



Experimental Biomechanics

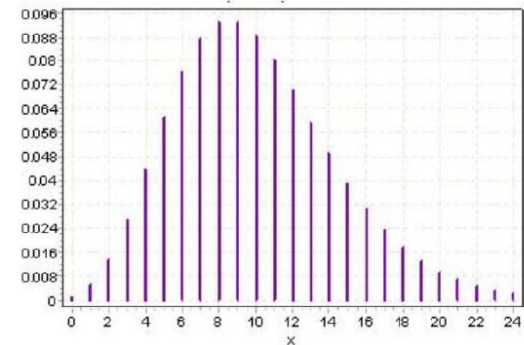
Στατιστική επεξεργασία δεδομένων Εισαγωγή στους στατιστικούς ελέγχους υποθέσεων

Σοφία Παναγιωτίδου
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή

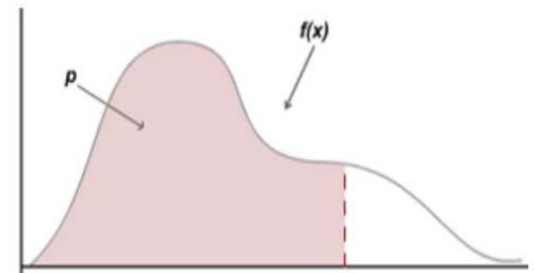
Τυχαίες μεταβλητές και Κατανομές

- Διακριτές - Συνεχείς
- Συνάρτηση Πιθανότητας - Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) \quad \left\{ f(x) \geq 0, \sum_x f(x) = 1 \right\}$$



$$f(x) \quad \left\{ f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \right\}$$



Χαρακτηριστικές τιμές

Μέση τιμή: $E(X) = \sum_x xf(x) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

Μεταβλητότητα: $\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$

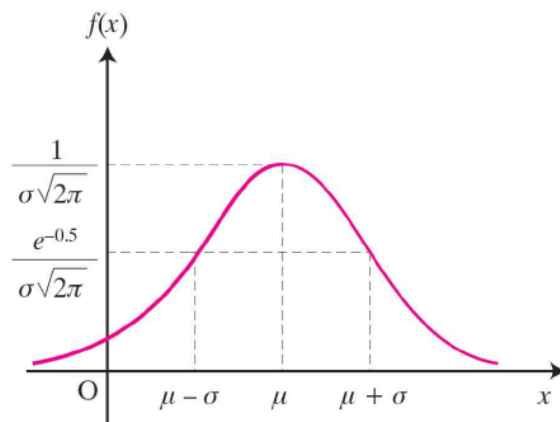
Τυπική απόκλιση: $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{Var(X)}$

Κανονική κατανομή

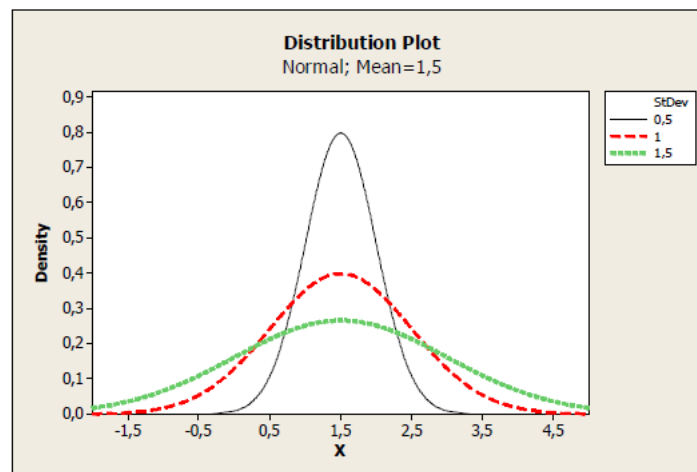
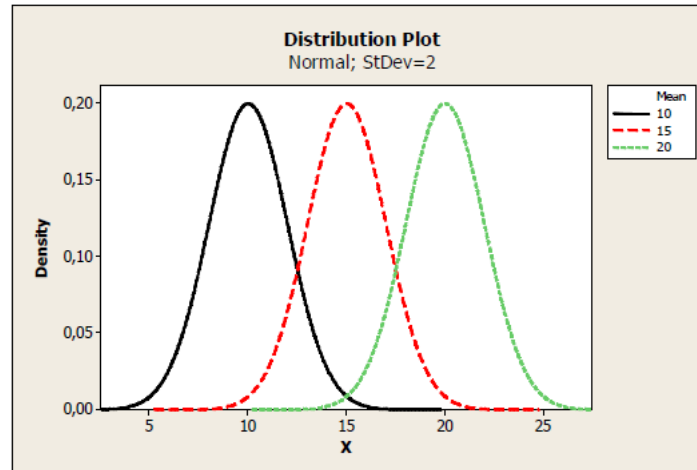
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{Μέση τιμή: } \mu \quad \text{Μεταβλητότητα: } \sigma^2$$

Γραφική παράσταση της $f(x)$

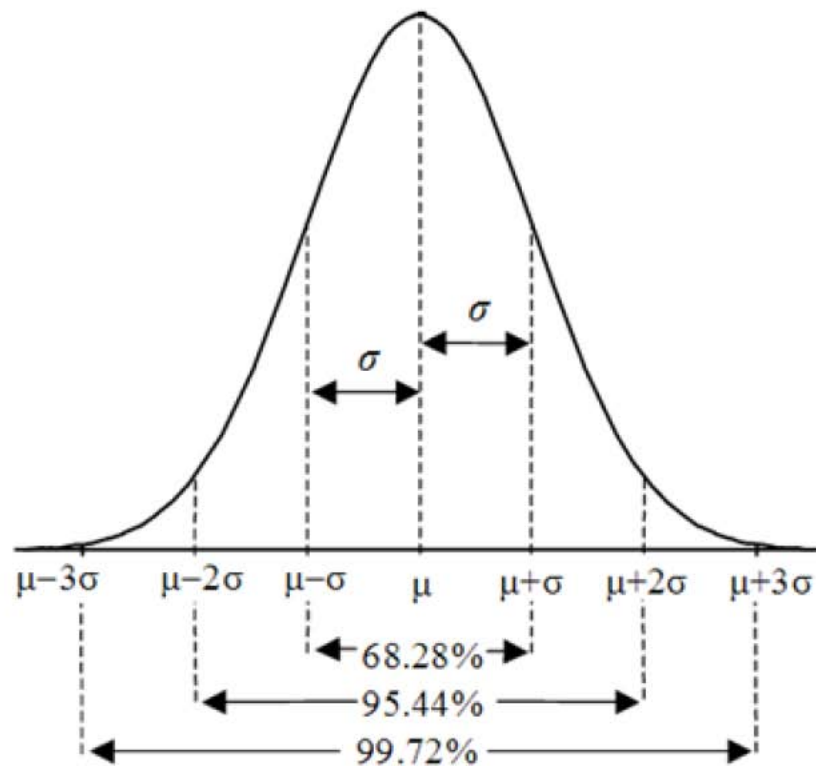
- $f(\mu+x) = f(\mu-x)$, δηλαδή $f(x)$ συμμετρική ως προς μ
- $f(x)$ αύξουσα για $x < \mu$, φθίνουσα για $x > \mu$
- Μέγιστη τιμή: $f(\mu) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$
- Τα σημεία $\mu \pm \sigma$ είναι σημεία καμπής
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$
- Αύξηση (μείωση) του μ μετατοπίζει την f δεξιά (αριστερά)
- Αύξηση (μείωση) του σ μειώνει (αυξάνει) την “αιχμηρότητα” της κατανομής



Κανονική κατανομή



Κανονική κατανομή



Κανονική κατανομή

Αναπαραγωγική Ιδιότητα:

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τμ με $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Τότε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός $c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$ έχει επίσης κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i$$

και διασπορά

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Μετασχηματισμός z

- Κάθε κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma)$ μπορεί να μετασχηματιστεί στην τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$
- Μετασχηματισμός z

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Συνάρτηση Excel: =standardize(x ; μ ; σ)
- Παράδειγμα: για μια τυχαία μεταβλητή $X \sim N(100, 50)$ υπολογίστε το μετασχηματισμό z για την τιμή $x = 180$

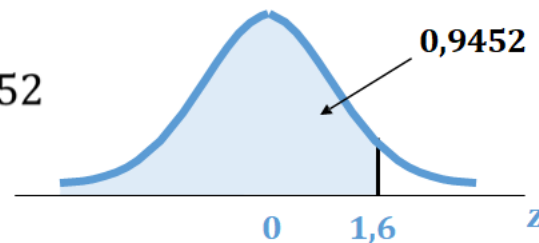
$$z = \frac{180 - 100}{50} = 1,6$$

- Η τιμή $x = 180$ είναι 1,6 τυπικές αποκλίσεις υψηλότερη από τη μέση τιμή

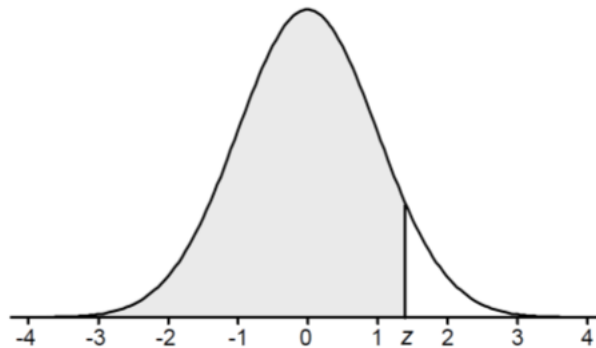
Πίνακες τυπικής κανονικής κατανομής

- Για την τυπική κανονική κατανομή υπάρχουν διαθέσιμοι πίνακες πιθανοτήτων
 - Πριν τη χρήση ενός πίνακα πιθανοτήτων προσοχή στην πληροφορία που παρουσιάζει
- Ένας πίνακας παρουσιάζει αθροιστικές πιθανότητες της μορφής $\Pr(Z \leq z)$

Παράδειγμα: $\Pr(Z \leq 1,6) = 0,9452$

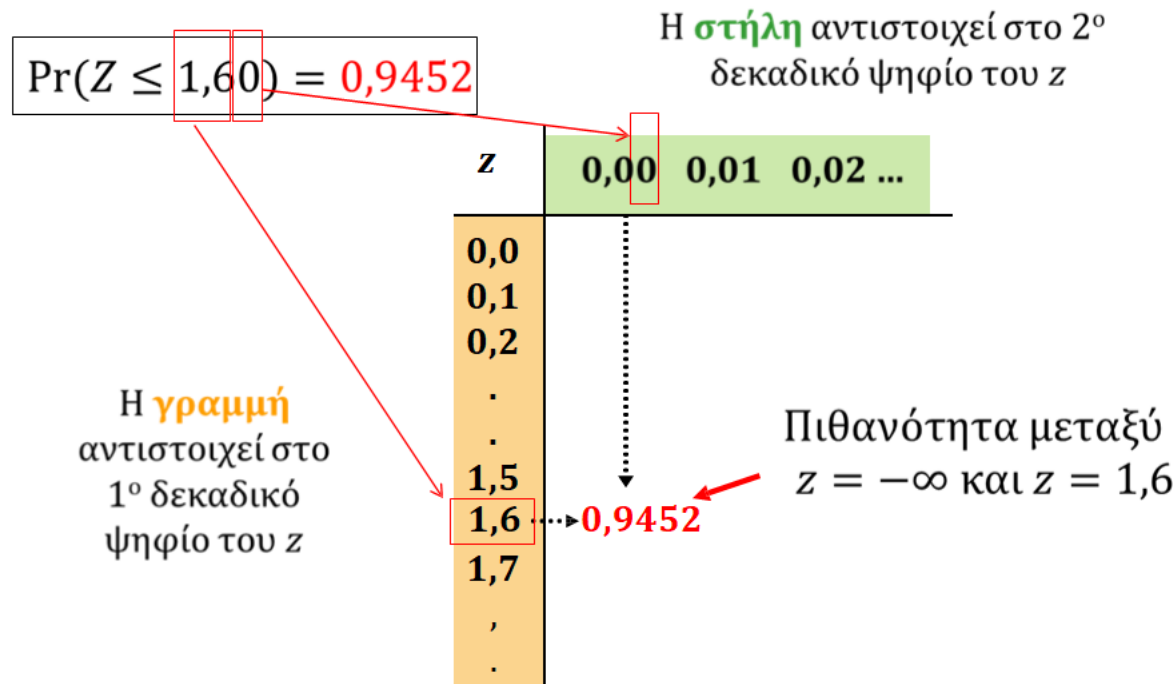


Πίνακες τυπικής κανονικής κατανομής



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

Πίνακες τυπικής κανονικής κατανομής



Συναρτήσεις Excel

- Υπολογισμός πιθανότητας $\Pr(X \leq x)$ από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma)$
=normdist($x; \mu; \sigma; \text{cumulative}$) ή =norm.dist($x; \mu; \sigma; \text{cumulative}$)
 - Cumulative = true (1) για υπολογισμούς από την αθροιστική κατανομή
 - Cumulative = false (0) για υπολογισμούς από την PDF
- Υπολογισμός τιμής x μιας τυχαίας μεταβλητής $X \sim N(\mu, \sigma)$, τέτοια ώστε $\Pr(X \leq x) = \alpha$
=norminv($\alpha; \mu; \sigma$) ή =norm.inv($\alpha; \mu; \sigma$)
- Ειδικές συναρτήσεις για $\mu = 0$ και $\sigma = 1$ (τυπική κανονική κατανομή)
=normsdist(z) ή =norm.s.dist(z)
=normsinv(α) ή =norm.s.inv(α)

Παράδειγμα

Υποθέστε ότι η ποσότητα υδρογονανθράκων που εκπέμπουν αυτοκίνητα ορισμένου τύπου ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 1 gr/km και τυπική απόκλιση 0,25 gr/km.

α) Βρείτε την πιθανότητα κάποιο τυχαίο αυτοκίνητο αυτού του τύπου να εκπέμπει από 0,9 gr/km έως 1,54 gr/km.

$$\begin{aligned} P(0,9 < X < 1,54) &= P\left(\frac{0,9-1}{0,25} < Z < \frac{1,54-1}{0,25}\right) = P(-0,4 < Z < 2,16) = \Phi(2,16) - \Phi(-0,4) = \\ &= \Phi(2,16) - 1 + \Phi(0,4) = 0,9846 - 1 + 0,6554 = 0,64 \end{aligned}$$

β) Αν σε κάποιον έλεγχο καυσαερίων κόβονται όλα τα αυτοκίνητα που εκπέμπουν υδρογονάνθρακες πάνω από 1,4 gr/km, τι ποσοστό των αυτοκινήτων του συγκεκριμένου τύπου περνούν τον έλεγχο;

$$P(X < 1,4) = P\left(Z < \frac{1,4-1}{0,25}\right) = P(Z < 1,6) = \Phi(1,6) = 0,9452$$

γ) Βρείτε το 15^ο εκατοστιαίο σημείο των εκπομπών υδρογονανθράκων των αυτοκινήτων αυτού του τύπου.

$$P(X < x_{0,15}) = 0,15 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x_{0,15}-1}{0,25}\right) = 0,15 \Rightarrow P\left(Z < \frac{1-x_{0,15}}{0,25}\right) = 0,85 \Rightarrow \frac{1-x_{0,15}}{0,25} = 1,04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{0,15} = 1 - 1,04 \cdot 0,25 = 0,74$$

Εκτίμηση παραμέτρων – Βασικές έννοιες

Επαγωγική στατιστική – Στατιστική συμπερασματολογία

Πληθυσμός - Δείγμα

Στατιστικές εκτιμήσεις: (σημειακές εκτιμήσεις – διαστήματα εμπιστοσύνης)

Στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων (απόλυτη αντιστοιχία με τα διαστήματα εμπιστοσύνης)

Συνήθεις εκτιμήτριες:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$\hat{p} = \frac{d}{n}$$

Διάστημα Εμπιστοσύνης

Το διάστημα εμπιστοσύνης είναι ένα διάστημα τιμών μέσα στο οποίο βρίσκεται μια άγνωστη παράμετρος του πληθυσμού (π.χ. η μέση του τιμή) με κάποια βεβαιότητα (συνήθως $1-\alpha$).

Κατασκευή διαστήματος εμπιστοσύνης

Βρίσκουμε μια τ.μ. V που εξαρτάται από το δείγμα και την άγνωστη παράμετρο θ , αλλά έχει γνωστή κατανομή. Χρησιμοποιώντας την κατανομή της V βρίσκουμε ένα διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκεται η V με δεδομένη πιθανότητα και λύνουμε ως προς θ .

$$P(v_{1-\alpha/2} < V < v_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \Rightarrow P(L < \theta < U) = 1 - \alpha$$

Ερμηνεία διαστήματος εμπιστοσύνης

Έχουμε $(1-\alpha)100\%$ εμπιστοσύνη ότι ισχύει $l < \theta < u$

Επίπεδο εμπιστοσύνης και μέγεθος δείγματος

$$\alpha \uparrow \Rightarrow (1 - \alpha) \downarrow \Rightarrow d \downarrow$$

$$n \uparrow \Rightarrow d \downarrow$$

Διάστημα Εμπιστοσύνης Μέσης Τιμής

Χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τον τρόπο υπολογισμού του διαστήματος εμπιστοσύνης και διεξαγωγής του ελέγχου υποθέσεων:

Μέση τιμή ενός πληθυσμού

- 1.Κανονική ή μη κανονική κατανομή πληθυσμού
- 2.Γνωστή ή άγνωστη μεταβλητότητα
- 3.Μικρό ή μεγάλο μέγεθος δείγματος

Σύγκριση μέσων τιμών δύο πληθυσμών

- 1.Κανονική ή μη κανονική κατανομή πληθυσμών
- 2.Γνωστές ή άγνωστες μεταβλητότητες (ίσες ή άνισες μεταξύ τους)
- 3.Μικρά ή μεγάλα μεγέθη δειγμάτων
- 4.Ανεξάρτητες ή εξαρτημένες μετρήσεις

Διάστημα εμπιστοσύνης Μέσης Τιμής

1. Για κανονική κατανομή πληθυσμού και γνωστή μεταβλητότητα

Η τ.μ. $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή

Άρα το δ.ε. της μέσης τιμής είναι $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2. Για κανονική κατανομή πληθυσμού και άγνωστη μεταβλητότητα

Η τ.μ. $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ ακολουθεί την κατανομή t με n-1 β.ε.

Άρα το δ.ε. της μέσης τιμής είναι $\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$

3. Για μεγάλα δείγματα

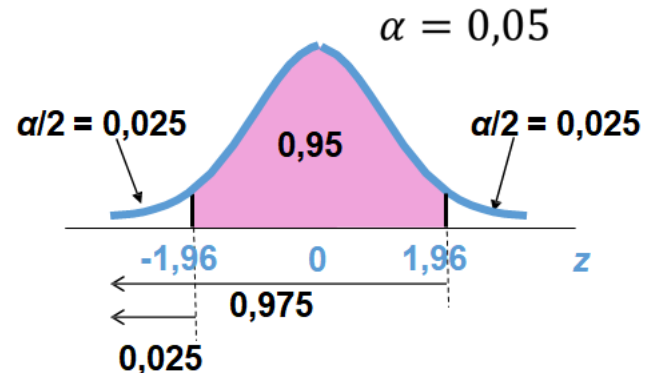
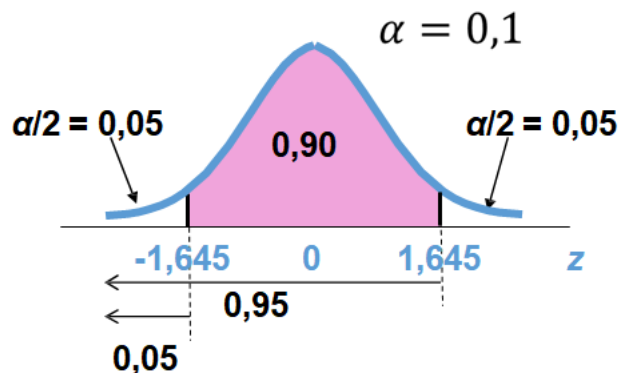
Η τ.μ. $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ή $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή

Άρα το δ.ε. της μέσης τιμής είναι $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ή $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$

Δ.Ε. για τη μέση τιμή κανονικού πληθυσμού με γνωστή μεταβλητότητα

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}$$

- $\bar{x}$ = μέση τιμή δείγματος
- $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ τυπικό σφάλμα μέσης τιμής
- $z_{1-\alpha/2}$ = κρίσιμη τιμή από την κανονική κατανομή, τέτοια ώστε $\Pr(Z > z_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$



Δ.Ε. για τη μέση τιμή κανονικού πληθυσμού με άγνωστη μεταβλητότητα

- Η τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού σπανίως είναι γνωστή
- Αντί αυτής χρησιμοποιούμε τη δειγματική εκτίμηση s
- Με την αλλαγή αυτή ο μετασχηματισμός z για τη μέση τιμή

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή, αλλά την κατανομή t του Student (William Sealy Gosset, 1908) με $n - 1$ βαθμούς ελευθερίας (degrees of freedom)

- Εκτίμηση Δ.Ε.: $\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$

Παράδειγμα

Σε περίοδο μιας εβδομάδας έγιναν 7 μετρήσεις της ημερήσιας συγκέντρωσης διαλυμένου οξυγόνου, Δ.Ο., σε κάποιο σταθμό ενός ποταμού που βρίσκεται κοντά σε ένα εργοστάσιο. Προέκυψαν οι εξής τιμές (σε mg/l):

2.4, 1.9, 2.7, 1.3, 2.5, 1.8, 2.1

(α) Βρείτε το 99% δ.ε. για τη μέση ημερήσια συγκέντρωση Δ.Ο. υποθέτοντας κανονική κατανομή για την ημερήσια συγκέντρωση Δ.Ο.

(β) Ερμηνεύστε το δ.ε. που βρήκατε.

(γ) Πώς μπορείτε να αυξήσετε της ακρίβεια του δ.ε. του ερωτήματος (α);

$$(α) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7} = \frac{14.7}{7} = 2.1 \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}{6} = \frac{1.38}{6} = 0.23 \Rightarrow s = \sqrt{0.23} = 0.48$$

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm t_{0.995, 6} \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.1 \pm 3.707 \frac{0.48}{\sqrt{7}} = 2.1 \pm 0.67 = (1.43 \text{ } 2.77)$$

(β) Έχουμε 99% βεβαιότητα ότι η μέση ημερήσια συγκέντρωση Δ.Ο. βρίσκεται στο διάστημα (1.43, 2.77).

(γ) Αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος.

Δ.Ε. για Διωνυμική Αναλογία / Ποσοστό

Δειγματική Αναλογία

$$\hat{p} = \frac{d}{n} \quad \mu_{\hat{p}} = p \quad \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{pq/n}$$

Για μεγάλα δείγματα

Η τ.μ. $Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή

Άρα το διάστημα εμπιστοσύνης του ποσοστού είναι: $\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

Παράδειγμα

Σε μία προεκλογική έρευνα συμμετείχαν 2000 ψηφοφόροι, οι 736 εκ των οποίων δήλωσαν την προτίμησή τους στο κόμμα Α.

Βρείτε το 99% δ.ε. για το ποσοστό των ψηφοφόρων που προτιμούν το κόμμα Α;

$$\hat{p} = \frac{d}{n} = \frac{736}{2000} = 0.368$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0.368 = 0.632$$

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \hat{p} \pm z_{0.995} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.368 \pm 2.576 \sqrt{\frac{0.368 \cdot 0.632}{2000}} = 0.368 \pm 0.0278 = (0.3402, 0.3958)$$

Έχουμε 99% βεβαιότητα ότι το ποσοστό των ψηφοφόρων που προτιμούν το κόμμα Α βρίσκεται στο διάστημα (34.02%, 39.58%).

Δ.Ε. Διαφοράς Μέσων Τιμών

1. Για κανονικούς πληθυσμούς και γνωστές μεταβλητότητες

$$\text{Η τ.μ. } Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ ακολουθεί την } N(0,1)$$

Άρα το δ.ε. της διαφοράς των μέσων τιμών είναι: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

2. Για κανονικούς πληθυσμούς και άγνωστες, αλλά ίσες, μεταβλητότητες

$$\text{Η τ.μ. } T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \text{ ακολουθεί την } t \text{ με } n_1 + n_2 - 2 \text{ β.ε.}$$

Άρα το δ.ε. της διαφοράς των μέσων τιμών είναι: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

$$\text{όπου } s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Δ.Ε. Διαφοράς Μέσων Τιμών

3. Για κανονικούς πληθυσμούς και άγνωστες, αλλά άνισες, μεταβλητότητες

Η τ.μ. $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$ ακολουθεί την t με ν β.ε.

Άρα το δ.ε. της διαφοράς των μέσων τιμών είναι: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{1-\alpha/2, \nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

όπου $\nu = \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2 \bigg/ \left(\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1} \right)$

4. Για μεγάλα δείγματα

Η τ.μ. $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ ή $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$ ακολουθεί την $N(0,1)$

Άρα το δ.ε. είναι: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ ή $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Μέση διαφορά με δείγματα κατά ζεύγη

$$D_i = X_i - Y_i \qquad \bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \qquad S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$$

Υπόθεση: η τ.μ. (X_i, Y_i) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή

$$\text{Η τ.μ. } T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \text{ ακολουθεί την } t \text{ με } n-1 \text{ β.ε.}$$

Άρα το δ.ε. της μέσης διαφοράς είναι: $\bar{d} \pm t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$

Έλεγχος Υποθέσεων

Μηδενική υπόθεση: H_0 (π.χ. $\theta = \theta_0$)

Εναλλακτική υπόθεση: H_1 (Αμφίπλευρη: $\theta \neq \theta_0$ ή μονόπλευρη: $\theta > \theta_0$ ή $\theta < \theta_0$)

Επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου – α

Ο έλεγχος γίνεται μέσω της **στατιστικής συνάρτησης ελέγχου (σ.σ.ε.)** η οποία έχει μια πλήρως προσδιορισμένη κατανομή αν ισχύει η H_0 .

Η H_0 απορρίπτεται αν παρατηρηθεί στατιστικώς σημαντική διαφορά (σε **επίπεδο σημαντικότητας α**) της τιμής της σ.σ.ε. από τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή της.

Στατιστικώς σημαντική διαφορά ονομάζεται η διαφορά που μπορεί να εμφανιστεί μόνο με πιθανότητα α αν ισχύει η H_0 .

Η απόφαση του ελέγχου προσδιορίζεται από την τιμή της σ.σ.ε. σε σχέση με δύο συμπληρωματικές περιοχές τιμών: Περιοχή αποδοχής της H_0 – Περιοχή απόρριψης της H_0 (**κρίσιμη περιοχή**)

Διαδικασία Ελέγχου Υποθέσεων

Βήμα 1: Καθορισμός της μηδενικής και της εναλλακτικής υπόθεσης

Βήμα 2: Καθορισμός της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου και της κρίσιμης περιοχής (λαμβάνοντας υπ' όψιν: (i) την κατανομή της σ.σ.ε., (ii) τη μορφή της H_1 και (iii) το επίπεδο σημαντικότητας α)

Βήμα 3: Υπολογισμός της παρατηρούμενης τιμής της σ.σ.ε. από τα δεδομένα

Βήμα 4: Απόφαση απόρριψης ή αποδοχής της H_0 ανάλογα με το αν η παρατηρούμενη τιμή της σ.σ.ε. ανήκει ή όχι στην κρίσιμη περιοχή (περιοχή απόρριψης της H_0)

Βήμα 5: Ερμηνεία του αποτελέσματος και απάντηση στο σχετικό ερώτημα

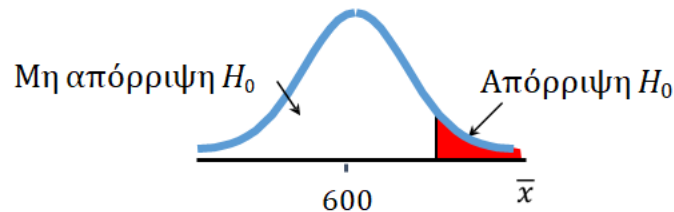
Μονόπλευροι στατιστικοί έλεγχοι

- Η εναλλακτική υπόθεση εκφράζεται σε μορφή $< \text{ή} >$

$$H_0: \mu = 600$$

$$H_1: \mu > 600$$

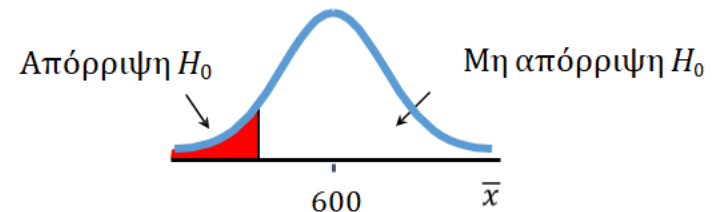
Υποθέτουμε ότι $\mu = 600$ εκτός εάν η μέση τιμή του δείγματος είναι σημαντικά μεγαλύτερη από 600



$$H_0: \mu = 600$$

$$H_1: \mu < 600$$

Υποθέτουμε ότι $\mu = 600$ εκτός εάν η μέση τιμή του δείγματος είναι σημαντικά μικρότερη από 600



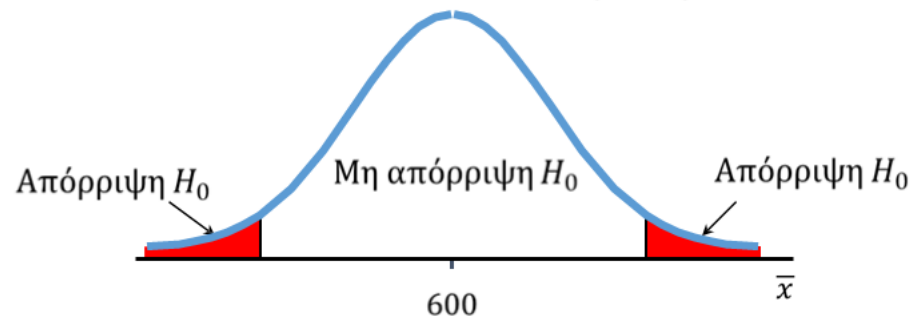
Αμφίπλευροι στατιστικοί έλεγχοι

- Η εναλλακτική υπόθεση εκφράζεται στη μορφή $\neq$

$$H_0: \mu = 600$$

$$H_1: \mu \neq 600$$

Υποθέτουμε ότι $\mu = 600$, εκτός εάν διαπιστωθεί ότι η μέση τιμή του δείγματος διαφέρει σημαντικά από την τιμή 600



Έλεγχος Υποθέσεων - Σφάλματα

Σφάλμα τύπου I – σφάλμα πρώτου είδους:

Απόρριψη της H_0 ενώ είναι αληθής.

Η πιθανότητα σφάλματος τύπου I, α , ισούται με το επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου.

Σφάλμα τύπου II – σφάλμα δευτέρου είδους:

Αποδοχή της H_0 ενώ είναι ψευδής.

Η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, β , εξαρτάται από την πραγματική τιμή της θ .

Απόφαση	Πραγματικότητα	
	H_0 ισχύει	H_0 δεν ισχύει
Αποδοχή της H_0	Σωστή απόφαση	Σφάλμα τύπου II
Απόρριψη της H_0	Σφάλμα τύπου I	Σωστή απόφαση

Παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας – Ισχύς ελέγχου

Παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας – τιμή P (p-value):

Η πιθανότητα να εμφανιστεί η παρατηρούμενη τιμή της σ.σ.ε. (ή ακόμη πιο ακραία) αν ισχύει η H_0

Το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας είναι το ελάχιστο επίπεδο σημαντικότητας στο οποίο απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Μικρότερες τιμές του παρατηρούμενου επιπέδου σημαντικότητας αποτελούν ισχυρότερη ένδειξη ότι η H_0 δεν ισχύει.

Ισχύς ελέγχου 1-β:

Η πιθανότητα απόρριψης της H_0 όταν αυτή δεν ισχύει. Η ισχύς είναι συνάρτηση της πραγματικής τιμής της παραμέτρου θ .

Ε.Υ. Μέσης Τιμής

1. Για κανονική κατανομή πληθυσμού και γνωστή μεταβλητότητα

$$\text{σ.σ.ε.: } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

H ₁	Κρίσιμη περιοχή
$\mu < \mu_0$	$Z < -Z_{1-\alpha}$
$\mu > \mu_0$	$Z > Z_{1-\alpha}$
$\mu \neq \mu_0$	$Z < -Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z > Z_{1-\alpha/2}$

2. Για κανονική κατανομή πληθυσμού και άγνωστη μεταβλητότητα

$$\text{σ.σ.ε.: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

H ₁	Κρίσιμη περιοχή
$\mu < \mu_0$	$t < -t_{1-\alpha, n-1}$
$\mu > \mu_0$	$t > t_{1-\alpha, n-1}$
$\mu \neq \mu_0$	$t < -t_{1-\alpha/2, n-1}$ ή $t > t_{1-\alpha/2, n-1}$

3. Για μεγάλα δείγματα

$$\text{σ.σ.ε.: } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{ή} \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

H ₁	Κρίσιμη περιοχή
$\mu < \mu_0$	$Z < -Z_{1-\alpha}$
$\mu > \mu_0$	$Z > Z_{1-\alpha}$
$\mu \neq \mu_0$	$Z < -Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z > Z_{1-\alpha/2}$

Παράδειγμα

Μια κατασκευαστική εταιρία παραλαμβάνει υλικά συσκευασίας από έναν προμηθευτή της. Κατά την παραλαβή των παρτίδων διενεργεί έλεγχο για να διαπιστώσει εάν το μέσο βάρος των προϊόντων της παρτίδας είναι μεγαλύτερο από 200g (σε αυτή την περίπτωση η παρτίδα γίνεται αποδεκτή). Ο έλεγχος διενεργείται λαμβάνοντας τυχαίο δείγμα από κάθε παρτίδα 9 προϊόντων. Αν τα βάρη των 9 προϊόντων του δείγματος μιας παρτίδας είναι (σε g):

213, 206, 205, 194, 198, 203, 199, 207, 211

και έχει διαπιστωθεί από παρελθοντικά στοιχεία ότι το βάρος των υλικών συσκευασίας ακολουθεί κανονική κατανομή με μεταβλητότητα $25g^2$, θα πρέπει η εταιρία να αποδεχτεί τη συγκεκριμένη παρτίδα σε επίπεδο σημαντικότητας 5%;

Διενεργείται ο έλεγχος: $H_0: \mu=200$, $H_1: \mu > 200$

Για κανονική κατανομή πληθυσμού και γνωστή μεταβλητότητα

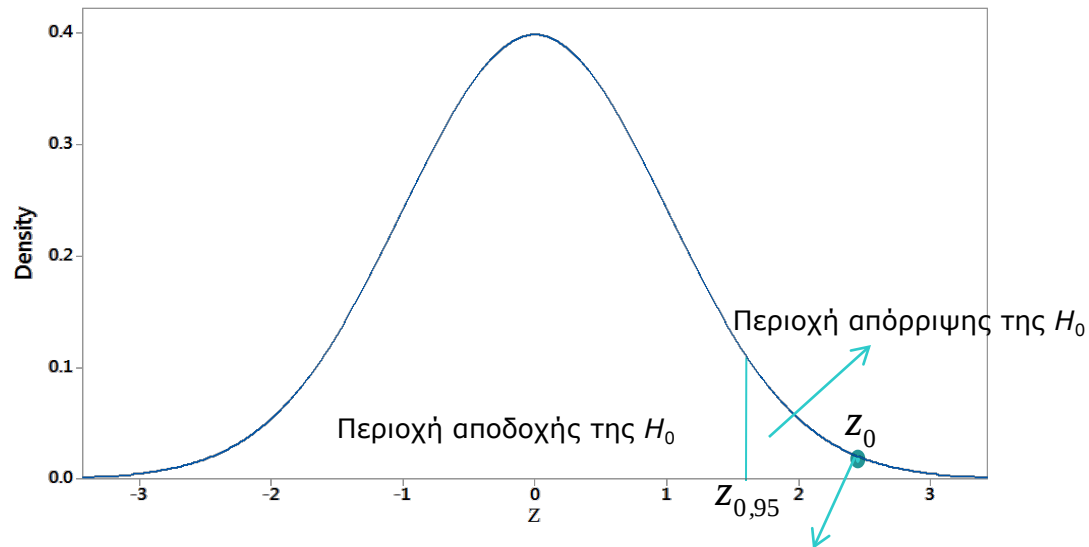
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1836}{9} = 204g \Rightarrow z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{204 - 200}{5/\sqrt{9}} = 2,4 > z_{0,95} = 1,645$$

Απορρίπτεται η H_0 και η παρτίδα γίνεται αποδεκτή.

Παράδειγμα

$$z_0 = 2,4$$

$$z_{0,95} = 1,645$$



Παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας

$$p - value = P(Z > z_0) = P(Z > 2,4) = 1 - \Phi(2,4) = 1 - 0,9918 = 0,0082$$

$p - value < \alpha \Rightarrow$ Απορρίπτεται η H_0 και η παρτίδα γίνεται αποδεκτή.

Παράδειγμα

Ένας έμπορος έχει παραγγείλει μια παρτίδα προϊόντων, το βάρος των οποίων ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 2kg και τυπική απόκλιση 50gr. Ο έμπορος επειδή υποψιάζεται ότι το μέσο βάρος είναι μικρότερο από 2kg κάνει έλεγχο υπόθεσης με $\sigma=0.05$ και $n=16$.

- (α) Προσδιορίστε τις υποθέσεις, την σ.σ.ε. και την κ.π. του ελέγχου.
(β) Αν $\mu=1.98\text{kg}$ ποια είναι η πιθανότητα απόρριψης της H_0 και ποιο το $\beta(1.98)$;
(γ) Αν το μέσο βάρος των 16 κομματιών είναι 1.985, ποια είναι η απόφαση του ελέγχου;
(δ) Ποιο μέγεθος δείγματος διασφαλίζει ότι $\beta(1.98)<0.1$;

(α) Για κανονική κατανομή πληθυσμού και γνωστή διασπορά

H_A	Κρίσιμη περιοχή
$\mu < 2$	$z < -z_\alpha = -z_{0.05} = -1.645$

$$\text{σ.σ.ε.: } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$(\beta) \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -1.645 \Rightarrow \frac{\bar{X} - 2}{0.05/\sqrt{16}} < -1.645 \Rightarrow \frac{\bar{X} - 2}{0.0125} < -1.645 \Rightarrow \bar{X} < 1.9794$$

$$\beta(1.98) = P(\bar{X} > 1.9794) = P\left(Z > \frac{1.9794 - 1.98}{0.0125}\right) = P(Z > -0.045) = \Phi(0.045) = 0.518$$

Παράδειγμα

Ένας έμπορος έχει παραγγείλει μια παρτίδα προϊόντων, το βάρος των οποίων ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 2kg και τυπική απόκλιση 50gr. Ο έμπορος επειδή υποψιάζεται ότι το μέσο βάρος είναι μικρότερο από 2kg κάνει έλεγχο υπόθεσης με $\alpha=0.05$ και $n=16$.

(α) Προσδιορίστε τις υποθέσεις, την σ.σ.ε. και την κ.π. του ελέγχου.

(β) Αν $\mu=1.98\text{kg}$ ποια είναι η πιθανότητα απόρριψης της H_0 και ποιο το $\beta(1.98)$;

(γ) Αν το μέσο βάρος των 16 κομματιών είναι 1.985, ποια είναι η απόφαση του ελέγχου;

(δ) Ποιο μέγεθος δείγματος διασφαλίζει ότι $\beta(1.98)<0.1$;

$$(γ) \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1.985 - 2}{0.0125} = -1.2 > -1.645$$

Άρα, δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και η παρτίδα πρέπει να γίνει αποδεκτή

$$(δ) \quad \text{Απορρίπτουμε αν } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha \Rightarrow \bar{X} < \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\beta(1.98) = P\left(\bar{X} > \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_1\right) = P\left(Z > \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_\alpha\right)$$

Άρα, για να διασφαλιστεί ότι $\beta(1.98)<0.1$ θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_\alpha > z_\beta \Rightarrow n > \left[\frac{(z_\alpha + z_\beta)\sigma}{(\mu_0 - \mu_1)} \right]^2 = \left[\frac{(z_{0.05} + z_{0.1})\sigma}{(\mu_0 - \mu_1)} \right]^2 = \left[\frac{(1.645 + 1.282) \cdot 0.05}{(2 - 1.98)} \right]^2 = 53.5 \Rightarrow n \geq 54$$

Άσκηση

Η κυβέρνηση έχει καθορίσει ότι το μέγιστο επιτρεπτό όριο ενός ρύπου στον αέρα είναι 2 ppm. Στην περιοχή ενός εργοστασίου που εκπέμπει το συγκεκριμένο ρύπο πάρθηκαν στην τύχη 5 δείγματα αέρα (στη διάρκεια μιας εβδομάδας) και βρέθηκαν οι εξής περιεκτικότητες του αέρα στο ρύπο: 2.2, 2.1, 2.1, 2.9, 2.2. Υπάρχουν σημαντικές ενδείξεις σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 ότι η μέση περιεκτικότητα του αέρα στο συγκεκριμένο ρύπο υπερβαίνει τον κανονισμό της κυβέρνησης θεωρώντας ότι η περιεκτικότητα του αέρα στο συγκεκριμένο ρύπο ακολουθεί κανονική κατανομή;

Για κανονική κατανομή πληθυσμού και άγνωστη διασπορά

H_A	Κρίσιμη περιοχή
$\mu > 2$	$t > t_{1-\alpha, n-1} = t_{0.95, 4} = 2.132$

$$\text{σ.σ.ε.: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{11.5}{5} = 2.3$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{4} = \frac{0.46}{4} = 0.115 \Rightarrow s = \sqrt{0.115} = 0.3391$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2.3 - 2}{0.3391/\sqrt{5}} = 1.979 < 2.132$$

Άρα, δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και καταλήγουμε ότι δεν υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις πως η μέση περιεκτικότητα του αέρα στο συγκεκριμένο ρύπο υπερβαίνει τον κανονισμό της κυβέρνησης

Ε.Υ. Διαφοράς Μέσων Τιμών

1. Για κανονικούς πληθυσμούς και γνωστές μεταβλητότητες

$$\text{σ.σ.ε.:} \quad Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

H_1	Κρίσιμη περιοχή
$\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$	$Z < -Z_{1-\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$	$Z > Z_{1-\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	$Z < -Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z > Z_{1-\alpha/2}$

2. Για κανονικούς πληθυσμούς και άγνωστες, αλλά ίσες, μεταβλητότητες

$$\text{σ.σ.ε.:} \quad T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$\text{όπου } S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

H_1	Κρίσιμη περιοχή
$\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$	$t < -t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$	$t > t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	$t < -t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$ ή $t > t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$

Ε.Υ. Διαφοράς Μέσων Τιμών

3. Για κανονικούς πληθυσμούς και άγνωστες, αλλά άνισες, μεταβλητότητες

$$\text{σ.σ.ε.:} \quad T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$
$$\text{όπου} \quad \nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

H_1	Κρίσιμη περιοχή
$\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$	$t < -t_{1-\alpha, \nu}$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$	$t > t_{1-\alpha, \nu}$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	$t < -t_{1-\alpha/2, \nu}$ ή $t > t_{1-\alpha/2, \nu}$

4. Για μεγάλα δείγματα

$$\text{σ.σ.ε.:} \quad Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

ή

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

H_1	Κρίσιμη περιοχή
$\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$	$z < -z_{1-\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$	$z > z_{1-\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	$z < -z_{1-\alpha/2}$ ή $z > z_{1-\alpha/2}$

Παράδειγμα

j	y_{1j}	y_{2j}
1	16,85	17,5
2	16,4	17,63
3	17,21	18,25
4	16,35	18
5	16,52	17,86
6	17,04	17,75
7	16,96	18,22
8	17,15	17,9
9	16,59	17,96
10	16,57	18,15

Να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αν οι μέσες τιμές των δύο πληθυσμών από τους οποίους προέρχονται τα δείγματα του πίνακα είναι ίσες ή όχι, θεωρώντας ότι οι δύο πληθυσμοί ακολουθούν κανονική κατανομή με άγνωστες μεταβλητότητες που μπορούν να θεωρηθούν ίσες.

$$\bar{y}_1 = 16,76 \quad \bar{y}_2 = 17,92$$

$$s_1^2 = 0,1 \quad s_2^2 = 0,061$$

$$s_1 = 0,316 \quad s_2 = 0,247$$

Διενεργείται ο έλεγχος: $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Για κανονικούς πληθυσμούς και άγνωστες, αλλά ίσες, μεταβλητότητες

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{9 \times 0,1 + 9 \times 0,061}{10 + 10 - 2} = 0,0805 \Rightarrow s_p = 0,284$$

$$t_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{16,76 - 17,92}{0,284 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -9,142$$

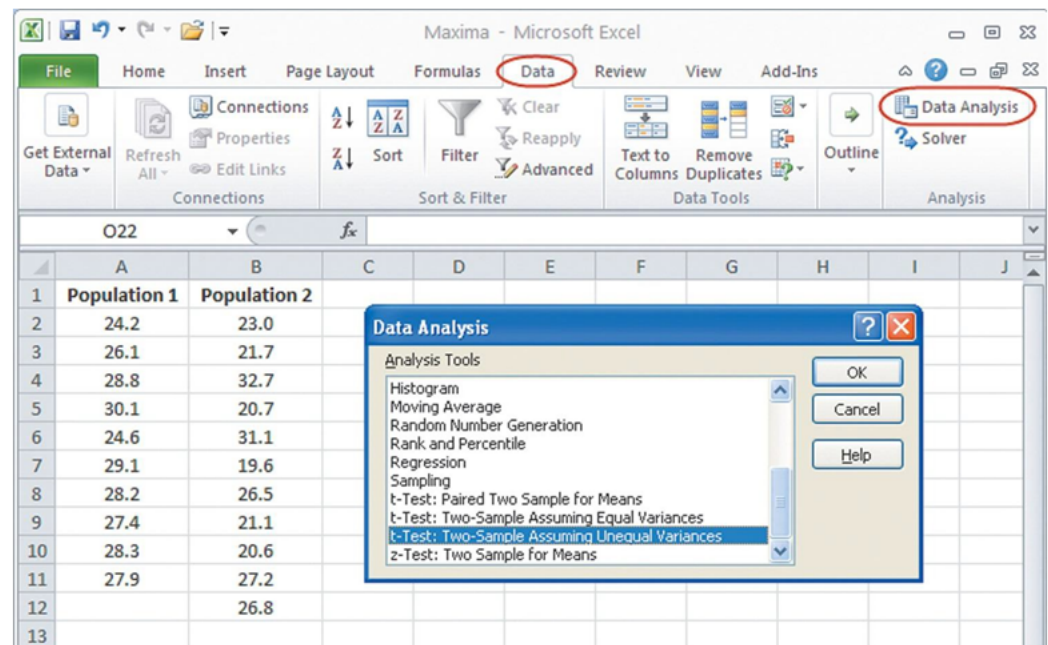
$$\pm t_{0,975,18} = \pm 2,1009$$

$$t_0 = -9,142 < -t_{0,975,18} = -2,1009$$

Απορρίπτεται η H_0

Έλεγχος μέσων τιμών δύο ανεξάρτητων πληθυσμών στο Excel

- Εισαγωγή δεδομένων των πληθυσμών σε διαφορετικές στήλες
- Από την καρτέλα **Data** επιλέγετε **Data Analysis**
- Επιλογή **t-test: Two-Sample Assuming Unequal Variances**



Έλεγχος μέσων τιμών δύο ανεξάρτητων πληθυσμών στο Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Population 1	Population 2							
2	24.2	23.0							
3	26.1	21.7							
4	28.8	32.7							
5	30.1	20.7							
6	24.6	31.1							
7	29.1	19.6							
8	28.2	26.5							
9	27.4	21.1							
10	28.3	20.6							
11	27.9	27.2							
12		26.8							
13									
14									
15									
16									

t-Test: Two-Sample Assuming Unequal Variances

Input

Variable 1 Range:

Variable 2 Range:

Hypothesized Mean Difference:

☒ Labels

Alpha:

Output options

☒ Output Range:

☐ New Worksheet Ply:

☐ New Workbook

OK Cancel Help

Έλεγχος μέσων τιμών δύο ανεξάρτητων πληθυσμών στο Excel

	A	B	C	D	E	F
1	Population 1	Population 2		t-Test: Two-Sample Assuming Unequal Variances		
2	24.2	23.0				
3	26.1	21.7			Population 1	Population 2
4	28.8	32.7	Mean		27.47	24.63636364
5	30.1	20.7	Variance		3.729	20.24854545
6	24.6	31.1	Observations		10	11
7	29.1	19.6	Hypothesized Mean Difference		0	
8	28.2	26.5	df		14	
9	27.4	21.1	t Stat		1.904526432	
10	28.3	20.6	P(T<=t) one-tail		0.038797843	
11	27.9	27.2	t Critical one-tail		1.761310136	
12		26.8	P(T<=t) two-tail		0.077595685	
13			t Critical two-tail		2.144786688	
14						

Ε.Υ. Μέσης διαφοράς με δείγματα κατά ζεύγη

$$D_i = X_i - Y_i$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$$

Υπόθεση: η τ.μ. (X_i, Y_i) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή

$$\sigma.σ.ε.: T = \frac{\bar{D} - \delta_0}{S_D / \sqrt{n}}$$

H₁	Κρίσιμη περιοχή
$\mu_D < \delta_0$	$t < -t_{1-\alpha, n-1}$
$\mu_D > \delta_0$	$t > t_{1-\alpha, n-1}$
$\mu_D \neq \delta_0$	$t < -t_{1-\alpha/2, n-1}$ ή $t > t_{1-\alpha/2, n-1}$

Παράδειγμα

j	y1j	y2j	d	Na ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αν η μέση τιμή της Y_2 διαφέρει από τη μέση τιμή της Y_1 , θεωρώντας ότι η διαφορά $Y_1 - Y_2$ ακολουθεί κανονική κατανομή και δεδομένου ότι οι τιμές Y_1 και Y_2 κάθε σειράς του πίνακα αντιστοιχούν στην ίδια μονάδα του πληθυσμού. $\bar{d} = -0,1$ $s_d = 1,2$ $n = 10$
1	7	6	1	
2	3	3	0	
3	3	5	-2	
4	4	3	1	
5	8	8	0	
6	3	2	1	
7	2	4	-2	
8	9	9	0	
9	5	4	1	
10	4	5	-1	

Διενεργείται ο έλεγχος: $H_0: \mu_d = 0$, $H_1: \mu_d \neq 0$

Για κανονική κατανομή του d

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{-0,1}{1,2 / \sqrt{10}} = -0,26$$

$$\pm t_{0,975,9} = \pm 2,262$$

$$t_0 = -0,26 > -t_{0,975,9} = -2,262$$

Δεν απορρίπτεται η H_0

Έλεγχος μέσων τιμών δύο εξαρτημένων πληθυσμών στο Excel

- Εισαγωγή δεδομένων σε δύο στήλες
- Από την καρτέλα **Data** επιλέγετε **Data Analysis**
- Επιλογή **t-Test: Paired Two Sample for Means**

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the **Data** tab selected. The **Data Analysis** toolpak is installed, as evidenced by the **Data Analysis** button in the **Formulas** ribbon. The **Data Analysis** dialog box is open, displaying a list of analysis tools. The **t-Test: Paired Two Sample for Means** option is selected.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Firm ID	ROA (t-1)	ROA (t+1)						
2	AT9010011	10.21	9.29						
3	AT9070007	10.02	7.87						
4	AT9090007	4.31	5.52						
5	AT9110048	-0.20	3.18						
6	AT9110242	34.82	35.70						
7	AT9110254	10.04	11.86						
8	AT9110441	-2.76	2.54						
9	AT9150003	21.58	16.78						
10	AU0000172	12.82	16.25						
11	AU0040854	-1.90	2.33						
12	BE0202239	4.10	9.22						

Έλεγχος μέσων τιμών δύο εξαρτημένων πληθυσμών στο Excel

	A	B	C	D
1	Firm ID	ROA (t-1)	ROA (t+1)	
2	AT9010011	10.21	9.29	
3	AT9070007	10.02	7.87	
4	AT9090007	4.31	5.52	
5	AT9110048	-0.20	3.18	
6	AT9110242	34.82	35.70	
7	AT9110254	10.04	11.86	
8	AT9110441	-2.76	2.54	
9	AT9150003	21.58	16.78	
10	AU0000172	12.82	16.25	
11	AU0040854	-1.90	2.33	
12	BE0202239	4.10	9.22	

t-Test: Paired Two Sample for Means

Input

Variable 1 Range:

Variable 2 Range:

Hypothesized Mean Difference:

☒ Labels

Alpha:

Output options

☐ Output Range:

☒ New Worksheet Ply:

☐ New Workbook

OK Cancel Help

Έλεγχος μέσων τιμών δύο εξαρτημένων πληθυσμών στο Excel

	A	B	C
1	t-Test: Paired Two Sample for Means		
2			
3		ROA (t-1)	ROA (t+1)
4	Mean	3.223320066	2.46952073
5	Variance	110.1719852	133.8392454
6	Observations	603	603
7	Pearson Correlation	0.573402523	
8	Hypothesized Mean Difference	0	
9	df	602	
10	t Stat	1.808541782	
11	P(T<=t) one-tail	0.035510522	
12	t Critical one-tail	1.647388728	
13	P(T<=t) two-tail	0.071021045	
14	t Critical two-tail	1.963912434	

← Μονόπλευρος έλεγχος

← Αμφίπλευρος έλεγχος

Ε.Υ. Λόγου Μεταβλητοτήτων

Για κανονικές κατανομές πληθυσμών

$$\sigma.σ.ε.: F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{\lambda_0}$$

H_1	Κρίσιμη περιοχή
$\sigma_1^2/\sigma_2^2 > \lambda_0$	$f > f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$
$\sigma_1^2/\sigma_2^2 < \lambda_0$	$f < f_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$
$\sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq \lambda_0$	$f < f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ ή $f > f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$

$$\text{όπου } S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1} \text{ και } S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1}$$

Παράδειγμα

Από δύο πληθυσμούς που ακολουθούν την κανονική κατανομή ελήφθησαν δύο δείγματα (ένα από τον κάθε πληθυσμό) μεγέθους $n_1=12$ και $n_2=10$, αντίστοιχα, και υπολογίστηκαν οι ακόλουθες εκτιμήτριες μεταβλητότητας:

$$s_1^2 = 14,5 \quad s_2^2 = 10,8$$

Να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αν η μεταβλητότητα του πρώτου πληθυσμού είναι μεγαλύτερη από τη μεταβλητότητα του δεύτερου.

Διενεργείται ο έλεγχος: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Για κανονικές κατανομές πληθυσμών

$$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{14,5}{10,8} = 1,34$$

$$f_{0,95,11,9} = 3,1$$

$$f_0 = 1,34 < f_{0,95,11,9} = 3,1$$

Δεν απορρίπτεται η H_0

Παράδειγμα

j	y_{1j}	y_{2j}
1	16,85	17,5
2	16,4	17,63
3	17,21	18,25
4	16,35	18
5	16,52	17,86
6	17,04	17,75
7	16,96	18,22
8	17,15	17,9
9	16,59	17,96
10	16,57	18,15

Να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αν οι μέσες τιμές των δύο πληθυσμών από τους οποίους προέρχονται τα δείγματα του πίνακα είναι ίσες ή όχι, θεωρώντας ότι οι δύο πληθυσμοί ακολουθούν κανονική κατανομή με άγνωστες μεταβλητότητες που μπορούν να θεωρηθούν ίσες.

$$\bar{y}_1 = 16,76 \quad \bar{y}_2 = 17,92 \quad \bar{y} = 17,34$$

$$s_1^2 = 0,1 \quad s_2^2 = 0,061$$

$$s_1 = 0,316 \quad s_2 = 0,247$$

Εκτίμηση μεταβλητότητας: α) $s_p^2 = 0,0805$

β) μέσω της μεταβλητότητας των $\bar{y}_i$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{2-1} = (\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y})^2 = (16,76 - 17,34)^2 + (17,92 - 17,34)^2 = 0,6728 \rightarrow s^2 = ns_y^2 = 6,728$$

Διενεργείται ο έλεγχος: $H_0: \sigma^2 = \sigma_p^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_p^2$

$$f_0 = \frac{s^2}{s_p^2} = \frac{6,728}{0,0805} = 83,5776 \left(= (-9,142)^2 \right)$$

$$f_{0,95,1,18} = 4,4139 \left(= (-2,1009)^2 \right)$$

$$f_0 = 83,5776 > f_{0,95,1,18} = 4,4139$$

Απορρίπτεται η H_0 , άρα οι μέσες τιμές διαφέρουν

Γενίκευση σε περισσότερους από δύο πληθυσμούς

Σύγκριση μέσων τιμών ανεξάρτητων πληθυσμών

Ο έλεγχος εκτελείται μέσω της μεθοδολογίας της ανάλυσης μεταβλητότητας (ANOVA) που είναι ισοδύναμη με τον έλεγχο ισότητας μέσων τιμών που προέρχονται από πληθυσμούς που ακολουθούν **κανονική κατανομή** με **άγνωστες και ίσες μεταβλητότητες**.

Για πληθυσμούς που δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, υπάρχει η **μη παραμετρική ανάλυση μεταβλητότητας** (non parametric tests – Kruskal Wallis).

Σύγκριση μέσων τιμών εξαρτημένων μετρήσεων (πληθυσμών)

Στην περίπτωση των εξαρτημένων μετρήσεων (κατά ομάδες), η ANOVA τροποποιείται ώστε να ληφθεί υπ' όψιν η εξάρτηση (ως ξεχωριστός παράγοντας).

Σημαντικά σημεία ελέγχων υποθέσεων

1. Όλη η σημαντική πληροφορία ενός ελέγχου συνοψίζεται στο p -value.
2. Τα στατιστικά συμπεράσματα υπόκεινται πάντα σε στατιστικά σφάλματα και συνοδεύονται από τον αντίστοιχο βαθμό βεβαιότητας/αβεβαιότητας.
3. Πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή του κατάλληλου τύπου ελέγχου ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος.
4. Πρέπει να ελέγχεται η ορθότητα των υποθέσεων (π.χ. κανονική κατανομή πληθυσμού, ίσες μεταβλητότητες, κλπ.).
5. Σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ ανεξάρτητων και εξαρτημένων μετρήσεων.
6. Όσο μεγαλύτερα δείγματα χρησιμοποιούνται τόσο εγκυρότερα τα συμπεράσματα που εξάγονται.
7. Σε περιπτώσεις μη κανονικών πληθυσμών γίνεται πιο επιτακτικό να χρησιμοποιηθούν μεγάλα δείγματα.

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

1. *Applied Statistics and Probability for Engineers*, D.C. Montgomery, G.C. Runger, Wiley, 7th edition, 2017.
2. *Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής για Μηχανικούς*, Γ. Ζιούτας, Εκδ. Ζήτη, 3^η έκδοση, 2014.
3. *Στατιστική*, Δ.Π. Ψωινός, Εκδ. Ζήτη, 1^η έκδοση, 1999.



Σας ευχαριστώ!