλάντωση με το ίδιο ω , αλλά με νέα μέγιστη ταχύτητα u_1 και άρα νέο πλάτος:

$$u_1 = A_2 \omega \Rightarrow A_2 = \frac{u_1}{\omega} = \frac{0,25}{10} = 0,025 = 2,5 \text{ cm}$$

ΘΕΜΑ 3ο [4]

Τη χρονική στιγμή $t=0$, βλήμα μάζας $m=0,1 \text{ kg}$, εκτοξεύεται από μηδενικό ύψος ($y_0=0$), με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0=100 \text{ m/s}$, υπό γωνία $\theta=65^\circ$, πάνω από οριζόντιο έδαφος. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα να βρείτε:



3.1 Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία θα φτάσει στο μέγιστο ύψος

3.2 Το μέγιστο ύψος H και τη δυναμική ενέργεια του βλήματος εκεί

3.3 Την κινητική ενέργεια που έχει στο μέγιστο ύψος

3.4 Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία θα χτυπήσει στο έδαφος

3.5 Το βεληνεκές R .

ΛΥΣΗ

Εξισώσεις πλάγιας βολής:	$v_x = v_0 \cos \theta = \text{σταθ} \quad (1) \quad v_y = v_{0y} - gt \quad (2)$
	$x = v_x t \quad (3) \quad y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$

$$v_x = v_0 \cos \theta = (100)(\cos 65^\circ) = (100)(0,422618) = 42,26 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta = (100)(\sin 65^\circ) = (100)(0,906308) = 90,63 \text{ m/s}$$

$$\text{Ενέργεια (διατηρείται)} : E = K + U = K_0 + U_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g y_0 = \frac{1}{2} (0,1)(100)^2 + (0,1)(10)(0) = 500 \text{ J}$$

3.1 Όταν φτάσει στο μέγιστο ύψος η κατακόρυφη ταχύτητα γίνεται μηδέν. Από την (2) :

$$v_y = 0 \Rightarrow 0 = v_{0y} - g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{90,63}{10} = 9,063 \text{ s}$$

3.2 Από την (4) βρίσκουμε το y εκείνη τη στιγμή, το οποίο είναι το μέγιστο ύψος

$$H = y(t_1) \Rightarrow H = v_{0y} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0y}^2 - v_{0y}^2/2}{g} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{90,63^2}{2(10)} = 410,7 \text{ m}$$

$$\text{Η δυναμική ενέργεια είναι} : U = m g y \Rightarrow U_{\text{top}} = m g H = (0,1)(10)(410,7) = 410,7 \text{ J}.$$

3.3 Στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα έχει μόνο οριζόντια (x) συνιστώσα.

$$K_{\text{top}} = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = \frac{1}{2} (0,1)(42,26)^2 = 89,3 \text{ (SI)}$$

$$\text{Ή από την ενέργεια} : E = K_{\text{top}} + U_{\text{top}} \Rightarrow K_{\text{top}} = E - U_{\text{top}} = 500 - 410,7 = 89,3 \text{ J}$$

3.4 Όταν το βλήμα χτυπήσει στο έδαφος, το y θα είναι μηδέν

$$y(t_2) = 0 \Rightarrow v_{0y} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \Rightarrow \left(v_{0y} - \frac{1}{2} g t_2 \right) t_2 = 0 \Rightarrow v_{0y} - \frac{1}{2} g t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_1 = 2(9,063) = 18,126 \text{ s}$$

3.5 Από την (3) βρίσκουμε το x εκείνη τη στιγμή, που είναι το βεληνεκές

$$R = x(t_2) \Rightarrow R = v_x t_2 = (42,26)(18,126) = 766 \text{ m}$$